This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

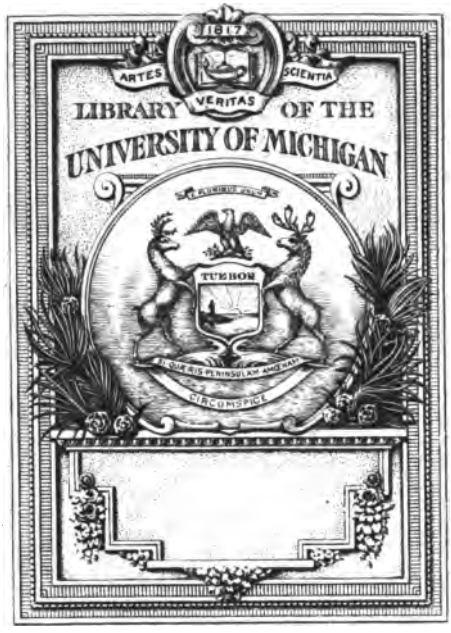
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Gm F.—

QA
551
.L485



# Analytiſche Geometrie

in der

## Ebene und im Raume,

nebſt der

## ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie.

Von

LEFÉBURE DE FOURCY, Louis Étienne

Chevalier de la Légion d'Honneur, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris, Examinateur pour l'admission à l'École polytechnique.

---

Nach der fünften Original-Auflage ins Deutſche übertragen

von

**Fr. Gruner,**

Hauptlehrer an der K. Realanſtalt in Stuttgart.

Stuttgart,

Verlag von Ebner & Seubert.

1848.

QA
551
.L485

Gedruckt bei K. Fr. Hering & Comp.

Hist. of Sci.
Geibel
9-23-30
22354

# Vorwort des Uebersetzers.

Wenn Einfachheit und Klarheit in der Darstellung, sowie Gründlichkeit und Consequenz in der Behandlung neben der Bedeutung des Inhalts den Werth eines Buches bedingen, so dürfte die Uebertragung des vorliegenden Werks genügend gerechtfertigt sein. Nachdem dasselbe in wenigen Jahren unter steter Verbesserung fünf Auflagen erlebt, und im Original den Männern von Fach in Deutschland bereits vortheilhaft bekannt ist, durfte es wohl an der Zeit sein, dieses Buch auch dem Theile unseres Publikums zugänglicher zu machen, für welchen es der Verfasser in Frankreich geschrieben hat, nämlich der studirenden Jugend, für welche die Mathematik einen wesentlichen Bestandtheil ihrer wissenschaftlichen Ausbildung und die Grundlage späterer Fachstudien bildet. Den Schülern an höhern gewerblichen Anstalten und polytechnischen Schulen, an Bau-, Forst-, Bergwerks-, Schifffahrts- und Kriegsschulen wird es theils zum Selbststudium, theils zur Vorbereitung, Wiederholung und Verarbeitung des betreffenden Lehrstoffes, dessen richtige Auffassung dem Anfänger gewöhnlich ziemlich schwierig erscheint, um so größere Erleichterung und entschiedenern Nutzen gewähren, als neben den erwähnten Vorzügen überhaupt gerade der Uebergang von der Algebra zu den Größen der Ausdehnung und die Anwendung jener auf diese mit anziehender Faßlichkeit behandelt und mit einer ebenso zweckmäßigen als reichhaltigen Auswahl von Beispielen versehen ist.

Außer einigen Zuſätzen und Andeutungen zur Entwicklung vorkommender Formeln hat der Ueberſetzer nur noch die Ableitung, der Gauß'ſchen Gleichungen aus den im Buche aufgeführten Formeln beigefügt; da dieſelben wohl ebenſo wichtig ſind als die Neper'ſchen Analogien und als deutſches Gut nicht unberückſichtigt bleiben dürfen.

Fr. Gruner.

# Vorrede des Verfassers

## zur vierten und fünften Auflage.

Nach den bei den früheren Auflagen angebrachten Verbesserungen blieb für diese wenig zu thun übrig, und es ist, mit Ausnahme einiger Zusätze, weder in der Eintheilung des Werkes, noch in dem Stoffe selbst, eine Veränderung eingetreten.

Der erste Theil, der die Trigonometrie behandelt, enthält zugleich wieder die Moivre'sche Formel, die Sinus- und Cosinus-Reihen, sowie die Anleitung zur Auflösung der binomischen Gleichung und der Gleichung des dritten Grades mittelst der Tafeln. In Betreff der Moivre'schen Formel ist noch zu bemerken, daß sie mit allen Bemerkungen versehen wurde, die bei ihrem Gebrauche zur Beachtung der nöthigen Vorsichtsmaßregeln erforderlich sind, und ohne welche man in unauflösliche Widersprüche gerathen könnte, wie dieß Poinsot in einer der Akademie der Wissenschaften 1823 vorgetragenen Abhandlung, die 1825 unter dem Titel: „Recherches sur l'analyse des sections angulaires" herausgegeben wurde, deutlich nachgewiesen hat.

Der zweite Theil, welcher die analytische Geometrie in der Ebene in sich begreift, erhielt eine einzige Erweiterung, nämlich den schönen Lehrsatz von Cauchy über die Anzahl der in einem gegebenen Raume enthaltenen imaginären Wurzeln. Dieser Lehrsatz wurde bereits in meinem Lehrbuch der Algebra, 3te Auflage 1838, jedoch ohne Beweis, angeführt; indessen scheint

der von Sturm und Liouville in dem Journal de Mathématiques, Auguſt 1836, dafür gegebene Beweis ſich ſeiner Einfachheit nach ſchon zur Aufnahme in ein Elementar-Werk zu eignen, und da bei demſelben Coordinaten gebraucht werden, ſo dürfte er hier eine paſſende Stelle finden. Cauchy's Lehrſatz verdankt ſeine Entſtehung dem glücklichen Gedanken, die imaginären Größen auf geometriſchem Wege darzuſtellen. Bei dieſer Gelegenheit möchte ich zugleich auf ein intereſſantes Werkchen aufmerkſam machen, das 1828 unter dem Titel: „Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires", von Mourey erſchienen iſt. Der Verfaſſer hat ſich die Aufgabe geſtellt, die negativen und imaginären Größen ganz aus der Rechnung auszuſcheiden, indem er dafür zwei Arten von Größen, nämlich die unter dem Namen Polar-Coordinaten bekannten Entfernungen und Winkel, einführt. In dem von Mourey entwickelten algebraiſchen Syſtem bilden dieſe Größen eine treue Darſtellung der imaginären Ausdrücke, die in der gewöhnlichen Algebra vorkommen, und der Gang ſeiner Folgerungen führt den Verfaſſer auch auf den Beweis, daß eine Gleichung vom mten Grade m Wurzeln hat.

Was den dritten Theil, in welchem die analytiſche Geometrie im Raume abgehandelt wird, betrifft, ſo ſtimmt derſelbe, mit Ausnahme einiger unbedeutender Abänderungen, ganz mit der vorigen Auflage überein.

Um die Anwendung der Differential-Rechnung auf die Größen der Ausdehnung zu ſtudiren, ſind beſonders die Werke von Lacroix, Monge und Leroy zu empfehlen; und unter den intereſſanteſten Abhandlungen, die jedoch kein zuſammenhängendes Syſtem bilden, verdienen hauptſächlich die von J. Binet, Petit und Chasles erwähnt zu werden.

# Inhalt.

## Erster Theil.

### Trigonometrie.


| | Seite |
|---|---|
| **Erstes Kapitel.** Theorie der trigonometrischen Linien | 1—29 |
| Gegenstand der Trigonometrie. Darstellung der Linien und Winkel durch Zahlen | 1—2 |
| Erklärung der trigonometrischen Linien. Gebrauch von + und — zur Bezeichnung entgegengesetzter Lagen | 2—5 |
| Aenderung der trigonometrischen Linien. Zurückführung derselben auf den ersten Quadranten | 5—9 |
| Von den Bögen, welche einem gegebenen Sinus oder Cosinus entsprechen | 9—11 |
| Zurückführung der Sinus, Cosinus ꝛc. auf einfache Verhältnisse | 11—12 |
| Relationen der trigonometrischen Linien unter sich | 12—15 |
| Formeln für den Sinus und Cosinus von a+b und a—b | 16—18 |
| Formeln für die Vielfache und Theile von Bögen | 18—22 |
| Formeln für die Tangenten | 22—24 |
| Andere häufig gebrauchte Formeln | 24—26 |
| Geometrische Beweise für die oben gefundenen Formeln | 26—29 |
| **Zweites Kapitel.** Trigonometrische Tafeln und Auflösung der Dreiecke | 30—74 |
| Einrichtung der trigonometrischen Tafeln | 30—34 |
| Berechnung der Sinus und Cosinus von 9° zu 9°, zur Berichtigung der Tafeln | 34—35 |
| Einrichtung und Gebrauch der Tafeln von Callet | 36—39 |
| Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines ebenen Dreiecks | 40—43 |
| Auflösung der ebenen Dreiecke überhaupt | 43—50 |
| Angewandte Beispiele | 50—55 |

Seite

Relationen zwischen den Winkeln und Seiten eines sphärischen Dreiecks . . . . . 55—62
Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke . . . . . 62—64
Auflösung der sphärischen Dreiecke überhaupt . . . . . 64—69
Ueber die zweifelhaften Fälle bei sphärischen Dreiecken . . . 69—72
Anwendung der sphärischen Trigonometrie . . . . . 72—74

**Drittes Kapitel.** Einige in der höhern Mathematik gebrauchte Formeln. Entwicklung der Reihen für den Sinus und Cosinus. Auflösung der Binomialgleichung und der Gleichung des dritten Grades 75—102
Moivre'sche Formel. Mehrfache Bedeutung derselben . . . 75—80
Formeln für sin nφ und cos nφ, $(\sin\varphi)^n$ und $(\cos\varphi)^n$ . . 80—83
Entwicklung des Sinus und Cosinus in Reihen . . . . . 83—86
Auflösung der binomischen Gleichungen. Lehrsatz von Cotes 86—91
Trigonometrische Auflösung der Gleichungen des dritten Grades 91—96
Weiteres Mittel zur trigonometrischen Auflösung der Gleichungen des dritten Grades . . . . . 96—99
Anmerkungen des Uebersetzers. Gauß'sche Gleichungen . . . . . 99—102

## Zweiter Theil.

### Analytische Geometrie in der Ebene.

**Erstes Kapitel.** Bestimmte Aufgaben . . . . . 103—135
Regeln zur Darstellung einer Aufgabe als Gleichung . . . 103—115
Von den negativen Werthen der Unbekannten . . . . . 115—118
Von der Gleichartigkeit . . . . . 118—121
Construction algebraischer Ausdrücke . . . . . 121—127
Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben . . . . . 128—135

**Zweites Kapitel.** Von den geometrischen Oertern . . 136—146
Geometrische Oerter. Darstellung derselben durch Gleichungen 136—140
Beispiele von geometrischen Oertern . . . . . 140—146

**Drittes Kapitel.** Transformation der Coordinaten . 147—152
Zweck dieser Transformation . . . . . 147—148
Formeln für die Transformation der Coordinaten . . . . 148—151
Bemerkungen über die Transformationsformeln . . . . . 151—152

**Viertes Kapitel.** Eintheilung der Linien überhaupt . 153—156

Seite

**Fünftes Kapitel.** Linien der ersten Ordnung . . . . 157—172
Construction der Gleichungen des ersten Grads . . . . . 157—161
Aufgaben über die gerade Linie . . . . . 161—172

**Sechstes Kapitel.** Linien der zweiten Ordnung . . . 173—201
Eintheilung der Linien der zweiten Ordnung in drei Arten . . 173—177
Discussion der Ellipse . . . . . 177—180
Discussion der Hyperbel . . . . . 180—186
Asymptoten der Hyperbel überhaupt . . . . . 186—191
Discussion der Parabel . . . . . 191—193
Anwendung der vorhergehenden Discussionen auf Zahlenbeispiele 193—201

**Siebentes Kapitel.** Vereinfachung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grads . . . . . 202—213
Wegschaffung der Glieder des ersten Grads . . . . . 202—204
Wegschaffung des Rechtecks . . . . . 204—206
Reduction der allgemeinen Gleichung . . . . . 206—208
Vom Mittelpunkt und den Axen . . . . . 208—210
Entwicklung der Rechnungen, welche auf die umgeformten Gleichungen führen . . . . . 210—213

**Achtes Kapitel.** Vom Kreise . . . . . 214—228
Verschiedene Formeln für die Gleichung des Kreises . . . . 214—216
Lehrsätze über den Kreis . . . . . 217—223
Von der Tangente am Kreise und der Normale . . . . . 223—228

**Neuntes Kapitel.** Von der Ellipse . . . . . 229—265
Die Ellipse auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen . . 229—232
Construction der Ellipse mittelst ihrer Axen . . . . . 232—234
Von den Brennpunkten und Directricen . . . . . 234—242
Von der Tangente und Normale . . . . . 242—249
Von den Durchmessern . . . . . 249—252
Von den Ergänzungs-Sehnen . . . . . 252—256
Die Ellipse auf ihre conjugirten Durchmesser bezogen . . . 256—263
Quadratur der Ellipse . . . . . 263—265

**Zehntes Kapitel.** Von der Hyperbel . . . . . 266—298
Die Hyperbel in Beziehung auf ihre Axen . . . . . 266—269
Von den Brennpunkten und Directricen . . . . . 269—273
Von der Tangente und Normale . . . . . 273—279
Von den Durchmessern . . . . . 279—282
Von den Ergänzungs-Sehnen . . . . . 282—283
Die Hyperbel in Beziehung auf ihre conjugirten Durchmesser . 283—288

| | Seite |
|---|---|
| Von den Asymptoten | 288—292 |
| Die Hyperbel in Beziehung auf ihre Asymptoten | 292—295 |
| Quadratur der Hyperbel | 295—298 |
| **Eilftes Kapitel.** Von der Parabel | 299—313 |
| Die Parabel in Beziehung auf ihre Axen | 299—301 |
| Von dem Brennpunkte und den Directricen | 301—304 |
| Von der Tangente und Normale | 304—309 |
| Von den Durchmessern | 309—310 |
| Die Parabel bezogen auf ihre Durchmesser | 310—313 |
| Quadratur der Parabel | 313 |
| **Zwölftes Kapitel.** Von den Polar-Coordinaten | 314—323 |
| Erklärungen. Allgemeine Formeln | 314—316 |
| Polar-Gleichungen der drei Curven der zweiten Ordnung | 316—320 |
| Von den Vorzeichen und der den Polar-Coordinaten zu gebenden Ausdehnung. Beispiele | 320—323 |
| **Dreizehntes Kapitel.** Von den Kegel- und Cylinderschnitten | 324—335 |
| Kegelschnitte. Uebereinstimmung dieser Curven mit denen der zweiten Ordnung | 324—330 |
| Andere Methode | 330—333 |
| Cylinderschnitt | 333—334 |
| Antiparalleler Schnitt des schiefen Kegels | 334—335 |
| **Vierzehntes Kapitel.** Allgemeine Betrachtung der Tangenten und Asymptoten | 336—344 |
| Tangenten an algebraischen Curven | 336—338 |
| Tangenten an die auf Polar-Coordinaten bezogenen Curven | 338—340 |
| Asymptoten der algebraischen Curven | 340—344 |
| **Fünfzehntes Kapitel.** Von den ähnlichen Curven | 345—351 |
| Allgemeine Theorie | 345—348 |
| Anwendungen | 348—351 |
| **Sechszehntes Kapitel.** Von einigen Anwendungen der Curven | 352—371 |
| Construction bestimmter Gleichungen | 352—355 |
| Von einigen merkwürdigen Aufgaben der Alten | 355—358 |
| Anwendung der Curven in der Algebra | 358—363 |
| Lehrsatz von Cauchy | 364—371 |
| **Siebzehntes Kapitel.** Einige ausgewählte Aufgaben | 372—384 |

# Dritter Theil.

## Analytische Geometrie im Raume.


Seite

**Erstes Kapitel.** Von den Projectionen der Linien und Flächen . . . . . 385—396
Lineare Projection eines Systems von Geraden . . . . . 385—387
Relationen, die sich aus den Projectionen auf verschiedene Axen ergeben . . . . . 387—392
Projectionen ebener Flächen . . . . . 392—396

**Zweites Kapitel.** Von der Ebene und der geraden Linie im Raume . . . . . 397—407
Allgemeine Vorbemerkungen über die Bestimmung der Punkte, Flächen und Linien im Raume . . . . . 397—401
Gleichung der Ebene . . . . . 401—405
Gleichungen der geraden Linie . . . . . 405—407

**Drittes Kapitel.** Aufgabe über die Ebene und die gerade Linie . . . . . 408—428
Erster Theil: Aufgaben, deren Lösung von der Wahl der Axen unabhängig ist . . . . . 408—416
Zweiter Theil: Aufgaben, deren Lösung mit rechtwinkligen Axen einfacher ist . . . . . 416—428

**Viertes Kapitel.** Transformation der Coordinaten im Raume . . . . . 429—438
Besondere Formeln für die verschiedenen Fälle . . . . . 429—432
Von den Bedingungsgleichungen zwischen den neun Coefficienten a, a′, a″, u. s. w. . . . . 433—434
Euler'sche Formeln, um mittelst dreier Winkel $\varphi$, $\theta$, $\psi$ von rechtwinkligen Axen auf andere rechtwinklige überzugehen . . 435—436
Formeln für den Durchschnitt einer Fläche und einer Ebene 437
Polar-Coordinaten . . . . . 438

**Fünftes Kapitel.** Aufzählung der Flächen der zweiten Ordnung . . . . . 439—453
Eintheilung der Flächen überhaupt . . . . . 439—440
Vereinfachung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades: Wegschaffung der drei Rechtecke . . . . . 440—441
Weitere Reductionen . . . . . 442—443
Bemerkungen über die reducirten Gleichungen. Unterscheidung der Flächen mit und ohne Mittelpunkt . . . . . 443—445
Flächen mit Mittelpunkt . . . . . 445—449
Flächen ohne Mittelpunkt . . . . . 450—451
Besondere Fälle . . . . . 451—453

Seite

**Sechstes Kapitel.** Mittelpunkt. Diametral-Ebenen und Durchmesser. Haupt-Ebenen und Haupt-Axen . . . . . 454—467
Aufsuchung des Mittelpunkts im allgemeinsten Fall . . . . 454—456
Von den Diametral-Ebenen überhaupt . . . . . 456—457
Von den Durchmessern . . . . . 458—459
Haupt-Ebenen und Haupt-Durchmesser . . . . . 459—464
Fälle von unendlich vielen Haupt-Ebenen. Bedingungen einer Umdrehungsfläche . . . . . 464—467

**Siebentes Kapitel.** Eigenschaften der conjugirten Durchmesser . . . . . 468—475

**Achtes Kapitel.** Von der Berührungsebene und der Normale . . . . . 476—488
Berührungsebene und Normale an einer beliebigen algebraischen Fläche . . . . . 476—482
Berührungsebene an den Flächen zweiter Ordnung . . . . 482—485
Lehrsatz von Monge . . . . . 485—488

**Neuntes Kapitel.** Von den ebenen Durchschnitten bei Flächen der zweiten Ordnung . . . . . 489—509
Verschiedene Curven, die aus Schnitten mit Ebenen entstehen 489—491
Besondere Fälle, wo die Schnitte Hyperbeln sind. Asymptoten-Kegel . . . . . 491—494
Geradlinige Schnitte des Hyperboloids mit einem Mantel . . 494—498
Geradlinige Schnitte des hyperbolischen Paraboloids . . . . 498—501
Kreisförmige Schnitte . . . . . 501—506
Beweise einiger Lehrsätze . . . . . 506—509

**Zehntes Kapitel.** Discussion numerischer Gleichungen des zweiten Grades mit drei Veränderlichen . . 510—521
Darstellung des Verfahrens . . . . . 510—513
Beispiele . . . . . 513—521

**Eilftes Kapitel.** Von der Erzeugung der Flächen . . 522—540
Allgemeine Regeln . . . . . 522—523
Cylindrische Flächen . . . . . 523—526
Conische Flächen . . . . . 526—529
Entwickelbare Flächen überhaupt . . . . . 530—532
Drehungsflächen . . . . . 532—535
Windschiefe Flächen . . . . . 536—540

# Erster Theil.

# Trigonometrie.

## Erstes Kapitel.

## Theorie der trigonometrischen Linien.

### Gegenstand der Trigonometrie.

#### Darstellung der Linien und Winkel durch Zahlen.

**1.** In jedem ebenen oder sphärischen Dreieck kommen sechs Stücke in Betracht: drei Winkel und drei Seiten. Um alle zu finden, ist es im Allgemeinen hinreichend, wenn drei davon gegeben sind; jedoch muß unter diesen drei Stücken beim ebenen Dreieck wenigstens eine Seite sein. Denn es lassen sich bekanntlich unendlich viele ebene Dreiecke bilden, die gleiche Winkel enthalten, und die einander nicht congruent, sondern nur ähnlich sind. Es versteht sich dabei, daß die Summe der drei gegebenen Winkel immer gleich zwei Rechten sein muß.

Die Geometrie liefert für jeden der Fälle, in welchen ein Dreieck aus einigen seiner Theile bestimmt werden kann, sehr einfache Constructionen; sie haben aber, wie jedes graphische Verfahren, das man anwenden könnte, den Uebelstand, daß dabei wegen der Unvollkommenheit der benöthigten Instrumente nur eine sehr geringe und oft selbst unzureichende Annäherung erreicht wird. Man hat deßhalb gesucht, diese Constructionen durch numerische Rechnungen zu ersetzen, wodurch es immer möglich ist, den nöthigen Grad von Genauigkeit zu erreichen. Der Gegenstand der Trigonometrie insbesondere ist nun, Methoden zur Berechnung aller Theile eines Dreiecks, von welchem die nöthigen Stücke gegeben sind, zu finden. Dieß heißt man ein Dreieck auflösen.

**2.** Um die Linien in Zahlen auszudrücken, bezieht man sie auf eine bekannte Längeneinheit, z. B. auf den Meter oder Schuh; dann ist jede Seite gleich einer gewissen Anzahl Meter oder Schuh.

**3.** Die Winkel bezeichnet man durch die Kreisbögen, mit welchen sie gemessen werden. Zu diesem Zweck theilt man den Kreisumfang mit beliebigem Halbmesser in eine gewisse Anzahl gleicher Theile oder Grade; dann läßt sich ein Winkel oder Bogen durch eine Anzahl Grade ausdrücken.

Früher war es allgemein üblich, den Kreisumfang in 360 Grade, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden ꝛc. einzutheilen, wornach der vierte Theil des Kreisumfangs oder der Quadrant, welcher das Maß des rechten Winkels ist, 90 Grade beträgt. Um jedoch das Unbequeme complexer Zahlen zu vermeiden, hat man vorgeschlagen, zum Messen der Winkel auch die Decimaleintheilung anzuwenden; dann wird der Quadrant in 100 Grade, der Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden ꝛc. eingetheilt.

Die Grade, Minuten und Secunden werden durch die Zeichen, °, ′, ″, bezeichnet; um also 14 Grade, 9 Minuten und 37 Secunden darzustellen, schreibt man 14° 9′ 37″. Gehören die Grade zur neuen Eintheilung, und man will diesen Bogen auf den als Einheit angenommenen Quadranten beziehen, so wird derselbe durch 0,140937 ausgedrückt; denn in dieser Eintheilung sind die Grade Hundertel, die Minuten Zehntausendtel und die Secunden Milliontel des Quadranten. Ungeachtet der Vortheile der neuen Eintheilung behält die ältere immer noch den Vorzug, weßhalb hier ebenfalls die letztere beibehalten wurde. In den Formeln kommt auch oft der Buchstabe H zur Bezeichnung des halben Kreisumfangs oder 180° vor.

## Erklärung der trigonometrischen Linien.

### Gebrauch von + und — zur Bezeichnung entgegengesetzter Lagen.

**4.** Die Mathematiker waren wohl lange durch die Schwierigkeit aufgehalten, die Beziehungen, welche zwischen den Winkeln und den Seiten der Dreiecke stattfinden, auszudrücken. Ihr erster Gedanke war ohne Zweifel für die Winkel die Bögen, welche ihnen zum Maße dienen, zu setzen; da es ihnen jedoch nicht leichter wurde, die Bögen in die Rechnung einzuführen, so kamen sie von selbst darauf, die Bögen selbst durch gerade Linien, welche von ihnen abhängen, zu ersetzen, so daß, wenn diese bestimmt sind, der Bogen bekannt ist, und umgekehrt. Diese Linien, welche jetzt für alle Zweige der Mathematik vortheilhafte Anwendungen gewähren und deren Erklärung hier folgt, heißen zusammen trigonometrische Linien.

Der Sinus des Bogens AM (Fig. 1) ist die Senkrechte MP, welche von einem Endpunkt des Bogens auf den Durchmesser, der durch den andern Endpunkt geht, gefällt wird.

Die Tangente des Bogens AM ist die Senkrechte AT, die an dem einen Endpunkt des Bogens auf dem Durchmesser errichtet wird, bis sie den

verlängerten Halbmesser OM, der durch den andern Endpunkt gezogen wird, trifft.

Die Secante OT ist der Theil des verlängerten Halbmessers, der zwischen dem Mittelpunkt und der Tangente liegt.

Wenn man den Bogen AM mit x bezeichnet, so wird der Sinus, die Tangente und die Secante auf folgende abgekürzte Weise ausgedrückt:

$$MP = \sin x, \quad AT = \operatorname{tang} x, \quad OT = \sec x.$$

Verlängert man MP, bis sie die Peripherie in N trifft, so ist die Sehne MN das doppelte von MP, und der Bogen MAN das doppelte von AM; der Sinus eines Bogens ist also die Hälfte der Sehne, welche zu einem doppelt so großen Bogen gehört.

Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises mit r, so ist die Seite des eingeschriebenen Quadrats gleich $r\sqrt{2}$; da nun der zugehörige Bogen $90^0$ beträgt, so ist $\sin 45^0 = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$. Ebenso folgt, da die Seite des einbeschriebenen Sechsecks gleich r ist und der zugehörige Bogen $60^0$ beträgt, $\sin 30^0 = \frac{1}{2} r$.

**5.** Man nennt Complement eines Bogens oder eines Winkels das, was man zu demselben hinzufügen muß, um den Quadranten oder $90^0$ zu haben. Ist der Bogen größer als $90^0$, so ist sein Complement negativ: das Complement zu $127^0$ ist z. B. $-37^0$. Die beiden spitzigen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind Complemente zu einander. Unter Cosinus, Cotangente und Cosecante eines Bogens versteht man den Sinus, die Tangente und die Secante des Complements dieses Bogens; zur Bezeichnung dieser neuen Linie gebraucht man die Abkürzungen cos, cot, cosec. Nach dieser Erklärung ist daher

$$\cos x = \sin(90^0 - x), \quad \cot x = \operatorname{tang}(90^0 - x), \quad \operatorname{cosec} x = \sec(90^0 - x).$$

Man errichte (Fig. 1) den Halbmesser OB senkrecht auf OA, ziehe MQ und BS senkrecht auf OB; der Bogen BM hat nun MQ zum Sinus, BS zur Tangente und OS zur Secante. Da aber BM das Complement des Bogens AM ist, so ist, wenn AM wieder durch x bezeichnet wird, $MQ = \cos x$, $BS = \cot x$, $OS = \operatorname{cosec} x$.

Hier ist MQ = OP, d. h. der Cosinus ist gleich dem Theil des Halbmessers, der zwischen dem Mittelpunkt und dem Fußpunkt des Sinus liegt.

**6.** Die Entfernung AP zwischen dem Anfangspunkt des Bogens und dem Fußpunkt des Sinus heißt Sinus versus, und die Entfernung BQ Cosinus versus; diese Linien kommen indessen selten in Anwendung.

**7.** Wenn man den Punkt M in alle möglichen Lagen auf der Peripherie bringt, so können auch die trigonometrischen Linien in Lagen kommen, die denjenigen ganz entgegengesetzt sind, die sie haben, wenn der Bogen AM kleiner als $90^0$ ist. Es handle sich z. B. um den Bogen AM', dessen Com-

plement negativ und gleich BM' ist, so befindet sich der Cosinus QM' oder OP' links vom Punkte O, während er zuerst rechts von demselben war. Solche Aenderungen in der Lage der Linien führen im Allgemeinen in der Rechnung auf Schwierigkeiten, welche folgende, wenn auch sehr einfache Aufgabe andeuten wird.

Es sei ABX (Fig. 2) eine beliebige Linie, auf welcher zwei Punkte A und B, die um AB = a von einander abstehen, gegeben sind. Angenommen, der Zwischenraum x von dem Punkte B bis zu einem beliebigen Punkte M der Linie ABX sei bekannt, und man wolle den Zwischenraum zwischen dem Punkte A und diesem letztern Punkte finden, so erhält man offenbar, wenn man den gesuchten Zwischenraum mit z bezeichnet,

$$z = a + x \text{ oder } z = a - x,$$

je nachdem der Punkt M auf der Seite von BX oder auf der von BA liegt: so daß man für diese zwei Lagen des Punktes M zwei verschiedene Formeln gebrauchen muß. Indessen weicht man diesem Uebelstande einfach aus und bedarf nur einer Formel, wenn man die Entfernungen, welche in Beziehung auf den Punkt B entgegengesetzte Lagen haben, durch verschiedene Vorzeichen andeutet. So erhält man, wenn in der ersten Formel ($z = a + x$), nach einander $x = +BM$ und $x = -BM$ gesetzt wird, dem Vorigen gemäß $z = a + BM$ und dann $z = a - BM$.

Auf diese Weise läßt sich die erste Formel $z = a + x$ auf alle Lagen des Punktes M anwenden und die zweite wird unnöthig. Man könnte auch x auf der Seite von BA positiv, und auf der von BX negativ nehmen; dann müßte man die zweite Formel $z = a - x$ beibehalten. Es ließen sich leicht noch viele Beispiele anführen; das Vorstehende genügt jedoch, um die Wichtigkeit der folgenden, von Descartes aufgestellten Regel, einzusehen.

*Nimmt man auf einer beliebigen, geraden oder krummen Linie verschiedene Längen von einem gemeinschaftlichen, auf dieser Linie liegenden festen Anfangspunkte aus, so werden diese Längen, je nachdem sie in Beziehung auf den Anfangspunkt entgegengesetzte Lagen haben, die einen mit dem Vorzeichen +, die andern mit dem Vorzeichen — in die Rechnung eingeführt.*

Es ist übrigens ganz gleichgültig, welche Richtung für die positiven Entfernungen angenommen wird; so bald aber eine als solche bestimmt ist, so müssen die negativen Entfernungen auf der entgegengesetzten Seite genommen werden. In Betreff der trigonometrischen Linien ist es gebräuchlich, sie als positiv in der Lage zu betrachten, welche sie haben, wenn der Bogen kleiner als $90^0$ ist, und in welcher sie auch zuerst vorkommen.

Wir werden bald Veranlassung haben, von dieser Regel zahlreiche Anwendungen zu machen, und auch bei der Anwendung der Algebra zur Auflösung geometrischer Aufgaben auf dieselbe zurückkommen; vorher müssen wir jedoch auf einen ziemlich gewöhnlichen Irrthum aufmerksam machen, daß man nämlich diese Regel als einen Lehrsatz ansieht, der a priori

bewiesen werden könne. Dem ist durchaus nicht so, und wie viele mehr oder minder sinnreiche Versuche auch schon zur Begründung derselben gemacht wurden, so muß man immer bedenken, daß sie nichts weiter als eine bloße Uebereinkunft ist, der man nachher nicht zuwider handeln darf, und deren Zweckmäßigkeit sich in der Anwendung vollkommen bewährt.

## Aenderung der trigonometrischen Linien.

### Zurückführung derselben auf den ersten Quadranten.

**8.** Wenn der Halbmesser OM (Fig. 1) auf OA zu liegen kommt, so ist natürlich der Bogen AM gleich Null; dann ist auch der Sinus und die Tangente gleich Null, und die Secante ist gleich OA. Zugleich wird der Cosinus MQ auch gleich OA, und die Cotangente sowie die Cosecante sind unendlich groß; denn es ist klar, daß die Linien BS und OS in dem Maße wachsen, als sich OM der OA nähert, und daß sie beliebig groß werden können. So erhält man, wenn der Halbmesser mit r bezeichnet wird:

$$\sin 0 = 0, \quad \operatorname{tang} 0 = 0, \quad \sec 0 = r,$$
$$\cos 0 = r, \quad \cot 0 = \infty, \quad \operatorname{cosec} 0 = \infty.$$

Wenn sich der Halbmesser OM allmählig in die Lage OB erhebt, so sieht man leicht, daß der Sinus, die Tangente und die Secante wachsen, während der Cosinus, die Cotangente und die Cosecante abnehmen.

Befindet sich der Punkt M auf der Mitte von AB, so enthält der Bogen AM $45^0$; das Dreieck OPM ist gleichschenklig und der Sinus gleich dem Cosinus. Dieses Dreieck gibt aber $2MP^2 = r^2$, woraus $MP = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$; also

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \tfrac{1}{2}r\sqrt{2}.$$

Da ferner die Dreiecke OAT und OBS dann ebenfalls gleichschenklig und einander congruent sind, so ist die Tangente und die Cotangente gleich dem Halbmesser; somit

$$\operatorname{tang} 45^0 = \cot 45^0 = r.$$

Endlich ist auch die Secante gleich der Cosecante, und da im Dreieck OAT dann auch $OT^2 = 2r^2$ ist, woraus $OT = r\sqrt{2}$, so ist

$$\sec 45^0 = \operatorname{cosec} 45^0 = r\sqrt{2}.$$

Fällt der Punkt M auf den Punkt B, so ist der Sinus gleich BO, die Tangente und Secante sind unendlich groß, der Cosinus MQ ist gleich Null, die Cotangente BS ist ebenfalls gleich Null, und die Cosecante OS wird gleich OB. Man hat daher

$$\sin 90^0 = r, \quad \operatorname{tang} 90^0 = \infty, \quad \sec 90^0 = \infty,$$
$$\cos 90^0 = 0, \quad \cot 90^0 = 0, \quad \operatorname{cosec} 90^0 = r.$$

Diese Werthe folgen übrigens aus denjenigen, welche man gefunden hat, als der Bogen gleich Null war; denn da die Bögen von 0 und $90^0$

Complemente von einander sind, so muß $\sin 90^0 = \cos 0$, $\tang 90^0 = \cot 0$, $\sec 90^0 = \operatorname{cosec} 0$, $\cos 90^0 = \sin 0$, $\cot 90^0 = \tang 0$, $\operatorname{cosec} 90^0 = \sec 0$ sein.

**9.** Denken wir uns nun, der Halbmesser OM setze seine Drehung fort und er sei in die Lage OM′ gekommen, dann ist AM′ der Bogen und M′P′ sein Sinus. Man ziehe M′M parallel mit A′A und construire alle trigonometrischen Linien des Bogens AM′, wie die Figur es zeigt. Vorerst ist klar, daß die Sinusse MP und M′P′ gleich sind; also $\sin AM' = \sin AM$.

Um die Tangente zu erhalten, muß man den Halbmesser OM′ unterhalb des Durchmessers AA′ verlängern, weßhalb diese Tangente, nämlich AT′, sich in einer der vorigen entgegengesetzten Lage befindet; sie ist folglich negativ. Die congruenten Dreiecke OAT und OAT′ geben aber AT′ = AT; also ist $\tang AM' = -\tang AM$.

Nach der Erklärung (Nro. 4) ist OT′ die Secante des Bogens AM′. Diese Linie fällt nicht mehr auf den Halbmesser OM′ auf derselben Seite vom Mittelpunkt, wie der beschreibende Punkt M′, sondern sie liegt auf der entgegengesetzten Seite. Deßwegen muß sie negativ sein, und wie OT′ = OT, so ist auch $\sec AM' = -\sec AM$.

Der Cosinus, die Cotangente und die Cosecante geben zu ähnlichen Bemerkungen Anlaß. Da der Bogen AM′ mehr als 90° beträgt, so ist sein Complement negativ, und da überdieß der Cosinus QM′ oder OP′ sich links vom Punkte O befindet, so muß man auch diesen Cosinus negativ nehmen. Dieselbe Folgerung findet bei der Cotangente BS′ statt. Was die Cosecante OS′ betrifft, so darf man ihr das Vorzeichen — nicht geben, denn sie liegt auf OM′, auf derselben Seite mit dem beschreibenden Punkte, wie dieß im ersten Quadranten auch der Fall war. Da die Dreiecke OBS und OBS′ congruent sind, so hat man QM′ = QM, BS′ = BS, OS′ = OS; mithin $\cos AM' = -\cos AM$, $\cot AM' = -\cot AM$, $\operatorname{cosec} AM' = \operatorname{cosec} AM$.

Man heißt Supplement eines Bogens oder eines Winkels die Ergänzung, welche man zu demselben hinzufügen muß, um 180° zu erhalten; also ist A′M′ oder der ihm gleiche Bogen AM das Supplement zu AM′, und man kann die oben gefundenen Eigenschaften so ausdrücken: zwei Bögen, von denen der eine das Supplement des andern ist, haben gleiche trigonometrische Linien mit entgegengesetzten Vorzeichen, mit Ausnahme des Sinus und der Cosecante, welche ihr Vorzeichen dabei nicht ändern.

Wenn man diese Eigenschaften durch Gleichungen ausdrücken will, und AM′ mit x bezeichnet, so hat man $AM = A'M' = 180^0 - x$, und kann daher setzen:

$$[1]\quad \begin{cases} \sin x = \sin(180^0 - x), \\ \tang x = -\tang(180^0 - x), \\ \sec x = -\sec(180^0 - x), \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -\cos(180^0 - x), \\ \cot x = -\cot(180^0 - x), \\ \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(180^0 - x). \end{cases}$$

Ueberdieß ist klar, daß der Sinus, die Tangente und die Secante von

$90^0$ bis $180^0$ abnehmen, und dagegen der Cosinus, die Cotangente und die Cosecante wachsen.

Wenn OM mit OA' zusammenfällt, so hat man

$$\sin 180^0 = 0, \quad \operatorname{tang} 180^0 = 0, \quad \sec 180^0 = -r,$$
$$\cos 180^0 = -r, \quad \cot 180^0 = -\infty, \quad \operatorname{cosec} 180^0 = \infty.$$

Alle diese Werthe lassen sich aus den Formeln [1] ableiten, indem man $x = 180^0$ setzt. Die Formel $\cos x = -\cos(180^0 - x)$ verwandelt sich z. B. in $\cos 180^0 = -\cos 0$; da aber $\cos 0 = r$, so ist wie vorhin $\cos 180^0 = -r$.

**10.** Die Anwendung der Analyse auf die Geometrie führt häufig auf Bögen, welche mehrere Halbkreise enthalten. Deßhalb braucht man auch Formeln, welche alle diese Bögen ebenfalls auf den ersten Quadranten zurückführen. Der Abkürzung wegen wollen wir hauptsächlich den Sinus und Cosinus, welche die gebräuchlichsten Linien sind, betrachten; da ferner jeder Bogen, der größer als der Halbkreis ist, aus einem Bogen von weniger als $180^0$, nebst einem oder mehreren Bögen von $180^0$ besteht, so wollen wir zuerst untersuchen, was der Sinus und Cosinus von $180^0 + x$ wird, wenn $x < 180^0$ ist.

Es sei AM der mit x bezeichnete Bogen, der beliebig zwischen 0 und $180^0$ angenommen werden kann: fügt man zu AM noch den Halbkreis MA'N', so ist der neue Bogen AMA'N' gleich $180^0 + x$. Die beiden Bögen haben gleiche Sinus, nämlich MP und N'P', oder was dasselbe ist, OQ und OQ'; da aber diese Linien entgegengesetzte Lagen haben, so muß man ihnen, der Annahme gemäß (Nro. 7), entgegengesetzte Vorzeichen geben. Die Cosinus OP und OP' sind auch gleich und erfordern auch verschiedene Vorzeichen; also ist

$$[2] \quad \sin(180^0 + x) = -\sin x, \quad \cos(180^0 + x) = -\cos x.$$

Man vermehre ferner AM um $360^0$, so ist klar, daß man wieder auf den nämlichen Punkt der Peripherie zurückkommt, und daß somit alle trigonometrischen Linien wieder die nämlichen werden. Man hat also

$$[3] \quad \sin(360^0 + x) = \sin x, \quad \cos(360^0 + x) = \cos x.$$

Ueberhaupt mag der Bogen x so groß sein als man will, so muß, wenn man ihn um $180^0$ oder um eine ungerade Anzahl von Halbkreisen vermehrt, sein Endpunkt von einem Ende des Durchmessers auf das entgegengesetzte fallen, und dann ist klar, daß der Sinus und Cosinus nur ihre Vorzeichen ändern; wenn man aber x um $360^0$ oder um eine gerade Anzahl von Halbkreisen vermehrt, so kann, da man wieder auf denselben Punkt der Peripherie zurückkommt, keine der trigonometrischen Linien sich ändern.

**11.** Betrachten wir noch die negativen Bögen, d. h. solche, welche beschrieben werden, wenn der zuerst auf OA liegende Halbmesser sich in der Richtung AB'A', welche der vorhin angenommenen entgegengesetzt ist, bewegt.

Es seien AM und AN zwei gleiche Bögen von entgegengesetzter Lage, und sie werden mit x und — x bezeichnet, so ist klar, daß ihre Sinus MP und NP ebenfalls gleich sind und entgegengesetzte Lage haben. Um die Cosinus zu erhalten, beachte man, daß die Complemente $90^0 - x$ und $90^0 + x$ durch die Bögen BM und BMN ausgedrückt sind, deren Sinus MQ und NQ′ einander gleich sind und einerlei Lage haben; man hat daher

[4] $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.

Obgleich die Bögen AM und AN in der Figur $< 90^0$ sind, so sind diese Formeln deßwegen nicht weniger allgemein. Erstens ist klar, wenn man die beiden Bögen beliebig vergrößert, wofern sie nur unter sich gleich bleiben, so müssen auch die Sinus MP und NP stets einander gleich und entgegengesetzt sein; man hat also immer $\sin(-x) = -\sin x$. Was die andere Formel betrifft, so nehme man die Bögen $> 90^0$ an, z. B. wie ABM′ und AB′N′, und mache $x = ABM'$ und $-x = -AB'N'$. Das Complement $90^0 - x$ des ersten Bogens ist negativ und in der Figur durch den Bogen BM′ dargestellt, der links vom Punkte B liegt, und das Complement $90^0 + x$ des zweiten Bogens ist gleich BAN′ und immer rechts vom Punkte B. Nun sind die Sinus M′Q und N′Q′ dieser Complementbogen einander gleich und haben in Beziehung auf den Durchmesser BB′ dieselbe Lage; man hat also immer $\cos(-x) = \cos x$. Somit gewähren die Formeln [4] jede wünschenswerthe Allgemeinheit.

Es ist wohl zu merken, daß der Cosinus eines beliebigen, positiven oder negativen Bogens seiner Größe und Lage nach immer durch den Abstand des Mittelpunkts vom Fußpunkt des Sinus dargestellt wird.

**12.** Auch ist, ehe wir weiter gehen, zu beachten, daß die bis jetzt gefundenen Formeln [1, 2, 3, 4] auf alle möglichen, sowohl positiven als negativen Bogen angewandt werden können. Der Kürze wegen soll hier nur von dem Sinus und Cosinus die Rede sein.

1) Betrachten wir noch einmal die beiden Formeln in Nro. 9

$$\sin x = \sin(180^0 - x), \quad \cos x = -\cos(180^0 - x),$$

die nur für positive, zwischen 0 und $180^0$ enthaltenen Bögen bewiesen wurden. Verwandelt man x in $180^0 + x$, so erhält man dafür

$$\sin(180^0 + x) = \sin(-x), \quad \cos(180^0 + x) = -\cos(-x),$$

welche Gleichungen offenbar nach den Formeln [2] und [4] richtig sind. Es ist klar, daß der Bogen noch einmal um $180^0$ vermehrt werden kann, und so fort bis ins Unendliche. Setzt man — x anstatt x, so ergibt sich auf dieselbe Weise, daß die beiden Formeln wieder richtig sind; sie gelten also für alle möglichen Bögen.

2) Die Formeln [2], welche für alle positiven Bögen bewiesen wurden, gelten auch für die negativen; denn wenn man für x in denselben — x setzt, so ergibt sich

$$\sin(180^0 - x) = -\sin(-x) = \sin x,$$
$$\cos(180^0 - x) = -\cos(-x) = -\cos x,$$

und man kommt auf die Formeln [1] zurück.

3) Da die Vermehrung eines beliebigen Bogens $+ x$ oder $- x$ um $180^0$ nur die Vorzeichen des Sinus und Cosinus verändert, so folgt daraus, daß die Vermehrung um $360^0$ keine Veränderung hervorbringen kann; folglich gelten die Formeln [3] auch für negative Bögen.

4) Was die Formeln [4] betrifft, so bedarf es hier keiner Erörterung; denn es ist klar, daß man hier x durch $- x$ ersetzen kann.

**13.** Es ist nun leicht, die trigonometrischen Linien jedes beliebigen Bogens auf den ersten Quadranten zurückzuführen. Es sei $x = 1029^0$ ein Bogen, dessen Sinus gesucht wird. Man ziehe davon $360^0$ so oft als möglich ab, so bleibt $309^0$; man hat also nach den Formeln [3] $\sin x = \sin 309^0$. Nimmt man von $309^0$ noch $180^0$ weg, so hat man nach den Formeln [2] $\sin x = -\sin 129^0$. Nimmt man endlich das Supplement von $129^0$, nämlich $51^0$, so ergibt sich $\sin x = -\sin 51^0$ (Nro. 9). Man kann sogar die Reduction noch weiter führen, da $\sin 51^0 = \cos(90^0 - 51^0) = \cos 39^0$; daher $\sin x = -\cos 39^0$.

Wäre der gegebene Bogen $x = -1029^0$, so würde der Sinus ein dem vorigen entgegengesetztes Vorzeichen erhalten (Nro. 11), und man hätte $\sin x = \cos 39^0$.

### Von den Bögen, welche einem gegebenen Sinus oder Cosinus entsprechen.

**14.** Die eben vorgenommenen Entwicklungen geben zu der wichtigen Bemerkung Anlaß, daß es unendlich viele Bögen gibt, welche dieselben trigonometrischen Linien haben. Nehmen wir an, eine dieser Linien sei gegeben, und man soll die verschiedenen zugehörigen Bögen suchen.

Es sei gegeben $\sin x = a$. Man trage auf dem Halbmesser OB (Fig. 1) der senkrecht auf OA steht, die $OQ = a$ an und ziehe durch den Punkt Q die MM' parallel mit OA. Nun ist klar, daß man für den Werth von x alle Bögen nehmen kann, die sich in den Punkten M und M' endigen. Bezeichnet man den Bogen AM durch $\alpha$ und $180^0$ mit H, so ist AM' gleich $H - \alpha$, und die positiven Bögen, die ihren Endpunkt in M und M' haben, sind in folgenden zwei Reihen enthalten:

$$\alpha,\ 2H + \alpha,\ 4H + \alpha,\ 6H + \alpha, \text{ u. s. f.}$$
$$H - \alpha,\ 3H - \alpha,\ 5H - \alpha,\ 7H - \alpha, \text{ u. s. f.}$$

Es ist ferner $AB'A'M = 2H - \alpha$, und $AB'A'M' = H + \alpha$. Fügt man zu diesen Bögen eine beliebige Anzahl von Kreisumfängen, und nimmt hierauf die sich ergebenden Bögen negativ, so hat man alle negativen Bögen, die dem gegebenen Sinus entsprechen, nämlich:

$$-2H + \alpha,\ -4H + \alpha,\ -6H + \alpha, \text{ u. s. f.}$$
$$-H - \alpha,\ -3H - \alpha,\ -5H - \alpha, \text{ u. s. f.}$$

Die Bögen dieser vier Reihen lassen sich in zwei ziemlich einfache Formeln bringen. In zwei dieser Reihen ist nämlich der Bogen $\alpha$ zu allen geraden Vielfachen sowohl der negativen als der positiven H addirt, und in den zwei andern von den ungeraden Vielfachen von H subtrahirt. Bezeichnet man also eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, die sogar gleich Null sein kann, mit k, so lassen sich alle gesuchten Bögen durch folgende Formeln darstellen:

[1] $x = 2kH + \alpha$, $x = (2k + 1)H - \alpha$.

Wir haben a positiv angenommen; hätte man $\sin x = -a$, so müßte man a auf OQ', auf der Seite von OB' antragen. Dann endigen sich die Bögen, welche die Werthe von x ausdrücken, in N' und N. Setzt man $ABN' = \alpha$, so ist offenbar $ABN = 3H - \alpha$, $AB'N' = 2H - \alpha$, und $AN = \alpha - H$. Demnach sind sowohl die negativen als positiven Werthe von x, die dem Sinus OQ' entsprechen, folgende:

$\alpha$, $2H+\alpha$, $4H+\alpha$, u. s. f. $3H-\alpha$, $5H-\alpha$, $7H-\alpha$, u. s. f.
$-2H+\alpha$, $-4H+\alpha$, $-6H+\alpha$, u. s. f. $H-\alpha$, $-H-\alpha$, $-3H-\alpha$, u. s. f.

und es ist klar, daß auch diese in den Formeln [1] noch enthalten sind.

**15.** Es sei gegeben $\cos x = a$. Ist a positiv, so nimmt man $OP = a$ auf OA, und errichtet im Punkte P die Senkrechte MN; dann drücken die verschiedenen positiven und negativen Bögen, die sich in M und N endigen, die Werthe von x aus. Setzt man $AM = \alpha$, so sieht man leicht, daß diese Bögen in den vier Reihen enthalten sind:

$\alpha$, $2H+\alpha$, $4H+\alpha$, u. s. f. $2H-\alpha$, $4H-\alpha$, $6H-\alpha$, u. s. f.
$-\alpha$, $-2H-\alpha$, $-4H-\alpha$, u. s. f. $-2H+\alpha$, $-4H+\alpha$, $-6H+\alpha$, u. s. f.

und wenn man eine beliebige positive oder negative ganze Zahl mit k bezeichnet, so lassen sich alle diese Bögen durch die beiden Formeln ausdrücken

[2] $x = 2kH + \alpha$, $x = 2KH - \alpha$.

Ist $\cos x = -a$ gegeben, so trägt man a auf OA' an; dann bezeichnet $\alpha$ den Bogen AMM', und das Vorige bleibt unverändert. Wenn a über den Halbmesser hinausgeht, so ist der Bogen x imaginär.

**16.** Es sei noch $\tang x = a$. Ist a positiv, so errichte man die Tangente $AT = a$ über OA und ziehe die Gerade TMN', die durch den Mittelpunkt geht und den Kreis in M und N' schneidet; dann sind die Werthe von x die positiven und negativen Bögen, die sich in M und N' endigen. Setzt man den Bogen $AM = \alpha$, so hat man $AMN' = H + \alpha$, $AN'M = 2H - \alpha$, $AN' = H - \alpha$, und die gesuchten Bögen geben folgende Reihen:

$\alpha$, $2H+\alpha$, $4H+\alpha$, u. s. f. $H+\alpha$, $3H+\alpha$, $5H+\alpha$, u. s. f.
$-2H+\alpha$, $-4H+\alpha$, $-6H+\alpha$, u. s. f. $-H+\alpha$, $-3H+\alpha$, $-5H+\alpha$, u. s. f.

In diesen vier Reihen ist der Bogen $\alpha$ zu allen Vielfachen der positiven und negativen H addirt, also ist die allgemeine Formel der gesuchten Bögen

[3] $$x = kH + \alpha.$$

Ist die gegebene Tangente negativ, so trägt man sie auf AT', unterhalb OA an; dann stellt $\alpha$ einen Bogen zwischen $90^0$ und $180^0$ vor, wie ABM'. Dabei ist klar, daß die Tangente jede beliebige Größe haben kann.

**17.** Ohne die Fälle näher zu untersuchen, wo der Bogen durch eine der andern trigonometrischen Linien gegeben ist, sieht man leicht ein, daß die Bögen, welche denselben Sinus; oder Cosinus, oder dieselbe Tangente haben, auch dieselbe Cosecante, oder Secante oder Cotangente haben; dieß wird sich auch später (Nro. 20) zeigen, wenn die Beziehungen der trigonometrischen Linien unter einander bestimmt sind. Daraus folgt, daß die Formeln [1, 2, 3] auch vorkommen müssen, wenn cosec x, sec x oder cot x gegeben ist.

Nicht zu vergessen ist, daß in diesen Formeln $\alpha$ immer den der gegebenen Linie entsprechenden kleinsten Bogen zwischen 0 und $360^0$, H die halbe Kreislinie, und k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, die auch Null sein kann, bezeichnet.

### Zurückführung der Sinus, Cosinus u. s. w. auf einfache Verhältnisse.

**18.** Wenn in der Trigonometrie ein Bogen blos als Maß eines Winkels vorkommt, so betrachtet man nicht die absolute Größe desselben, sondern nur sein Verhältniß zu der Kreislinie, von welcher er ein Theil ist. Dieses Verhältniß wird nun eben durch die Zahl der Bogengrade angezeigt, und es ist klar, daß dieß zur Bestimmung eines Winkels genügt; denn alle Bögen, die zwischen demselben Winkel enthalten sind und aus seiner Spitze als Mittelpunkt beschrieben werden, haben eine gleiche Anzahl Grade, wie groß sonst auch die Halbmesser dieser Bögen sein mögen.

Die Verhältnisse, welche zwischen den trigonometrischen Linien dieser Bögen und den Halbmessern der zugehörigen Kreise stattfinden, hängen ebenfalls nur von dieser Anzahl Grade ab. Z. B. in Fig. 3, wo MP, M'P', M''P'' Sinus ähnlicher Bögen sind, ist $\frac{MP}{OM} = \frac{M'P'}{OM} = \frac{M''P''}{OM''} \cdots$, und diese Verhältnisse, nicht die Sinus, werden durch einen gegebenen Winkel bestimmt. Dasselbe läßt sich von den Cosinus, Tangenten u. s. w. sagen. Man ersieht daraus, daß nicht die absoluten Längen der trigonometrischen Linien, sondern nur ihre Verhältnisse zum Halbmesser in Berechnung kommen dürfen. Die Einführung dieser Verhältnisse ist sehr einfach; man nimmt nämlich den Halbmesser des Kreises, in welchem die trigonometrischen Linien betrachtet werden, als Einheit an; dann drücken die numerischen Werthe dieser Linien diese Verhältnisse von selbst aus. Als solche führen sie zuweilen den Namen *natürlicher Sinus, Cosinus* u. s. w.

So sind also die trigonometrischen Linien nichts weiter als bloße Verhältnisse,

und man sollte sie eigentlich gleich von Anfang von diesem Gesichtspunkte aus darstellen; um jedoch an der gewöhnlichen Behandlungsweise nichts zu ändern, soll in den Fundamentalformeln keine weitere Voraussetzung in Betreff des Halbmessers eintreten, und derselbe immer durch r bezeichnet werden.

**19.** Wenn übrigens in einer Berechnung der Halbmesser als Einheit angenommen wird, so lassen sich die Resultate immer leicht so umformen, daß sie für jede andere Voraussetzung anwendbar sind. Denn aus dem eben Gesagten ergibt sich, daß die Verhältnisse der Sinus, Cosinus u. s. w. zum Halbmesser, wie sie sich aus der zweiten Betrachtungsweise ergeben, den Sinus, Cosinus u. s. w. nach der ersten Betrachtungsweise gleich sind; folglich darf man in den betreffenden Resultaten diese Größen, wie sin a, tang a u. s. w. nur in $\frac{\sin a}{r}$, $\frac{\text{tang } a}{r}$ ꝛc. verwandeln. Angenommen, man habe z. B. zwischen den Bogen a und b zuerst die Gleichung gefunden

$$\text{tang } b = \frac{1 - \cos a}{1 + \sin a};$$ so geben diese Substitutionen

$$\frac{\text{tang } b}{r} = \frac{1 - \frac{\cos a}{r}}{1 + \frac{\sin a}{r}}$$

und durch Reduction erhält man, ohne weitere Voraussetzung für den Halbmesser r,

$$\text{tang } b = \frac{r\,(r - \cos a)}{r + \sin a}.$$

Man muß sich besonders hüten zu glauben, es gebe eine absolute Länge für den Halbmesser 1, und eine andere für den Halbmesser r, sowie es Längen von 1 Schuh, 2 Schuh u. s. w. gibt: Der Halbmesser bleibt durchaus unbestimmt. Zwar wird jede trigonometrische Linie eines gegebenen Winkels je nach der Annahme für den Halbmesser durch verschiedene Zahlen ausgedrückt, aber diese Zahlen haben immer dasselbe Verhältniß zu der, welche den Halbmesser darstellt, und nur dieses Verhältniß kommt in Rechnung.

## Beziehungen oder Relationen der trigonometrischen Linien unter sich.

**20.** Die Relationen der sechs trigonometrischen Linien unter sich ergeben sich aus den Dreiecken in Fig. 1.
Erstens hat man, da das Dreieck OMP rechtwinklig ist,

$$MP^2 + OP^2 = OM^2;$$

zweitens geben die ähnlichen Dreiecke OMP und OAT:

$$AT : MP = AO : OP, \text{ und } OT : OM = OA : OP,$$

und drittens erhält man aus den Dreiecken OMQ und OSB:

$$BS : QM = OB : OQ, \text{ und } OS : OM = OB : OQ.$$

Man setze den Bogen AM = a, den Halbmesser OM = r, und ersetze diese Linien durch ihre trigonometrischen Bezeichnungen, nämlich MP durch sin a, OP durch cos a, u. s. w.; so erhält man für die 5 vorigen Relationen folgende:

$$[1] \quad \sin^2 a + \cos^2 a = r^2,$$

$$[2] \quad \text{tang } a = \frac{r \sin a}{\cos a}, \qquad [3] \quad \sec a = \frac{r^2}{\cos a},$$

$$[4] \quad \cot a = \frac{r \cos a}{\sin a}, \qquad [5] \quad \text{cosec } a = \frac{r^2}{\sin a}.$$

Die Gleichung [1] dient dazu, den Sinus mittelst des Cosinus zu finden, und umgekehrt. Ist sin a gegeben, so erhält man $\cos a = \pm\sqrt{r^2 - \sin^2 a}$. Man hat hier zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen, weil einem und demselben Sinus, z. B. OQ, zwei gleiche Cosinus von entgegengesetzter Lage, OP und OP', entsprechen.

Die Formeln [2, 3, 4, 5] geben die Werthe für die Tangente, Secante u. s. w., wenn die für den Sinus und Cosinus bekannt sind.

**21.** Um eine Anwendung zu machen, nehmen wir den in Nro. 4 gefundenen Werth $\sin 30^0 = \frac{1}{2}r$. Mittelst dieses Werthes ist es leicht, zuerst den Cosinus von $30^0$, dann die Tangente, Secante u. s. w. zu berechnen. Indem man berücksichtigt, daß $60^0$ das Complement von $30^0$ ist, erhält man folgende Gleichungen:

$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{r}{2}, \qquad \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tang } 30^0 = \cot 60^0 = \frac{r\sqrt{3}}{3}, \qquad \cot 30^0 = \text{tang } 60^0 = r\sqrt{3},$$

$$\sec 30^0 = \text{cosec } 60^0 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{cosec } 30^0 = \sec 60^0 = 2r.$$

**22.** Obgleich die Formeln in Nro. 20 aus einer Figur abgeleitet sind, in welcher der Bogen $a < 90^0$ ist, so sind sie deßhalb doch nicht weniger allgemein. Dieß würde sich schon ergeben, wenn man nur die absoluten Werthe der trigonometrischen Linien betrachtete; denn diese Linien bilden immer rechtwinklige und ähnliche Dreiecke, aus denen man dieselben Resultate wie in Nro. 20 gewinnen kann. Vorerst ist klar, daß die Formel [1] mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen immer ihre Geltung hat, da nur Quadrate in ihr vorkommen; es ist also nur noch zu untersuchen, ob in den andern Formeln die Tangente, Secante u. s. w. immer das ihrer Lage entsprechende Vorzeichen annehmen.

In dem ersten Quadranten, d. h. von 0 bis $90^0$, wo der Sinus und Cosinus positiv ist, geben die vier Formeln [2, 3, 4, 5] natürlich positive

Werthe. Im zweiten Quadranten ist der Sinus positiv und der Cosinus negativ; deßhalb sind die Werthe der Tangente, Secante und Cotangente negativ, während der für die Cosecante positiv bleibt, und die Figur zeigt, daß dieß wirklich die Vorzeichen sind, welche diesen Linien zukommen. Im dritten Quadranten ist der Sinus und der Cosinus negativ; deßwegen sind die Werthe [2, 4] positiv, während die Werthe [3 und 5] negativ sind, und dieß muß auch nach der Lage, welche diese vier Linien dann einnehmen, der Fall sein. Im vierten Quadranten, wo der Sinus negativ, der Cosinus positiv ist, sind die Werthe [2, 4, 5] negativ, während der Werth [3] positiv ist, was der Figur gemäß wieder der Fall sein muß.

Ueber $360^0$ hinaus erhält der Sinus wie der Cosinus für einen beliebigen Bogen von $360^0 + a$ dieselbe Größe und dasselbe Vorzeichen, wie für den Bogen a; die vier Formeln geben also auch dieselben Resultate, und wirklich muß auch die Tangente, Secante u. s. w. für den Bogen $360^0 + a$ die nämlichen Werthe haben, wie für den Bogen a.

Nehmen wir nun an, die Bögen seien negativ. Da $\sin(-a) = -\sin a$ und $\cos(-a) = \cos a$ (Nro. 11), so folgt daraus, wenn man das Vorzeichen des Bogens ändert, daß die für die Tangente, Cotangente und Cosecante in den Formeln gegebenen Werthe entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, ohne ihre Größe zu verändern, während die Secante ganz unverändert bleibt.

Endlich könnte man, genau genommen, befürchten, die Formeln seien nicht richtig für die Bögen von 0, $90^0$, $180^0$ u. s. w., weil dann die Dreiecke verschwinden. Aber es ist leicht einzusehen, daß sie auch hier die diesen Bögen zukommenden Resultate geben. Setzt man z. B. $a = 90^0$, so erhält man $\sin 90^0 = r$, $\cos 90^0 = 0$; mithin $\tang 90^0 = \infty$, $\sec 90^0 = \infty$, $\cot 90^0 = 0$, $\operatorname{cosec} 90^0 = r$, welches wirklich die richtigen Werthe sind. Zu bemerken ist noch, daß der Werth für $\tang 90^0 = \infty$ mit dem doppelten Vorzeichen $\pm$ genommen werden muß; denn er ist zugleich die Grenze für die positiven Tangenten, die man erhält, indem man den Bogen von 0 bis $90^0$ wachsen läßt, und die Grenze der negativen Tangenten, die man erhält, indem man ihn von $180^0$ bis $90^0$ abnehmen läßt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die andern trigonometrischen Linien, welche unendlich groß werden können.

Somit ist die Allgemeinheit der fünf Formeln unbeschränkt giltig.

**23.** Es hätte genügt, die Allgemeinheit der Formeln [2 und 3] zu beweisen, um daraus die von [4 und 5] zu folgern; denn diese lassen sich aus den ersten ableiten, indem man darin $90^0 - a$ für a setzt. Ueberhaupt, wenn zwischen den geometrischen Linien einmal eine Relation für alle möglichen Werthe der Bögen erwiesen worden ist, so ist es immer erlaubt, diese Bögen durch ihre Complemente zu ersetzen, d. h. die Sinus, Tangenten, Secanten in Cosinus, Cotangenten, Cosecanten zu verwandeln, und umgekehrt.

**24.** Die fünf Gleichungen [1 bis 5] können auch dazu dienen, noch andere zu finden. Wir wollen die wichtigsten angeben.

1) Wenn man die Formeln [2 und 4] mit einander multiplicirt, so erhält man

[6] $$\text{tang } a \times \cot a = r^2.$$

Das heißt, der Halbmesser ist die mittlere Proportionale zwischen der Tangente und Cotangente. Dieses Resultat ließe sich auch aus den ähnlichen Dreiecken OTA und OSB unmittelbar ableiten.

2) Die Formel [2] gibt

$$r^2 + \text{tang}^2 a = r^2 + \frac{r^2 \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{r^2 (\sin^2 a + \cos^2 a)}{\cos^2 a}.$$

Aber $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, und $\sec^2 a = \frac{r^4}{\cos^2 a}$; daher ist

[7] $$r^2 + \text{tang}^2 a = \sec^2 a,$$

welche Formel auch unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreieck OTA hervorgeht. Auf ähnliche Weise findet man folgende andere Formel:

[8] $$r^2 + \cot^2 a = \text{cosec}^2 a,$$

welche unmittelbar aus der vorigen sich ergibt, wenn man $90^0 - a$ für a setzt.

3) Aus den Formeln [3 und 5] erhält man

$$\frac{1}{\sec a} = \frac{\cos a}{r^2}, \quad \frac{1}{\text{cosec } a} = \frac{\sin a}{r^2};$$

folglich, wenn man die Quadrate davon addirt und darauf Bedacht nimmt, daß $\cos^2 a + \sin^2 a = r^2$, erhält man

[9] $$\frac{1}{\sec^2 a} + \frac{1}{\text{cosec}^2 a} = \frac{1}{r^2}.$$

**25.** Ueberhaupt lassen sich, wenn eine der sechs trigonometrischen Linien gegeben ist, mittelst der fünf Relationen (1, 2, 3, 4, 5] die fünf andern Linien durch eine einfache Auflösung von Gleichungen finden.

Wenn man z. B. den Sinus und den Cosinus mittelst der Tangente finden will, so nimmt man die Gleichungen [1 und 2]

$$\sin^2 a + \cos^2 a = r^2, \quad \text{tang } a = \frac{r \sin a}{\cos a},$$

und kann daraus die Werthe für sin a und cos a finden. Die zweite gibt $r^2 \sin^2 a = \text{tang}^2 a \cos^2 a$; dann ergibt sich mittelst der ersten leicht:

[10] $$\sin a = \frac{\pm r \text{ tang } a}{\sqrt{r^2 + \text{tang}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{\pm r^2}{\sqrt{r^2 + \text{tang}^2 a}}.$$

Das doppelte Vorzeichen $\pm$ deutet an, daß es zwei gleiche und entgegengesetzte Sinus und Cosinus gibt, die derselben Tangente entsprechen, was auch die Figur zeigt. Man muß genau darauf achten, daß man die oberen Vorzeichen zusammen nimmt, und ebenso die untern, sonst würde man nicht wieder $\frac{r \sin a}{\cos a} = \text{tang } a$ bekommen.

### Formeln für den Sinus und Cosinus von a + b und a — b.

**26.** Aufgabe: Die Sinus und Cosinus zweier Bögen a und b sind gegeben, man soll den Sinus und Cosinus ihrer Summe und Differenz finden.

Es sei (Fig. 4) der Bogen AB = a, und BC = BD = b: man ziehe die Sehne CD und den Halbmesser OB, der senkrecht durch ihren Halbirungspunkt Q geht; auch ziehe man den Halbmesser OA, und fälle die Senkrechten BP, CR, DS. Nun ist

BP = sin a, OP = cos a, CQ = sin b, OQ = cos b,
AC = a+b, CR = sin (a+b), OR = cos (a+b),
AD = a—b, DS = sin (a—b), OS = cos (a—b).

Man ziehe noch QE senkrecht auf OA, ferner QF und DG parallel mit OA. Die Dreiecke CQF und QDG sind congruent, da sie gleiche Winkel und eine gleiche Seite QC = QD haben, also ist DG = QF und GQ = CF. Nach diesem hat man offenbar

sin (a + b) = CR = FR + CF = QE + CF,
cos (a + b) = OR = OE — ER = OE — QF,
sin (a — b) = DS = QE — QG = QE — CF,
cos (a — b) = OS = OE + GD = OE + QF.

Nun ist das Dreieck OBP sowohl mit OQE wegen der Parallelen BP und QE, als auch mit CQF ähnlich, wegen der senkrecht auf einander stehenden Seiten; folglich hat man

QE : BP = OQ : OB oder QE : sin a = cos b : r,
OE : OP = OQ : OB oder OE : cos a = cos b : r,
CF : OP = CQ : OB oder CF : cos a = sin b : r,
QF : BP = CQ : OB oder QF : sin a = sin b : r.

Aus diesen Proportionen erhält man:

$$QE = \frac{\sin a \cos b}{r}, \quad OE = \frac{\cos a \cos b}{r},$$

$$CF = \frac{\cos a \sin b}{r}, \quad QF = \frac{\sin a \sin b}{r},$$

und indem man diese Werthe in sin (a+b) u. s. w. substituirt, ergibt sich:

[1] $$\sin (a + b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{r},$$

[2] $$\cos (a + b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r},$$

[3] $$\sin (a - b) = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{r},$$

[4] $$\cos (a - b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{r}.$$

**27.** In der hier gebrauchten Figur scheinen diese Formeln gewissen Beschränkungen unterworfen zu sein; denn sie setzt voraus, daß a und b positive Bögen sind, daß ihre Summe $a + b < 90^0$, und daß sogar in den auf $a - b$ sich beziehenden Formeln a größer ist als b. Man kann nun zwar leicht die Constructionen für die andern Fälle umändern; aber dieser Fälle gibt es viele, und die Untersuchung, ob diese Formeln allgemein sind, wäre auf diesem Wege sehr umständlich. Folgender ist vorzuziehen.

1) Die Beschränkung, daß $a > b$, kann durch die Formeln [3 und 4] beseitigt werden. Denn wenn $a < b$, so hat man nach Nro. 11:
$\sin(a - b) = -\sin(b - a)$ und $\cos(a - b) = \cos(b - a)$.
Wenn nun b größer ist als a, so kann man $\sin(b - a)$ und $\cos(b - a)$ aus den Formeln [3 und 4] erhalten, indem man darin a in b und b in a verwandelt; nun ist klar, daß dann bloß die erste ihr Vorzeichen verändert, während die zweite dieselbe bleibt. Man hat also für $\sin(a - b)$ und $\cos(a - b)$ wieder dieselben Formeln, wie für den Fall, wo a größer ist als b. Somit gelten diese vier Formeln für alle Fälle, wo a und b positiv sind und ihre Summe $a + b < 90^0$ ist; und man darf daher für jeden dieser Bögen beliebige Werthe zwischen 0 und $45^0$ annehmen.

2) Da sich die auf die Differenz $a - b$ bezüglichen Formeln aus denen für $\sin(a + b)$ und $\cos(a + b)$ ableiten lassen, indem man b in $-b$ verwandelt, so folgt daraus, daß die Formeln [1 und 2] für alle Werthe von a zwischen 0 und 45, und für alle Werthe von b zwischen $-45^0$ und $+45^0$ gelten. Nun läßt sich nachweisen, daß dieselben Formeln auch für die negativen Werthe von a, zwischen 0 und $-45$, Geltung haben.

Angenommen, $\alpha$ sei $< 45^0$, und man habe $a = -\alpha$, so hat man

$$\sin(a + b) = \sin(-\alpha + b) = -\sin(\alpha - b)$$
$$\cos(a + b) = \cos(-\alpha + b) = \cos(\alpha - b).$$

Die Bögen $\alpha$ und $-b$ befinden sich aber innerhalb der Grenzen, für welche die Formeln [1 und 2] bewiesen wurden; also ist

$$\sin(a + b) = -\sin(\alpha - b) = \frac{-\sin\alpha\cos b + \cos\alpha\sin b}{r},$$

$$\cos(a + b) = \cos(\alpha - b) = \frac{\cos\alpha\cos b + \sin\alpha\sin b}{r}.$$

Da nun $a = -\alpha$, so hat man (Nro. 11) $\sin\alpha = -\sin a$, $\cos\alpha = \cos a$; folglich kommen diese Formeln wieder auf die von [1 und 2] zurück.

3) Wir wollen nun zeigen, daß man in den Formeln [1 und 2] die positiven und negativen Grenzen von a und b beliebig erweitern kann. Man setze $a = 90^0 + \alpha$, wo $\alpha$ ein beliebiger Bogen zwischen $-45^0$ und $+45^0$ ist, so erhält man, indem man die Complemente nimmt,

$$\sin(a+b) = \sin(90^0+\alpha+b) = \cos(-\alpha-b) = \cos(\alpha+b) = \frac{\cos\alpha\cos b - \sin\alpha\sin b}{r},$$

$$\cos(a+b) = \cos(90^0+\alpha+b) = \sin(-\alpha-b) = -\sin(\alpha+b) = \frac{-\sin\alpha\cos b - \cos\alpha\sin b}{r}.$$

Aber mittelst bekannter Reductionen hat man

$$\sin a = \sin(90^0+\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos a = \cos(90^0+\alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Also kann man $\cos\alpha$ durch $\sin a$ und $\sin\alpha$ durch $-\cos a$ ersetzen, wodurch sich wieder die Formeln [1 und 2] ergeben. Nimmt man nun $\alpha$ zwischen $-45^0$ und $+45^0$, so geht der Bogen a oder $90^0+\alpha$ durch alle Werthe von $45^0$ bis $135^0$; also ist die positive Grenze von a bis auf $135^0$ erweitert. Durch Wiederholung desselben Verfahrens läßt sich diese Grenze noch um $90^0$ hinausrücken, und so fort bis ins Unendliche.

Die vorhin (2) abgeleitete Folgerung, daß die Formeln [1 und 2], welche für positive Werthe von a, die kleiner als $45^0$ sind, gelten, auch für dieselben negativen Werthe richtig sind, läßt sich offenbar auch auf den Fall anwenden, wo die positive Grenze von a eine andere als $45^0$ ist. Da man nun eben gefunden hat, daß sie für alle positiven Werthe von a Geltung haben, so müssen sie auch für alle negativen Werthe richtig sein.

In Betreff des Bogens b müssen sich natürlich dieselben Folgerungen wie für a ziehen lassen, und man kann ebenfalls jede seiner Grenzen bis ins Unendliche erweitern; mithin sind die Formeln [1 und 2], und folglich auch die Formeln [3 und 4] für alle Werthe der Bögen a und b erwiesen.

## Formeln für die Vielfache und Theile von Bögen.

**28.** Von nun an sei immer der Halbmesser $r = 1$, so daß die Sinus, Cosinus ꝛc. nur noch als einfache Verhältnißzahlen zu betrachten sind, wie es in Nro. 18 erklärt wurde. Durch diese Annahme erhält man für die Formeln in Nro. 20 und 26 folgende:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1;$$
$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}, \qquad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a};$$
$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \qquad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a};$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b;$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

**29.** Dieß vorausgesetzt, setze man in den Ausdrücken $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ noch $a = b$, so erhält man

[1] $\sin 2a = 2\sin a \cos a$,
[2] $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$;

welche Formeln zur Berechnung des Sinus und Cosinus des doppelten Bogens dienen, wenn man den Sinus und Cosinus des einfachen Bogens kennt.

**30.** Es sei $b = 2a$, so geben dieselben Ausdrücke zuerst

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a;$$

dann, indem man für sin 2a und cos 2a ihre Werthe setzt, und die Resultate mittelst der Gleichung $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ vereinfacht, erhält man

[3] $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$
[4] $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

Auf dieselbe Weise fortfahrend, gelangt man zu den Vielfachen 4a, 5a u. s. f. Uebrigens gibt es für die Vielfache der Bögen allgemeine Formeln, die man im III. Kapitel finden wird.

**31.** Um die Formeln für Theile von Bögen zu finden, suchen wir zuerst den Sinus und Cosinus eines halben Bogens. Man setze für a in den Formeln [1 und 2] $\frac{1}{2}a$, so erhält man

[5] $2\sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a = \sin a$,
[6] $\cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a = \cos a$,

und überdieß hat man auch

[7] $\cos^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}a = 1$.

Ist cos a gegeben, so darf man nur die Gleichungen [6 und 7] auflösen. Wenn man die erste von der zweiten abzieht, und für den zweiten Fall zusammen addirt, so ergibt sich leicht

[8] $$\sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \quad \cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}.$$

Diese Formeln dienen also, wenn cos a gegeben ist, zur Berechnung von $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$. Dabei ist zu beachten, daß man das Wurzelzeichen mit dem Vorzeichen $\pm$ behaftet betrachten muß.

Der Grund, warum man so für jeden der unbekannten $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$ zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen erhält, ist leicht einzusehen. Vorerst ist zu bemerken, daß nicht der Bogen a selbst in diesen Werthen vorkommt, sondern nur dessen Cosinus; so daß sich daraus zugleich der Sinus und der Cosinus von der Hälfte aller Bögen ergibt, die denselben Cosinus haben. Nach Nro. 15 werden diese Bögen durch die Formel ausgedrückt:

$$x = 2kH \pm \alpha,$$

in welcher $\alpha$ den kleinsten positiven, dem gegebenen Cosinus entsprechenden Bogen, H den Halbkreis und k eine beliebige ganze negative oder positive

Zahl bezeichnet. Die Werthe für $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$ müssen also enthalten sein in

$$\sin (kH \pm \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ und } \cos (kH \pm \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Ist k eine gerade Zahl, so ist kH ein Vielfaches von 360°, und man kann es weglassen, ohne daß sich der Sinus oder der Cosinus ändert (Nro. 10), so daß man erhält

$$\sin (\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha \text{ und } \cos (\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Ist k ungerade, so kann man wieder kH weglassen, aber dann müssen die Vorzeichen des Sinus und Cosinus verändert werden (Nro. 10), und es ergibt sich

$$-\sin (\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = \mp \sin \tfrac{1}{2}\alpha \text{ und } -\cos (\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = -\cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Es müssen sich also wirklich für $\sin \frac{1}{2}a$, sowie für $\cos \frac{1}{2}a$ zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen ergeben.

**32.** Wenn anstatt des Cosinus der Sinus gegeben wäre, so dürfte man für cos a in den Formeln [8] nur seinen Werth $\sqrt{1 - \sin^2 a}$ setzen, und da dieser neue Wurzelwerth auch das doppelte Vorzeichen $\pm$ bei sich hat, so hätte man für jeden der unbekannten $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$ vier Werthe.

Man kann indessen diese Werthe auch in einer andern Form erhalten. Man nehme die Gleichungen [5 und 7]

$$2 \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a = \sin a,$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a + \sin^2 \tfrac{1}{2}a = 1;$$

und ziehe daraus die Werthe für $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$. Indem man zuerst beide Gleichungen addirt, dann wieder die erste von der zweiten subtrahirt, und hierauf aus beiden Resultaten die Quadratwurzel zieht, erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2}a + \sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{1 + \sin a},$$
$$\cos \tfrac{1}{2}a - \sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{1 - \sin a};$$

woraus sich die gesuchten Werthe leicht ergeben, nämlich:

[9] $$\sin \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sin a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \sin a},$$

[10] $$\cos \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sin a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \sin a}.$$

Wegen der zwei Wurzelzeichen hat jeder dieser Ausdrücke vier Werthe. Um den Grund hievon a priori nachzuweisen, beachte man, daß sie den Sinus und den Cosinus der Hälfte aller Bögen, die denselben Sinus haben, enthalten müssen; nun ergeben sich (Nro. 14) diese Bögen aus den Formeln:

$$x = 2kH + \alpha, \quad x = (2k + 1)\,H - \alpha;$$

also müssen die Ausdrücke für $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$ den Sinus und Cosinus der Bögen geben, welche dargestellt sind durch

$$kH + \tfrac{1}{2}\alpha \text{ und } (k + \tfrac{1}{2})\,H - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Man kann aber kH weglassen, wenn man auf die Beibehaltung oder Veränderung der Vorzeichen des Sinus und Cosinus, je nachdem k eine gerade

oder ungerade Zahl ist, Rücksicht nimmt. Folglich muß man für sin $\frac{1}{2}a$, und ebenso für cos $\frac{1}{2}a$, vier Werthe erhalten, nämlich:

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha \text{ und } \sin \tfrac{1}{2}a = \pm \sin (\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}\alpha),$$
$$\cos \tfrac{1}{2}a = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha \text{ und } \cos \tfrac{1}{2}a = \pm \cos (\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Man sieht ferner, daß je zwei einander gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist $\alpha = 90^0$, so hat man $\frac{1}{2}\alpha = 45^0$, $\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}\alpha = 45^0$, und die vier Werthe sind dann auf zwei reducirt.

Da ferner $H = 180^0$ ist, so müssen die beiden Bögen $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}\alpha$ Complemente von einander sein, und folglich die vorigen Werthe folgendermaßen sich darstellen lassen:

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin \tfrac{1}{2}a = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha;$$
$$\cos \tfrac{1}{2}a = \pm \cos \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos \tfrac{1}{2}a = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

d. h. die Werthe für sin $\frac{1}{2}a$ sind dieselben, wie für cos $\frac{1}{2}a$; was auch die Formeln [9 und 10] andeuten.

Es bleibt nun noch eine Schwierigkeit zu beseitigen: nämlich zu wissen, wenn man den Bogen a und seinen Sinus kennt, welcher der vier Werthe für sin $\frac{1}{2}a$ oder cos $\frac{1}{2}a$ gewählt werden soll, denn es ist klar, daß nur einer genommen werden darf. Der Kürze wegen wollen wir nur sin $\frac{1}{2}a$ betrachten; indem man die Wurzelwerthe mit ihren verschiedenen Vorzeichen nimmt, lassen sich die vier Werthe auf folgende Weise schreiben:

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \pm \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a}\right),$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a = \pm \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin a} + \sqrt{1 - \sin a}\right).$$

Vorerst ist klar, daß die beiden ersten Werthe einander gleich sind, und entgegengesetzte Vorzeichen haben; dasselbe ist auch bei den beiden letzten der Fall. Wenn man ferner das Quadrat der ersten nimmt, so ist dieses $< \frac{1}{2}$, während das der andern $> \frac{1}{2}$ ist; nun weiß man aber (Nro. 8), daß $\sin^2 45^0 = \cos^2 45^0 = \frac{1}{2}$ ist; die beiden ersten Werthe müssen also, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, kleiner sein als sin $45^0$, und die beiden letzten sind größer.

Aber auf der andern Seite ist es immer leicht, wenn ein Bogen gegeben ist, zum Voraus zu bestimmen, ob der Sinus seiner Hälfte positiv oder negativ ist, und ob er größer oder kleiner als der von $45^0$ sein muß. So fällt jede Unbestimmtheit weg, und dieselben Folgerungen lassen sich auch auf den Cosinus anwenden.

Es sei z. B. $a < 90^0$, so muß sin $\frac{1}{2}a$ positiv und kleiner als sin $45^0$ sein, und cos $\frac{1}{2}a$ muß ebenfalls positiv, aber größer als cos $45^0$ sein; folglich muß man die Werthe [9 und 10] mit den sich hier ergebenden Vorzeichen nehmen.

Diese Formeln entsprechen, wie man sieht, zunächst Bögen, die kleiner sind als $90^0$; dasselbe ist bei allen trigonometrischen Formeln der Fall, da solche am meisten in Anwendung kommen.

**33.** Um auf die Theilung der Bögen in 3 Theile überzugehen, verwandle man a in $\frac{1}{3}a$, so ergeben die Formeln [3 und 4] in Nro. 30

$$\sin a = 3\sin\tfrac{1}{3}a - 4\sin^3\tfrac{1}{3}a$$
$$\cos a = 4\cos^3\tfrac{1}{3}a - 3\cos\tfrac{1}{3}a.$$

Es sei z. B. cos a gegeben, und cos $\frac{1}{3}a$ zu finden, so setze man cos a $= b$, cos $\frac{1}{3}a = z$; dann verwandelt sich die zweite Gleichung in

$$[11] \qquad z^3 - \tfrac{3}{4}z - \tfrac{1}{4}b = 0.$$

Dieß ist also die aufzulösende Gleichung, um cos $\frac{1}{3}a$ zu finden. Ohne in eine algebraische Erörterung einzugehen, möge hier nur a priori gezeigt werden, daß ihre drei Wurzelwerthe reell sind.

Da hier ein Cosinus gegeben, und die Formel für die Bögen, welche diesem Cosinus entsprechen, $2kH + \alpha$ ist (Nro. 15), so enthält die Gleichung [11] als Wurzeln alle Werthe, welche in dem Ausdruck

$$z = \cos\frac{2kH \pm \alpha}{3}$$

enthalten sind. Die ganze Zahl k kann nur eine der drei Formen 3n, $3n + 1$, $3n - 1$ haben (wo n ebenfalls eine ganze Zahl ist); macht man also nach einander $k = 3n$, $k = 3n + 1$, $k = 3n - 1$, so erhält man mit Weglassung der unnöthigen Kreisumfänge,

$$z = \cos\frac{3n.2H \pm \alpha}{3} = \cos\left(2nH \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\pm\frac{\alpha}{3}\right) = \cos\frac{\alpha}{3},$$

$$z = \cos\frac{(3n+1).2H \pm \alpha}{3} = \cos\left(2nH + \frac{2H}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2H}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$z = \cos\frac{(3n-1).2H \pm \alpha}{3} = \cos\left(-\frac{2H}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2H}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right).$$

Die beiden Werthe der letzten Formel sind dieselben wie die beiden der vorhergehenden; man hat also im Ganzen drei verschiedene Werthe, nämlich:

$$z = \cos\frac{\alpha}{3},\quad z = \cos\left(\frac{2H}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\quad z = \cos\left(\frac{2H}{3} - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Indessen kann es der Fall sein, daß zwei dieser Werthe einander gleich sind: der erste ist z. B. gleich dem dritten, wenn $\alpha = H$ ist.

Wir wollen jedoch in keine weiteren Erörterungen über die Theilung der Bögen eingehen; die vorausgegangenen deuten den Gang, der bei dieser Art von Aufgaben einzuschlagen ist, hinreichend an.

### Formeln für die Tangenten.

**34.** Stellen wir uns zuerst die Aufgabe, die Tangente der Summe oder Differenz zweier Bögen zu finden, wenn die Tangenten dieser beiden Bögen gegeben sind.

Nach der zwischen dem Sinus, Cosinus und der Tangente stattfindenden Relation (Nro. 20), hat man

$$\text{tang}\ (a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)},$$

und, indem man für $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ ihre Werthe aus Nro. 28 setzt,

$$\text{tang}\ (a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b};$$

um blos Tangenten zu bekommen, dividire man den Zähler und Nenner durch $\cos a \cos b$, so ist

$$\text{tang}\ (a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}},$$

und da $\frac{\sin a}{\cos a} = \text{tang}\ a$, und $\frac{\sin b}{\cos b} = \text{tang}\ b$, so erhält man

$$[1] \qquad \text{tang}\ (a+b) = \frac{\text{tang}\ a + \text{tang}\ b}{1 - \text{tang}\ a\ \text{tang}\ b}.$$

Auf dieselbe Weise findet man für die Differenz der Bögen:

$$[2] \qquad \text{tang}\ (a-b) = \frac{\text{tang}\ a - \text{tang}\ b}{1 + \text{tang}\ a\ \text{tang}\ b}.$$

**35.** Es sei $b = a$, so erhält man für doppelte Bögen:

$$[3] \qquad \text{tang}\ 2a = \frac{2\,\text{tang}\ a}{1 - \text{tang}^2\ a}.$$

Setzt man $b = 2a$, so würde man tang 3a finden u. s. f.

**36.** Um tang $\frac{1}{2}a$ als eine Function von tang a zu erhalten, verwandle man a in $\frac{1}{2}a$, so gibt die letzte Formel die Gleichung

$$\frac{2\,\text{tang}\ \frac{1}{2}a}{1 - \text{tang}^2\ \frac{1}{2}a} = \text{tang}\ a,$$

welche auf folgende quadratische Gleichung führt:

$$[4] \qquad \text{tang}^2\ \tfrac{1}{2}a + \frac{2}{\text{tang}\ a}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}a - 1 = 0,$$

und aus dieser erhält man

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}a = \frac{1}{\text{tang}\ a}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \text{tang}^2\ a}\right).$$

Da in der Gleichung [4] — 1 der letzte Ausdruck ist, so weiß man schon, ohne die Gleichung aufzulösen, daß die beiden Werthe für tang $\frac{1}{2}a$ zum

Product — 1 geben; wenn also AT und AT′ (Fig. 5) diese Werthe in der ihren Vorzeichen entsprechenden Lage vorstellen, so muß $AT \times AT' = OA^2$ sein; OA ist somit die mittlere Proportionale zwischen AT und AT′. Der Winkel TOT′ ist daher ein rechter, oder was dasselbe ist, der Bogen $MM' = 90^0$. Es ließe sich übrigens leicht aus der Art der Aufgabe selbst erkennen, warum $\text{tang } \frac{1}{2}a$ gerade nur zwei Werthe hat. Diese Untersuchung möge übrigens dem Leser überlassen bleiben, da sie nach dem oben bei ähnlichen Fällen Bemerkten keine Schwierigkeit mehr darbieten kann.

**37.** Folgende Formeln kommen ziemlich häufig vor:

[5] $$\text{tang } \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}},$$

[6] $$\text{tang } \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin a}{1 + \cos a},$$

[7] $$\text{tang } \tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{\sin a}.$$

Sie lassen sich leicht aus schon bekannten Formeln ableiten. Denn man hat offenbar

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \text{ (Nro. 31 [8])},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}a} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} \text{ (Nro. 31 [5, 8])},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \text{ (Nro. 31 [5, 8])}.$$

### Andere häufig gebrauchte Formeln.

**38.** Die Formeln von Nro. 28, welche den Sinus und Cosinus der Summe $a + b$ und der Differenz $a - b$ ausdrücken, führen auf eine große Anzahl Formeln, die in der Astronomie stets angewandt werden. Es mögen hier nur die wichtigsten angeführt werden. Indem man jene Formeln durch Addition und Subtraction in Verbindung bringt, ergeben sich folgende:

$$2\sin a \cos b = \sin (a + b) + \sin (a - b),$$
$$2\cos a \sin b = \sin (a + b) - \sin (a - b),$$
$$2\cos a \cos b = \cos (a - b) + \cos (a + b),$$
$$2\sin a \sin b = \cos (a - b) - \cos (a + b).$$

Sie können dazu dienen, das Product aus einem Sinus und einem Cosinus, oder aus zwei Sinus, oder auch aus zwei Cosinus, in eine Summe oder Differenz zweier trigonometrischer Linien zu verwandeln.

**39.** Bezeichnet man zwei beliebige Bögen mit p und q, und setzt $a + b = p$, und $a - b = q$, so ist $a = \frac{1}{2}(p + q)$, $b = \frac{1}{2}(p - q)$. Setzt man nun diese Werthe in die vorigen Formeln, so ergibt sich, indem man die zweite Seite der Gleichungen voranstellt:

$$\sin p + \sin q = 2\sin \tfrac{1}{2}(p + q) \cos \tfrac{1}{2}(p - q),$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos \tfrac{1}{2}(p + q) \sin \tfrac{1}{2}(p - q),$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos \tfrac{1}{2}(p + q) \cos \tfrac{1}{2}(p - q),$$
$$\cos q - \cos p = 2\sin \tfrac{1}{2}(p + q) \sin \tfrac{1}{2}(p - q),$$

welche Formeln häufig, besonders bei logarithmischen Rechnungen angewendet werden, um eine Summe oder Differenz in ein Product zu verwandeln.

**40.** Endlich erhält man aus den letzten Formeln durch Division, und indem man zugleich darauf Rücksicht nimmt, daß immer

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tang} A = \frac{1}{\cot A},$$

noch folgende, ebenfalls häufig gebrauchte Formeln:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)}{\cos \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p + q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p - q)},$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p + q)}{\cos \frac{1}{2}(p + q)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p + q),$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p - q)}{\sin \frac{1}{2}(p - q)} = \cot \tfrac{1}{2}(p - q),$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p - q)}{\cos \frac{1}{2}(p - q)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q),$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p + q)}{\sin \frac{1}{2}(p + q)} = \cot \tfrac{1}{2}(p + q),$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)}{\sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p + q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p - q)}.$$

Unter diesen Formeln ist besonders die erste bemerkenswerth, die sich so ausdrücken läßt: Die Summe der Sinus zweier Bögen verhält sich zur Differenz dieser Sinus, wie die Tangente der halben Summe dieser Bögen zur Tangente ihrer halben Differenz.

**41.** In mathematischen Werken stößt man oft auf trigonometrische Umformungen, deren Ursprung man nicht kennt; in solchen Fällen ist es am besten, wenn man sie abzuleiten sucht, was gewöhnlich keine Schwierigkeit haben kann. Um z. B. die Gleichung

$$\sin (a + b) \sin (a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

abzuleiten, ſetze man zuerſt für $\sin(a+b)$ und $\sin(a-b)$ ihre Werthe aus Nro. 28, ſo erhält man

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b;$$

dann ſubſtituirt man für $\cos^2 a$ und $\cos^2 b$ noch $1-\sin^2 a$ und $1-\sin^2 b$, ſo erhält man nach der vorgenommenen Reduction die gegebene Gleichung.

Hätte man folgende Gleichung

$$\cos a = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a},$$

ſo würde man für $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$ ſeinen Werth $\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a}$ ſetzen; dann erhielte man für das zweite Glied

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}a}{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}a};$$

nun iſt man aber nach (Nro. 20 und 29) $\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}a = 1$, und $\cos^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}a = \cos a$; folglich wäre der obige Ausdruck auf $\cos a$ zurückgeführt, was zu beweiſen war.

Folgende Umformungen mögen noch zur Uebung dienen:

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b,$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ+a) = \frac{1+\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang} a},$$

$$\cos a = \frac{1}{1+\operatorname{tang} a\operatorname{tang}\frac{1}{2}a},$$

$$\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b},$$

$$\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b+\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a\operatorname{tang} b\operatorname{tang} c.$$

Bei der letzten Formel wird vorausgeſetzt, daß $a+b+c = 180^\circ$, und ſie zeigt, daß man drei Größen auf unendlich vielerlei Art ſo wählen kann, daß ihre Summe ihrem Producte gleich iſt.

### Geometriſche Beweiſe für die oben gefundenen Formeln.

**42.** Der Leſer wird bereits bemerkt haben, daß nachdem die Formeln für den Sinus und Coſinus von $a+b$ und $a-b$ auf geometriſchem Wege abgeleitet waren, zur Entwicklung aller andern die algebraiſche Rechnung angewandt wurde. Wenn nun die Richtigkeit der erſten für alle möglichen Bögen bewieſen wurde, ſo müſſen auch die andern in derſelben Allgemeinheit richtig ſein, und dieß iſt der weſentliche Charakter der analytiſchen Methoden. Ja man muß, indem man ſich geometriſcher Conſtructionen bedient, ſogar befürchten, daß die Folgerungen nur für die in den Figuren dargeſtellten Fälle Geltung haben; da dieſelben jedoch den Vortheil haben, die Wahrheit anſchaulicher zu machen, ſo ſollen die wichtigern der oben erhaltenen Reſultate auch auf geometriſchem Wege bewieſen werden.

**43.** Der Sinus und Cosinus eines Bogens sind gegeben, man soll den Sinus und Cosinus des doppelten Bogens finden.

Es sei (Fig. 6) der Bogen $AB = BC = a$; man mache die in der Figur angedeuteten Constructionen, so ist

$$\sin a = AP,\ \cos a = OP,\ \sin 2a = CQ = 2PH,$$
$$\cos 2a = OQ = OH - QH = OH - AH.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OPA ergibt sich:

$$PH = \frac{AP \times OP}{OA},\quad OH = \frac{OP^2}{OA},\quad AH = \frac{AP^2}{OA};$$

folglich, wenn man für die verschiedenen Linien ihre trigonometrischen Ausdrücke, und den Halbmesser $OA = 1$ setzt, ergibt sich

$$\sin 2a = 2PH = 2\sin a \cos a,$$
$$\cos 2a = OH - AH = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

welches die Formeln [1 und 2] in Nro. 29 sind.

**44.** Es sei gegeben $\cos a$, man soll $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$ finden. Man nehme den Bogen $AC = a$ (Fig. 7), fälle die Senkrechte CP auf den Durchmesser AB, und ziehe die Sehnen AC und BC, sowie die Halbmesser OD und OE, welche die Sehnen in ihren Halbirungspunkten senkrecht schneiden. Indem nun immer $OA = 1$ genommen wird, hat man $OP = \cos a$, $AP = 1 - \cos a$, $BP = 1 + \cos a$, $AC = 2\sin \frac{1}{2}a$, $BC = 2\cos \frac{1}{2}a$. Da aber jede der Sehnen die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem ihr zunächst liegenden Abschnitt desselben ist, so hat man

$$AC^2 = AB \times AP \text{ oder } 4\sin^2 \tfrac{1}{2}a = 2\,(1 - \cos a),$$
$$BC^2 = AB \times BP \text{ oder } 4\cos^2 \tfrac{1}{2}a = 2\,(1 + \cos a),$$

und daraus ergeben sich die bekannten Formeln (Nro. 31)

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},\quad \cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}.$$

**45.** Der Sinus und Cosinus eines Bogens seien gegeben, man soll den Sinus und Cosinus des dreifachen Bogens finden.

In Fig. 8 sei der Halbmesser $OB = 1$, und der Bogen $AB = BC = CD = a$. Das gleichschenklige Dreieck BOD ist BDF ähnlich, denn der Winkel OBD ist gemeinschaftlich, und der Winkel BDF, der $\frac{1}{2}$ BAE oder BOD zum Maß hat, ist gleich dem Winkel BOD. Man hat also

$$BF : BD = BD : OB,\ \text{woraus } BF = 4\sin^2 a.$$

Zieht man PG parallel BF, so ist $PG = BF = 4\sin^2 a$, und die ähnlichen Dreiecke QGP und OBP geben

$$QG : BP = PG : OB,\ \text{woraus } QG = 4\sin^3 a,$$
$$PQ : OP = PG : OB,\ \text{woraus } PQ = 4\sin^2 a \cos a.$$

Nun ist aber

$$\sin 3a = DQ = DF + FG - QG,$$
$$= BD + BP - QG = 3\sin a - QG,$$
$$\cos 3a = OQ = OP - PQ = \cos a - PQ;$$

wenn man daher die eben gefundenen Werthe für QG und PQ substituirt, so ergibt sich

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a = \cos a - 4\sin^2 a \cos a.$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke ist nichts anderes als die Formel [3] in Nro. 30; und indem man $1 - \cos^2 a$ für $\sin^2 a$ setzt, erhält man aus dem zweiten die Formel [4].

**46.** Die Tangenten zweier Bögen sind gegeben, man soll die Tangente ihrer Summe und ihrer Differenz finden.

Es sei (Fig. 9) $OA = 1$, $AB = a$, $BC = b$; man ziehe an die Endpunkte der Halbmesser OA und OB die Tangenten AT und BS, und fälle SH senkrecht auf OA. In der Aufgabe ist $BR = \text{tang } a$, $BS = \text{tang } b$ gegeben, und man soll $AT = \text{tang } (a + b)$ finden.

Wegen der ähnlichen Dreiecke OAT und OHS hat man

$$\frac{AT}{OA} = \frac{SH}{OH}, \text{ woraus } \text{tang } (a + b) = \frac{SH}{OH}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken SHR und OBR erhält man SH, da

$$SH : SR = OB : OR, \text{ also } SH = \frac{\text{tang } a + \text{tang } b}{OR}.$$

Um OH zu finden, setze man nach einem bekannten Lehrsatz

$$SR^2 = OR^2 + OS^2 - 2OR \times OH;$$

aber

$$SR^2 = (BR + BS)^2 = BR^2 + BS^2 + 2BR \times BS;$$

also ist

$$BR^2 + BS^2 + 2BR \times BS = OR^2 + OS^2 - 2OR \times OH.$$

Woraus sich ergibt

$$2OR \times OH = OR^2 - BR^2 + OS^2 - BS^2 - 2BR \times BS$$
$$= 2OB^2 - 2BS \times BS = 2 - 2\text{tang } a \text{ tang } b;$$

folglich ist

$$OH = \frac{1 - \text{tang } a \text{ tang } b}{OR}.$$

Setzt man in tang $(a + b)$ für SH und OH ihre Werthe, so erhält man die in Nro. 34 gefundene Formel

$$\text{tang } (a + b) = \frac{\text{tang } a + \text{tang } b}{1 - \text{tang } a \text{ tang } b}.$$

Ebenso leicht erhält man den Werth für tang $(a - b)$ aus Fig. 10, in welcher der Bogen $AC = AB - BC = a - b$ gesetzt ist, und man

sieht sogleich, daß dieselben Rechnungen auch für diesen Fall stattfinden. Nur erhält man, da RS gleich tang a — tang b, für das zweite Glied des Nenners in SH und OH das entgegengesetzte Vorzeichen; so daß sich ergibt

$$\text{tang}\,(a - b) = \frac{\text{tang}\,a - \text{tang}\,b}{1 + \text{tang}\,a\ \text{tang}\,b}.$$

**47.** Folgende Formeln sollen geometrisch bewiesen werden:

$$\sin p + \sin q = 2\sin \tfrac{1}{2}(p + q)\cos \tfrac{1}{2}(p - q),$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos \tfrac{1}{2}(p + q)\sin \tfrac{1}{2}(p - q).$$

Man setze (in Figur 11) AB = p und AC = q, ziehe die Sehne BC und durch ihren Mittelpunkt E den Halbmesser OD, fälle auf OA die Senkrechten BP, CQ, DR und EF, und ziehe EG parallel OA, so ergibt sich aus der Construction selbst

$$BP = \sin p,\ CQ = \sin q,\ EF = \frac{\sin p + \sin q}{2},\ BG = \frac{\sin p - \sin q}{2},$$

$$AD = \tfrac{1}{2}(p + q),\quad DR = \sin \tfrac{1}{2}(p + q),\quad OR = \cos \tfrac{1}{2}(p + q),$$
$$BD = \tfrac{1}{2}(p - q),\quad BE = \sin \tfrac{1}{2}(p - q),\quad OE = \cos \tfrac{1}{2}(p - q).$$

Aber die ähnlichen Dreiecke OEF, ODR und BGE ergeben

$$EF : DR = OE : OD \text{ und } BG : OR = BE : OD,$$

woraus $EF = \frac{DR \times OE}{OD}$ und $BG = \frac{OR \times BE}{OD}$.

Setzt man für die verschiedenen Linien ihre Werthe, indem man diese Ausdrücke doppelt nimmt und den Halbmesser OD = 1 setzt, so erhält man die verlangten Formeln.

Dieselben Dreiecke geben auch die Werthe für cos p + cos q und für cos q — cos p.

**48.** Es soll geometrisch bewiesen werden, daß die Summe der Sinus zweier Bögen sich zur Differenz dieser Sinus verhält, wie die Tangente der halben Summe dieser Bögen zur Tangente ihrer halben Differenz.

Man mache (Fig. 11) dieselbe Construction wie vorhin; ziehe ferner im Punkte D die Tangente ST, die sich in S und T bei den verlängerten Halbmessern OA und OB endigt; verlängere noch BC bis H: so ist wegen der Parallelen $\frac{EF}{BG} = \frac{EH}{EB} = \frac{DS}{DT}$.

Man hat aber 2EF = sin p + sin q, 2BG = sin p — sin q, DS = tang DA = tang $\frac{1}{2}(p+q)$, DT = tang DB = tang $\frac{1}{2}(p-q)$; folglich

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p + q)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(p - q)},$$

was zu beweisen war.

# Zweites Kapitel.

## Trigonometrische Tafeln und Auflösung der Dreiecke.

### Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

**49.** Um die Winkel und Bögen mit wirklichem Nutzen durch die Sinus, Cosinus ꝛc. zu ersetzen, muß man, wenn der Bogen gegeben ist, die Zahlen kennen, welche diese Verhältnisse ausdrücken und umgekehrt. Zu diesem Zwecke ist es nun am geeignetsten, Tafeln anzufertigen, in welchen sich diese Zahlen neben den ihnen entsprechenden Bögen befinden. Es soll nun gezeigt werden, wie man die Sinus, Cosinus ꝛc. für alle Bögen von 10″ zu 10″ nach der alten Eintheilung berechnet; da die Bögen in den Tafeln von Callet in dieser Ordnung auf einander folgen. Die neue Eintheilung ist dabei weggelassen; indessen würde bei ihrer Einführung das anzugebende Verfahren ebenfalls anwendbar sein.

Suchen wir zuerst den Sinus von 10″. Zu diesem Ende bemerken wir, daß das Verhältniß des Kreisumfangs zum Durchmesser gegeben ist durch

$$\pi = 3{,}14159\quad 26535\quad 89793\ldots.$$

Wenn der Halbmesser als Einheit angenommen wird, so ist der halbe Kreisumfang gleich $\pi$, und da $180^0$ gleich 648000 Secunden sind, so hat man in Theilen des Halbmessers

$$[1]\quad \text{Bog. } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0{,}00004\quad 84813\quad 68110\ldots$$

Da nun ein sehr kleiner Bogen seinem Sinus sehr nahe kommt, so kann obige Zahl als ein dem sin 10″ sehr nahe stehender Werth betrachtet werden. Dieß bedarf jedoch noch einiger Erörterungen.

**50.** Erstens ist zu zeigen, daß im ersten Quadranten ein Bogen größer ist als sein Sinus und kleiner als seine Tangente.

Es sei (Fig. 12) **AP** der Sinus des Bogens **AB**, und **AT** seine Tangente. Man drehe die Figur um **OT** und denke sich, der Punkt **A** falle auf **C**. Nun ist Bogen **AC** $>$ Sehne **AC**, und daher Bogen **AB** $>$ **AP**; folglich ist der Bogen größer als der Sinus. Auch hat man Bogen **AC** $<$ **AT** $+$ **CT**, also **AB** $<$ **AT**; somit ist der Bogen kleiner als die Tangente.

Daraus folgt, wenn der Unterschied zwischen $\frac{\text{tang a}}{\sin a}$ und 1 sehr klein ist, so muß der Unterschied zwischen $\frac{a}{\sin a}$ und 1 noch geringer sein.

**51.** Zweitens, wenn man einen Bogen bis auf Null abnehmen läßt, so kann das Verhältniß dieses Bogens zu seinem Sinus der Einheit so nahe kommen, als man will: das heißt, dieses Verhältniß hat die Einheit zur Grenze.

Die Formel $\text{tang a} = \frac{\sin a}{\cos a}$ (Nro. 28) gibt $\frac{\text{tang a}}{\sin a} = \frac{1}{\cos a}$. Wenn nun der Bogen a (der $< 90^0$ angenommen ist) abnimmt, so nimmt der Cosinus zu, und kann der Einheit so nahe kommen, als man will; also nimmt das Verhältniß $\frac{1}{\cos a}$ und das ihm gleiche $\frac{\text{tang a}}{\sin a}$ immer mehr ab, und hat die Einheit zur Grenze.

Da der Bogen größer als der Sinus und kleiner als die Tangente ist, so kann das Verhältniß $\frac{a}{\sin a}$ nie $< 1$, noch $> \frac{\text{tang a}}{\sin a}$ werden; folglich, da dieses letztere Verhältniß der Einheit beliebig nahe kommen kann, so muß dieß auch bei dem ersten der Fall sein. Dieß war zu beweisen, und man kann somit den Werth des Bogens von 10″ für den des sin 10″ nehmen.

**52.** Es ist jetzt noch der Grad der Annäherung zu bestimmen, um die überflüssigen Decimalen weglassen zu können. Man hat

$$\sin a = 2\sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a;$$

aber die Ungleichung

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a > \tfrac{1}{2}a \text{ oder } \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} > \tfrac{1}{2}a \text{ gibt } 2\sin \tfrac{1}{2}a > a \cos \tfrac{1}{2}a;$$ also hat man

$$\sin a > a \cos^2 \tfrac{1}{2}a;$$

und da $\cos^2 \frac{1}{2}a = 1 - \sin^2 \frac{1}{2}a$, so ist $\cos^2 \frac{1}{2}a > 1 - (\frac{1}{2}a^2)$, also

$$\sin a > a - \frac{a^3}{4}.$$

Wenden wir dieses Resultat auf den Bogen von 10″ an. Nach dem Werthe [1] erhält man, indem man die fünfte Decimalstelle um Eins vermehrt, Bogen $10'' < 0{,}00005$; also

$$\tfrac{1}{4}(\text{Bogen } 10'')^3 < 0{,}00000\quad 00000\quad 00032.$$

Sonach ergibt sich

$$\sin 10'' > \begin{cases} 0{,}00004\quad 84813\quad 68110\ldots, \\ -0{,}00000\quad 00000\quad 00032, \end{cases}$$

und wenn die Subtraction ausgeführt wird:

$$\sin 10'' > 0{,}00004\quad 84813\quad 68078\ldots$$

Man ersieht daraus, daß der Sinus sich erst in der 13ten Decimalstelle von dem Bogen 10″ unterscheidet, und daß bei diesem Bogen die 13te Decimale erst um Eins größer ist. Daraus folgt, daß wenn

$$\sin 10'' = 0{,}00004\ \ 84813\ \ 681$$

genommen wird, man versichert sein darf, daß der Fehler geringer ist, als eine Einheit der 13ten Stelle. Der vorige Werth wird offenbar zu klein, wenn man von seiner letzten Ziffer eine Einheit wegnimmt, und dagegen zu groß, wenn man derselben eine hinzufügt, denn dann würde er größer sein, als der Bogen selbst.

Setzt man den Werth für sin 10″ unter das Wurzelzeichen $\sqrt{1-\sin^2 10''}$, so erhält man cos 10″, nämlich:

$$\cos 10'' = 0{,}99999\ \ 99988\ \ 248.$$

Nun könnte man auch nach einander den Sinus und Cosinus von 20″, 30″, 40″, . . . bis auf 45° erhalten, mittelst der bekannten Formeln:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

**53.** Die Berechnungen geschehen schneller durch folgendes, einem englischen Mathematiker, Thomas Simpson, entnommene Verfahren:

Die Formeln in Nro 38 geben:

$$\sin(a+b) = 2\cos b \sin a - \sin(a-b),$$
$$\cos(a+b) = 2\cos b \cos a - \cos(a-b).$$

Die Bögen a − b, a, a + b, kann man als drei auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Progression mit der Differenz b betrachten; bezeichnet man daher diese drei Glieder mit t, t′, t″, so hat man

$$\sin t'' = 2\cos b \sin t' - \sin t,$$
$$\cos t'' = 2\cos b \cos t' - \cos t.$$

Die erste Formel zeigt, daß wenn zwei auf einander folgende Sinus berechnet sind, man den folgenden Sinus findet, indem man den letzten mit 2cos b, den vorletzten mit − 1 multiplicirt, und die beiden Producte addirt. Dieselbe Regel gilt für den Cosinus.

Um also die Sinus und Cosinus von 10 zu 10 Secunden zu erhalten, mache man b = 10″, so erhält man, wenn $\alpha$ und $\beta$ die bekannten Werthe von sin 10″ und cos 10″ vorstellen,

| | |
|---|---|
| $\sin 0 = 0,$ | $\cos 0 = 1,$ |
| $\sin 10'' = \alpha,$ | $\cos 10'' = \beta,$ |
| $\sin 20'' = 2\beta \sin 10'',$ | $\cos 20'' = 2\beta \cos 10'' - 1,$ |
| $\sin 30'' = 2\beta \sin 20'' - \sin 10'',$ | $\cos 30'' = 2\beta \cos 20'' - \cos 10'',$ |
| $\sin 40'' = 2\beta \sin 30'' - \sin 20'',$ | $\cos 40'' = 2\beta \cos 30'' - \cos 20'',$ |
| u. s. f. | u. s. f. |

Da aber der Unterschied zwischen 2$\beta$ und 2 Einheiten sehr gering ist, so lassen sich diese Berechnungen noch mehr abkürzen. Es bezeichne k die

Differenz $2 - 2\beta$, so erhält man $k = 0{,}00000\ 00023\ 504$ und $2\beta = 2 - k$. Folglich erhält man für $\sin t''$ den Werth

$$\sin t'' = 2\sin t' - k\sin t' - \sin t$$

woraus $\sin t'' - \sin t' = (\sin t' - \sin t) - k\sin t'$.

Ist die Differenz $\sin t'' - \sin t'$ berechnet, so addire man $\sin t'$ hinzu, dann kennt man $\sin t''$. Nach der letzten Formel ist aber diese Differenz gleich der Differenz $\sin t' - \sin t$ (welche schon berechnet ist, ehe man an den Bogen $t''$ kommt), weniger dem Producte $k \sin t'$; die einzige mühsame Arbeit, die sich bei jedem Sinus wiederholt, ist also die Multiplication des letzten Sinus mit der constanten Zahl $k = 0{,}00000\ 00023\ 504$. Diese Operation kann jedoch dadurch abgekürzt werden, daß man zum voraus die Producte aus je 23504 und den Ziffern 1, 2, 3 .... bis 9 berechnet; dadurch erhält man sogleich die Partial-Producte, aus denen jedes Product von $k \sin t'$ besteht, und man darf sie nur zusammen addiren. Aus ziemlich ähnlichen Rechnungen ergeben sich die Cosinus.

Da sich in einer langen Reihe von Operationen die Fehler beträchtlich vergrößern können, so ist es freilich unmöglich, bis an's Ende dreizehn Decimalstellen genau zu erhalten. Um den Grad der Genauigkeit, auf welchen man sich verlassen darf, zu bestimmen, sollen weiter unten (Nro. 56) durch Verfahrungsarten, die eine sichere Annäherung gewähren, die Werthe mehrerer Sinus und Cosinus gesucht werden; dann werden sich aus der Anzahl der Decimalen, die sie mit den aus den eben erklärten Rechnungen erhaltenen Werthen gemeinschaftlich haben, mit hinlänglicher Sicherheit diejenigen Decimalen ergeben, die man in den Zwischenwerthen als genau betrachten kann.

Würde sich der Näherungswerth ungenügend zeigen, so könnte man von einem kleinern Bogen als $10''$, z. B. von $1''$, ausgehen, und die ganze Berechnung noch einmal machen.

**54.** In der Anwendung ist es von weit geringerem Nutzen, die trigonometrischen Zahlen zu erhalten, als ihre Logarithmen; deßhalb sind immer letztere unmittelbar in den Tafeln angegeben. Würde man aber die Annahme für den Halbmesser $= 1$ beibehalten, so wären die Sinus und Cosinus Brüche, und folglich ihre Logarithmen negativ. Um diese positiv zu erhalten, setzt man $r = 10^{10}$, oder was dasselbe ist, man theilt den Halbmesser in zehntausend Millionen gleiche Theile; dann kann der Logarithme eines Sinus oder eines Cosinus nur noch für einen Bogen negativ werden, der von Null oder von $90^0$ so wenig verschieden ist, daß man den Unterschied ganz vernachläßigen kann.

Es ist übrigens leicht, alle Resultate von der ersten Annahme auch auf die zweite zu übertragen, indem man sie mit $10^{10}$ multiplicirt, oder zu ihren Logarithmen 10 addirt; denn in der ersten Annahme, wo $r = 1$, findet man die Verhältnisse der Sinus und Cosinus zum Halbmesser, und

wenn man den Halbmesser in m gleiche Theile theilt, so muß man natürlich alle diese Verhältnisse mit m multipliciren, um die Zahl der in den Sinus und Cosinus enthaltenen Theile zu kennen.

**55.** Die Logarithmen der Tangenten erhält man aus der Formel

$$\text{tang } a = \frac{r \sin a}{\cos a}, \text{ woraus sich ergibt}$$

$$\log \text{tang } a = \log \sin a + (10 - \log \cos a):$$

d. h. man muß zum Logarithmen des Sinus das arithmetische Complement von dem des Cosinus addiren.

Hierauf erhält man die Logarithmen der Cotangenten mittelst der Relation $\text{tang } a \cot a = r^2$, woraus sich ergibt

$$\log \cot a = 10 + (10 - \log \text{tang } a).$$

Manche Tafeln enthalten die Cotangenten nicht: es ist jedoch leicht, dieselben zu ergänzen, denn man darf nur zum arithmetischen Complement des Logarithmen der Tangente 10 addiren. Die Secanten und Cosecanten kommen in den Tafeln nicht vor, da ihre Logarithmen sich leicht aus denen des Sinus und Cosinus berechnen lassen. Ueberdieß werden diese Linien sehr selten gebraucht.

Die Tafeln gehen nie über $45^0$; darüber hinaus erhält man die Sinus und Tangenten aus den Cosinus und Cotangenten, und umgekehrt; denn wenn z. B. $a > 45^0$, so hat man $\sin a = \cos (90^0 - a)$. Die Einrichtung der Tafeln erspart sogar die Berechnung dieses Complements.

## Berechnung der Sinus und Cosinus von $9^0$ zu $9^0$, zur Berichtigung der Tafeln.

**56.** Um die oben, am Ende von Nro. 53 erwähnten Berichtigungen zu erhalten, sollen hier die Sinus und Cosinus der Bögen von $9^0$ zu $9^0$ berechnet werden.

Es sei zuerst $\sin 18^0 = x$; so ist $2x$ die Sehne von $36^0$, oder die Seite des einbeschriebenen regulären Zehnecks. Diese Seite ist aber gleich dem Theil des Halbmessers, der die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Halbmesser und dem andern Theile desselben ist; ist also der Halbmesser gleich 1, so hat man $1 : 2x = 2x : 1 - 2x$. Daraus ergibt sich

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4};$$

wenn man diese Gleichung auflöst und den negativen Werth von x, der hier unnöthig ist, wegläßt, so erhält man

$$x = \sin 18^0 = \cos 72^0 = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}).$$

Aus diesem Werth findet man leicht:

$$\sqrt{1 - x^2} = \cos 18^0 = \sin 72^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Setzt man diese Werthe für sin 18° und cos 18° an die Stelle von sin a und cos a in den Formeln (Nro. 29), welche sin 2a und cos 2a ausdrücken, so erhält man

$$\sin 36^0 = \cos 54^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$
$$\cos 36^0 = \sin 54^0 = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Wird derselbe Werth von sin 18° in die Formeln (Nro. 32) gesetzt, welche sin ½a und cos ½a in Funktionen von sin a ausdrücken, so ergibt sich:

$$\sin 9^0 = \cos 81^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}},$$
$$\cos 9^0 = \sin 81^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}}.$$

Wenn man endlich in denselben Formeln für sin a den Werth $\sin 54^0 = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ setzt, so kommt

$$\sin 27^0 = \cos 63^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3 - \sqrt{5}},$$
$$\cos 27^0 = \sin 63^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3 - \sqrt{5}}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß Nro. 8) $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, so läßt sich folgende Tabelle bilden:

$$\sin 0^0 = \cos 90^0 = 0,$$
$$\sin 9^0 = \cos 81^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}},$$
$$\sin 18^0 = \cos 72^0 = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}),$$
$$\sin 27^0 = \cos 63^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3 - \sqrt{5}},$$
$$\sin 36^0 = \cos 54^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$
$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$\sin 54^0 = \cos 36^0 = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}),$$
$$\sin 63^0 = \cos 27^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3 - \sqrt{5}},$$
$$\sin 72^0 = \cos 18^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$
$$\sin 81^0 = \cos 9^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}},$$
$$\sin 90^0 = \cos 0^0 = 1.$$

Da diese verschiedenen Ausdrücke sehr einfach sind und nur Quadratwurzeln enthalten, so ist es leicht, ihre Werthe auf beliebig viele Decimalstellen genau zu erhalten, und diese Werthe können zur Berichtigung der in Nro. 53 entwickelten Rechnungen dienen. Durch Halbirung könnte man selbst Bögen von 4° 30′ und 2° 15′ erhalten, dann wieder auf einander folgende Vielfache von 2° 15′, wodurch man neue Berichtigungswerthe erhielte. Hiezu gibt es noch andere Methoden; indessen ist es hier nicht am Orte, in das Einzelne näher einzugehen.

### Einrichtung und Gebrauch der Tafeln von Callet.

**57.** Für die alte Eintheilung sind die Tafeln von Callet, und für die neue die von Borda die besten.* In dem Werke Callet's sind drei Haupttafeln zu unterscheiden: die erste enthält die Logarithmen der Zahlen bis 108000, die zweite die der Sinus, Tangenten und Cosinus für alle Bögen von Minute zu Minute nach der neuen Eintheilung, und die dritte die der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von 10″ zu 10″ nach der alten Eintheilung des Kreisumfangs in $360^0$, $1^0 = 60'$, $1' = 60''$. Es ist hier nur von der letzten die Rede, zumal die astronomischen Instrumente und Berechnungen immer nach der alten Eintheilung gemacht werden.

**58.** Auf derselben sind zuerst die Log sin und Log tang von Secunde zu Secunde bis auf $5^0$ angegeben, und somit auch die Log cos und Log cot der Winkel über $85^0$. Dieser Theil der Tafel wird also gebraucht, wenn die Bögen innerhalb dieser Grenzen sich befinden. Hierauf kommen die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von 10″ zu 10″ in den mit Sinus, Cosinus ꝛc. überschriebenen Spalten. Ist die Tangente oder Cotangente größer als der Halbmesser, so ist ihr Logarithme größer als 10; da jedoch der Zehner in der Tafel weggelassen wurde, so ist die Anwendung desselben für diesen Fall nicht zu vergessen.

Betrachtet man nur die Grade, welche oben an jeder Seite stehen, so könnte man glauben, die Tafeln erstrecken sich nur bis $45^0$; beachtet man aber, daß die oben mit Sinus, Cosinus ꝛc. bezeichneten Spalten unten mit Cosinus, Sinus ꝛc. bezeichnet sind, so ist leicht zu ersehen, daß man die Logarithmen der Sinus, Cosinus ꝛc. von $45^0$ bis $90^0$ erhält, wenn man auf die Grade und Aufschriften unten an den Seiten, so wie auf die für die Minuten und Secunden rechts angebrachten aufsteigenden Spalten Rücksicht nimmt.

Nach dem Vorigen findet man z. B. sogleich

$$\text{L. sin } 6^0\,32'\,30'' = 9{,}0566218,$$
$$\text{L. cot } 81^0\,46'\,20'' = 9{,}160596.$$

**59.** Enthält der gegebene Winkel einzelne Secunden und Brüche von Secunden, so muß man zu den Differenzen seine Zuflucht nehmen

---

* Sowie die Tafeln von Callet hauptsächlich in Frankreich gebraucht werden, so sind bekanntlich für Deutschland die von Vega allgemein gebräuchlich; da indeß diese sich in ihrer Einrichtung von den ersteren nur unbedeutend unterscheiden, so daß die folgenden Anwendungen auch auf die Vega'schen Logarithmentafeln passen, und überdieß diesen eine ausführliche Erklärung der Einrichtung und des Gebrauchs vorangeht, so enthalten wir uns, weiteres hierüber zu bemerken. Anm. d. Ueberf.

und Berechnungen anstellen, die den bei den Logarithmen der Zahlen angegebenen ganz ähnlich sind. Man betrachtet nämlich die Differenzen der Log sin, Log cos ꝛc. proportional mit denen der Bögen, und eine solche, wenn auch nicht ganz genaue Proportion gibt immerhin einen hinreichenden Näherungswerth. Dabei ist wohl zu beachten, daß die Log tang und Log cot dieselben Differenzen haben.

Folgende Beispiele mögen zur Erklärung dienen:

1) Es sei L. sin 6° 32′ 37″,8 zu finden.

| | | |
|---|---|---|
| L. sin 6° 32′ 30″ | Diff. 1836 . | 9,0566218 |
| für | 7″ . . . . | 1285 2 |
| für | 0,8 . . . . | 146 88 |
| L. sin 6° 32′ 37″,8 | | 9,0567650. |

2) Es sei L. cos 83° 27′ 22″,2 zu finden.

| | | |
|---|---|---|
| L. cos 83° 27′ 30″ | Diff. 1836 . | 9,0566218 |
| für | 7″ . . . . | 1285 2 |
| für | 0,8 . . . . | 146 88 |
| L. cos 83° 27′ 22″,2 | | 9,0567650. |

3) Man soll L. tang 8° 13′ 52″,76 suchen.

| | | |
|---|---|---|
| L. tang 8° 13′ 50″ | Diff. 1486 . | 9,1603083 |
| für | 2″ . . . | 297 2 |
| für | 0,7 . . . | 104 02 |
| für | 0,06 . . . | 8 916 |
| L. tang 8° 13′ 52″,76 | | 9,1603493. |

4) Man soll L. cot 81° 46′ 7″, 24 suchen.

| | | |
|---|---|---|
| L. cot 81° 46′ 10″ | Diff. 1486 . | 9,1603083 |
| für | 2″ . . . . | 297 2 |
| für | 0,7 . . . . | 104 02 |
| für | 0,06 . . . . | 8 916 |
| L. cot 81° 46′ 7″, 24 | | 9,1603493. |

**60.** Um nun auch die umgekehrte Aufgabe aufzulösen, nehmen wir an, der Logarithme eines Sinus, Cosinus ꝛc. sei gegeben, und man soll den zugehörigen Winkel finden. Es sei z. B. gegeben L. sin x = 9,0567650. In den Tafeln ist unter den Log sin der nächst niedere 9,0566218, und entspricht dem Winkel 6° 32′ 30″. Die Differenz mit dem gegebenen Logarithmen ist 1432, und die Differenz in der Tafel für 10″ ist 1836;

dividirt man nun 1432 durch 1836, und zählt die Zehntel des Quotienten als Secunden, so findet man 7″, 8. Man erhält also den gesuchten Bogen $x = 6^0\ 32'\ 37'', 8$.

Folgende Aufgaben beziehen sich auf dieses und ähnliche Beispiele.

1) Den Winkel zu finden, dessen L. sin 9,0567650 ist.

L. sin x = 9,0567650

| | | |
|---|---|---|
| für | 9,0566218 Diff. 1836 . | $6^0\ 32'\ 30''$ |
| erster Rest | 14320 . . . . | 7 |
| zweiter Rest | 14680 . . . . | 0,8 |
| | | $x = 6^0\ 32'\ 37'',8.$ |

2) Wie groß ist der Winkel, dessen L. cos 9,0567650 ist?

L. cos x = 9,0567650

| | | |
|---|---|---|
| für | 9,0568054 Diff. 1836 . | $83^0\ 27'\ 20''$ |
| erster Rest | 4040 . . . . | 2 |
| zweiter Rest | 3680 . . . . | 0,2 |
| | | $x = 83^0\ 27'\ 22'', 2.$ |

3) Welches ist der Winkel, dessen L. tang 9,1603493 ist?

L. tang x = 9,1603493

| | | |
|---|---|---|
| für | 9,1603083 Diff. 1486 . . | $8^0\ 13'\ 50''$ |
| erster Rest | 4100 . . . . | 2 |
| zweiter Rest | 11280 . . . . | 0,7 |
| dritter Rest | 8780 . . . . | 0,06 |
| | | $x = 8^0\ 13'\ 52'', 76.$ |

4) Welches ist der Winkel, dessen L. cot 9,1603493 ist?

L. cot x = 9,1603493

| | | |
|---|---|---|
| für | 9,1604569 Diff. 1486 . . | $81^0\ 46'\ 0''$ |
| erster Rest | 10760 . . . . | 7 |
| zweiter Rest | 3580 . . . . | 0,2 |
| dritter Rest | 6080 . . . . | 0,04 |
| | | $x = 81^0\ 46'\ 7'', 24.$ |

**61.** Die Formeln für die Sinus, Cosinus ꝛc. setzen fast immer voraus, daß der Halbmesser als Einheit genommen wird. Um die Tafeln bei denselben zu gebrauchen, kann man auf zweierlei Art verfahren.

Die erste besteht darin, daß man den Halbmesser r = 1, wie oben Nro. 19 bemerkt wurde, in den Formeln wieder herstellt, und hierauf die Logarithmen gebraucht, wie sie in den Tafeln stehen, wo L. r = 10 gesetzt ist.

Bei der zweiten wird nichts an der Formel geändert, d. h. man behält die Annahme r = 1 bei; aber man zieht von jedem Logarithmen in der trigonometrischen Tafel 10 ab. Diese Subtraction kann man blos an der Kennziffer (Karakteristik), die dadurch negativ werden kann, vornehmen; oder noch besser gebraucht man die Logarithmen so, wie sie die Tafel gibt, und bringt diesen Zehner erst am Ende in Rechnung. Diese Correction ist immer leicht, denn in den Berechnungen hat man immer nur Logarithmen zu addiren und zu subtrahiren, und es ist klar, daß jeder in der trigonometrischen Tafel genommene additive Logarithme einen Zehner zu viel, und jeder subtractive einen Zehner zu wenig beim Resultate ergibt.

Der Abkürzung wegen muß man die Subtraction eines Logarithmen immer durch die Addition seines arithmetischen Complements ersetzen. Dann wird der Zehner, den man von diesem Logarithmen abziehen müßte, um ihn der Annahme r = 1 anzupassen, durch denjenigen ergänzt, der beim Gebrauch des Complements addirt wird. Uebrigens wäre bei einem Logarithmen der Fehler um einen Zehner so bedeutend, daß er nicht unbemerkt bleiben könnte. Um jeden Anstand zu beseitigen, sollen zwei Beispiele berechnet werden.

1) Es sei $x = 419 \times \sin^2 40^0$, woraus L. x = L. 419 + 2 L. sin $40^0$; nimmt man L. sin $40^0$ in den Tafeln, so erhält L. x zwei Zehner zu viel, die vom Resultat abzuziehen sind.

| | |
|---|---|
| L. 419 . . . . . | 2,6222140 |
| 2 L. sin $40^0$ . . . . . | 19,6161350 |
| L. x | 2,2383490. |

Dadurch findet man x = 173,12.

2) Es sei $\sin x = \frac{314 \times \sin 30^0}{411 \times \cos^2 15^0}$, woraus L. sin x = L. 314 − L. 411 + L. sin $30^0$ − 2 L. cos $15^0$. Rechnet man mit Complementen, so werden die zwei Zehner, die von 2 L. cos $15^0$ abzuziehen sind, durch die zwei Zehner ergänzt, von welchen man das Complement nimmt. Durch L. sin $30^0$ und das Complement von L. 411 erhält man 2 Zehner zuviel; da jedoch der Winkel x mittelst der Tafeln zu suchen ist, so zieht man im Resultat, wie unten zu sehen ist, nur einen Zehner ab. Die arithmetischen Complemente der Logarithmen sind dabei mit L′ bezeichnet.

| | |
|---|---|
| L. 314 . . . . . | 2,4969296 5 |
| L.′ 411 . . . . . | 7,3861581 8 |
| L. sin $30^0$ . . . . . | 9,6989700 |
| L.′ cos $15^0$ . . . . . | 0,0301124 |
| L. sin x | 9,6121702. |

Für diesen Logarithmen erhält man in den Tafeln x = $24^0$ 10′ 7″.

## Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines ebenen Dreiecks.

**62.** Der Kürze halber sollen von nun an die Winkel der Dreiecke durch die an ihren Spitzen befindlichen Buchstaben A, B, C, und die Gegenseiten beziehungsweise mit a, b, c bezeichnet werden. Ist ferner das Dreieck rechtwinklig, so sei A der rechte Winkel, und a die Hypothenuse. Es sollen nun die Hauptsätze, auf welchen die Auflösung der ebenen Dreiecke beruht, entwickelt werden.

**63. Erster Lehrsatz.** *In einem rechtwinkligen Dreieck ist jede Cathete gleich der Hypothenuse mal dem Sinus des jener Cathete gegenüberliegenden Winkels.*

Es sei ABC (Fig. 13) ein in A rechtwinkliges Dreieck. Aus dem Punkte B als Mittelpunkt beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen DE und fälle die Senkrechte EF. Der Sinus des Winkels B wird ausgedrückt durch das Verhältniß EF zum Halbmesser BE (Nro. 18), aber die ähnlichen Dreiecke BCA und BEF geben $\frac{AC}{BC} = \frac{EF}{BE}$, also $\frac{b}{a} = \sin B$, oder

$$[1] \qquad b = a \sin B,$$

was zu beweisen war.

Der Winkel B ist das Complement von C, daher $\sin B = \cos C$. Also kann man auch sagen: *jede Cathete ist gleich der Hypothenuse mal dem Cosinus des an der Cathete anliegenden Winkels.*

**64. Zweiter Lehrsatz.** *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jede Cathete gleich der andern Cathete mal der Tangente des Gegenwinkels der ersten Cathete.*

Im Dreieck ABC (Fig. 13) beschreibe man wieder den Bogen DE und errichte auf AB die Senkrechte DG. Da das Verhältniß DG zu BD die Tangente des Winkels B (Nro. 18) ausdrückt, und $\frac{AC}{AB} = \frac{DG}{BD}$ ist, so ist $\frac{b}{c} = \operatorname{tang} B$, oder

$$[2] \qquad b = c \operatorname{tang} B.$$

Dieses Resultat läßt sich auch aus Lehrsatz I ableiten. Denn wendet man diesen Lehrsatz auf jede der Seiten b und c an, und beachtet, daß $\sin C = \cos B$, so hat man $b = a \sin B$, und $c = a \cos B$, also

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B} = \operatorname{tang} B \quad \text{oder} \quad b = c \operatorname{tang} B.$$

**65. Dritter Lehrsatz.** In jedem ebenen Dreieck verhalten sich die Sinus der Winkel zu einander, wie ihre Gegenseiten.

Es seien A und B zwei beliebige Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 14), und CD das von der Spitze C auf AB gefällte Loth. Fällt dieses innerhalb des Dreiecks ABC, so ergeben die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD sowohl $CD = b \sin A$, als auch $CD = a \sin B$, also $b \sin A = a \sin B$, d. h.

$$\sin A : \sin B = a : b.$$

Fällt das Loth auf die Verlängerung von BA (Fig. 15), so ist im Dreieck ACD auch $CD = b \sin CAD$; da aber der Winkel CAD das Supplement von CAB ist, so hat man (Nro. 9) $\sin CAD = \sin CAB = \sin A$, also ist wieder, da CD auch $= a \sin B$,

[3] $$\sin A : \sin B = a : b.$$

**66. Vierter Lehrsatz.** In jedem ebenen Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Rechteck aus diesen beiden Seiten mal dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Das heißt, es ist

[4] $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Es sei ABC (Fig. 14) das betreffende Dreieck, und CD eine Senkrechte auf AB. Ist der Winkel A spitzig, so hat man nach einem bekannten Lehrsatze: $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$, oder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD.$$

Das rechtwinklige Dreieck ACD gibt aber $AD = b \cos A$ (Nro. 63), und indem man diesen Werth für AD substituirt, ergibt sich die Gleichung [4].

Ist der Winkel A stumpf (Fig. 15), so hat man

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD,$$

und das Dreieck ACD gibt $AD = b \cos CAD$. Da aber CAD das Supplement von CAB oder A ist, so hat man $\cos CAD = -\cos A$ (Nro. 9), also $AD = -b \cos A$; somit findet man wieder die Gleichung [4], indem man diesen Werth in ihr für $a^2$ setzt.

**67.** Der vorige Lehrsatz kann für sich allein hinreichen, ein Dreieck aufzulösen. Denn wenn man ihn nach einander auf jede Seite anwendet, so erhält man offenbar die drei Gleichungen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

durch welche man von den 6 Stücken des Dreiecks 3 bestimmen kann, wenn die 3 andern bekannt sind (ausgenommen die Fälle, wo das Dreieck unmöglich ist, und den, wo nur die Winkel gegeben sind).

**68.** Der dritte Lehrsatz, der eine Relation zwischen zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln ausdrückt, muß sich aus diesen Gleichungen ableiten lassen, was auf folgende Weise geschieht:

Die erste Gleichung gibt $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, also

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2},$$

folglich

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2abc}.$$

Die beiden andern Gleichungen geben auf dieselbe Weise die Verhältnisse $\frac{\sin B}{b}$ und $\frac{\sin C}{c}$; man erhält sie jedoch einfacher, indem man im zweiten Gliede der vorstehenden Gleichung a in b und b in a, dann a in c und c in a verwandelt. Es ist aber zu bemerken, daß dieses zweite Glied eine symmetrische Funktion von a, b, c ist, d. h. daß es unverändert bleibt, wenn man bei demselben einen beliebigen Wechsel mit den Buchstaben vornimmt; man hat also in Uebereinstimmung mit dem dritten Lehrsatz

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

### Auflösung der rechtwinkligen ebenen Dreiecke.

**69. Erster Fall.** Die Hypothenuse a und ein spitziger Winkel B seien gegeben, man soll den Winkel C und die beiden Seiten b und c finden.

Vorerst hat man $C = 90^0 - B$. Dann bestimmt man b und c mittelst des Lehrsatzes I, nämlich

$$b = a \sin B, \qquad c = a \cos B.$$

Dabei versteht es sich, daß die Berechnung mit Logarithmen geschehen muß.

**70. Zweiter Fall.** Die Cathete b und der spitzige Winkel B seien gegeben, man soll C, a und c finden.

Man hat wieder $C = 90^0 - B$. Aus Lehrsatz I erhält man a durch die Relation

$$b = a \sin B, \text{ woraus } a = \frac{b}{\sin B};$$

und der Lehrsatz II gibt c mittelst des folgenden:

$$c = b \operatorname{tang} C \text{ oder } c = b \cot B.$$

**71. Dritter Fall.** Es sei die Hypothenuse a und eine Cathete b gegeben, man soll die andere Cathete c und die Winkel B und C finden.

In dem rechtwinkligen Dreieck ist $c^2 = a^2 - b^2$, oder

$$c = \sqrt{(a + b)(a - b)},$$

welcher Ausdruck ganz leicht logarithmisch zu berechnen ist.

B erhält man durch die Relation $b = a \sin B$ (Nro. 63), $\sin B = \frac{b}{a}$, und zuletzt erhält man $C = 90^0 - B$.

Sucht man zuerst die Winkel, so läßt sich die Cathete c auch bestimmen durch die Relation $c = a \sin C$.

**72. Vierter Fall.** Die beiden Catheten b und c seien gegeben, man soll die Hypothenuse a und die Winkel B nnd C finden.

Man berechne zuerst B durch die Relation $b = c \operatorname{tang} B$ (Nro. 64), dann hat man $C = 90^0 - B$. Die Hypothenuse a ergibt sich aus der Relation $b = a \sin B$ (Nro. 63).

Man könnte auch a direct finden durch die Formel $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; da sich jedoch $b^2 + c^2$ nicht in Factoren zerlegen läßt, so ist sie zur logarithmischen Berechnung nicht sehr bequem, und es ist besser, zuerst den Winkel B, und dann mit demselben auch a zu bestimmen.

## Auflösung der ebenen Dreiecke überhaupt.

**73. Erster Fall.** Eine Seite a und zwei Winkel eines Dreiecks seien gegeben, man soll die andern Stücke finden.

Zieht man die Summe der beiden bekannten Winkel von $180^0$ ab, so erhält man den dritten. Die beiden Seiten findet man nach Nro. 65 mittelst der Proportionen

$$\sin A : \sin B = a : b, \qquad \sin A : \sin C = a : c.$$

durch welche man von den 6 Stücken des Dreiecks 3 bestimmen kann, wenn die 3 andern bekannt sind (ausgenommen die Fälle, wo das Dreieck unmöglich ist, und den, wo nur die Winkel gegeben sind).

**68.** Der dritte Lehrsatz, der eine Relation zwischen zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln ausdrückt, muß sich aus diesen Gleichungen ableiten lassen, was auf folgende Weise geschieht:

Die erste Gleichung gibt $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, also

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2 c^2}$$

$$= \frac{2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2 c^2},$$

folglich

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sqrt{2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2abc}.$$

Die beiden andern Gleichungen geben auf dieselbe Weise die Verhältnisse $\frac{\sin B}{b}$ und $\frac{\sin C}{c}$; man erhält sie jedoch einfacher, indem man im zweiten Gliede der vorstehenden Gleichung a in b und b in a, dann a in c und c in a verwandelt. Es ist aber zu bemerken, daß dieses zweite Glied eine symmetrische Funktion von a, b, c ist, d. h. daß es unverändert bleibt, wenn man bei demselben einen beliebigen Wechsel mit den Buchstaben vornimmt; man hat also in Uebereinstimmung mit dem dritten Lehrsatz

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

### Auflösung der rechtwinkligen ebenen Dreiecke.

**69. Erster Fall.** Die Hypothenuse a und ein spitziger Winkel B seien gegeben, man soll den Winkel C und die beiden Seiten b und c finden.

Vorerst hat man $C = 90^0 - B$. Dann bestimmt man b und c mittelst des Lehrsatzes I, nämlich

$$b = a \sin B, \qquad c = a \cos B.$$

Dabei versteht es sich, daß die Berechnung mit Logarithmen geschehen muß.

**70. Zweiter Fall.** Die Cathete b und der spitzige Winkel B seien gegeben, man soll C, a und c finden.

Man hat wieder $C = 90^0 - B$. Aus Lehrsatz I erhält man a durch die Relation

$$b = a \sin B, \text{ woraus } a = \frac{b}{\sin B};$$

und der Lehrsatz II gibt c mittelst des folgenden:

$$c = b \operatorname{tang} C \text{ oder } c = b \cot B.$$

**71. Dritter Fall.** Es sei die Hypothenuse a und eine Cathete b gegeben, man soll die andere Cathete c und die Winkel B und C finden.

In dem rechtwinkligen Dreieck ist $c^2 = a^2 - b^2$, oder

$$c = \sqrt{(a + b)(a - b)},$$

welcher Ausdruck ganz leicht logarithmisch zu berechnen ist.

B erhält man durch die Relation $b = a \sin B$ (Nro. 63), $\sin B = \frac{b}{a}$, und zuletzt erhält man $C = 90^0 - B$.

Sucht man zuerst die Winkel, so läßt sich die Cathete c auch bestimmen durch die Relation $c = a \sin C$.

**72. Vierter Fall.** Die beiden Catheten b und c seien gegeben, man soll die Hypothenuse a und die Winkel B und C finden.

Man berechne zuerst B durch die Relation $b = c \operatorname{tang} B$ (Nro. 64), dann hat man $C = 90^0 - B$. Die Hypothenuse a ergibt sich aus der Relation $b = a \sin B$ (Nro. 63).

Man könnte auch a direct finden durch die Formel $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; da sich jedoch $b^2 + c^2$ nicht in Factoren zerlegen läßt, so ist sie zur logarithmischen Berechnung nicht sehr bequem, und es ist besser, zuerst den Winkel B, und dann mit demselben auch a zu bestimmen.

## Auflösung der ebenen Dreiecke überhaupt.

**73. Erster Fall.** Eine Seite a und zwei Winkel eines Dreiecks seien gegeben, man soll die andern Stücke finden.

Zieht man die Summe der beiden bekannten Winkel von $180^0$ ab, so erhält man den dritten. Die beiden Seiten findet man nach Nro. 65 mittelst der Proportionen

$$\sin A : \sin B = a : b, \qquad \sin A : \sin C = a : c.$$

**74. Zweiter Fall.** Es seien zwei Seiten a und b nebst dem Winkel A, der einer derselben gegenüber liegt, gegeben, man soll die dritte Seite c und die beiden andern Winkel B und C finden.

Das einfachste ist, zuerst den Gegenwinkel B der Seite b durch die Proportion

$$a : b = \sin A : \sin B$$

zu finden.

Da nun A und B bekannt sind, so hat man $C = 180^0 - (A+B)$; dann ergibt sich c aus

$$\sin A : \sin C = a : c.$$

**75.** Diese Auflösung erfordert einige Erörterungen. Die erste Proportion gibt zuerst sin B, nämlich

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

und in den Tafeln findet man dann für B einen spitzigen Winkel. Derselbe Sinus entspricht aber auch seinem Ergänzungswinkel, welcher stumpf ist; bezeichnet man daher den in den Tafeln gefundenen Winkel mit M, so hat man für B zwei Werthe $B = M$, $B = 180^0 - M$, was auf zwei Dreiecke hinzudeuten scheint, und zu folgenden Bemerkungen Anlaß gibt.

1) Ist der gegebene Winkel A ein stumpfer oder rechter (Fig. 16), so müssen die beiden andern Winkel spitzige sein; man hat also nur $B=M$. Dabei muß, wenn das Dreieck möglich sein soll, $a > b$ sein. Diese Bedingung ist übrigens genügend.

2) Ist A spitzig und $a > b$ (Fig. 17), so muß auch $A > B$ sein; der Werth $B = 180^0 - M$ ist dann wieder zu verwerfen, und das Dreieck ist immer möglich.

3) Wenn aber A spitzig und $a < b$ gegeben ist, so kann man sowohl $B = M$, als auch $B = 180^0 - M$ nehmen. Denn es sei (Fig. 18) der Winkel $BAC = A$ und $AC = b$; nun kann der aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis die AB in gewissen Fällen in B und B' schneiden, und man erhält dann zwei Dreiecke ACB und ACB', die aus den gegebenen Stücken construirt sind, und in welchen die Winkel ABC und AB'C einander zu zwei Rechten ergänzen. Sollen nun zwei Auflösungen stattfinden, so muß die Seite a, die $< b$ angenommen ist, größer sein, als die auf AB gefällte Senkrechte CD. Ist die Seite a gleich CD, so ist AB eine Tangente an dem Kreis, und die beiden Auflösungen reduciren sich auf das einzige rechtwinklige Dreieck ACD. Ist endlich a kleiner als CD, so ist gar kein Dreieck mehr möglich, und es soll nun gezeigt werden, daß diese Unmöglichkeit schon durch den Werth für sin B angedeutet ist.

Das rechtwinklige Dreieck ACD gibt $CD = b \sin A$; aber nach der Voraussetzung ist a kleiner als CD, man hat also

$$a < b \sin A \text{ oder } \frac{b \sin A}{a} > 1.$$

Also wäre der Werth für sin B größer als 1; es gibt aber keinen Sinus, der größer als 1 ist, folglich ist das Dreieck unmöglich.

**76.** Vorhin wurde die Seite c nach dem Winkel B gesucht. Man kann indessen c auch unmittelbar mittelst der gegebenen a, b und A finden; denn nach Nro. 66 hat man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

oder

$$c^2 - 2b \cos A \,.\, c = a^2 - b^2,$$

eine Gleichung des zweiten Grades, aus welcher man erhält:

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 A}$$
$$= b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

Da die Seite eines Dreiecks immer eine reelle und positive Größe sein muß, so könnte man noch weiter untersuchen, welche Relationen zwischen a, b und A einen oder zwei solche Werthe für c ergeben können.

Die vorigen Werthe für c sind für die logarithmische Rechnung nicht bequem und werden deßhalb in der Trigonometrie nicht gebraucht. Da man jedoch oft ähnliche findet, so soll gezeigt werden, auf welche Weise sie umgewandelt werden können, um ihre Anwendung zu erleichtern.

Setzen wir zuerst diese Werthe in der Form

$$c = b \cos A \pm a \sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}}.$$

Da wir sie als reell annehmen, so ist die Größe $\frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}$ kleiner als 1, und man kann sie als den Sinus eines Winkels $\varphi$ betrachten, der sich bestimmen läßt, indem man

$$\sin \varphi = \frac{b \sin A}{a} \text{ setzt.}$$

Dann hat man $b = \frac{a \sin \varphi}{\sin A}$; $\sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}} = \cos \varphi$,

und somit

$$c = \frac{a (\sin \varphi \cos A \pm \sin A \cos \varphi)}{\sin A} = \frac{a \sin (\varphi \pm A)}{\sin A},$$

welche Werthe mit Logarithmen leicht zu berechnen sind.

Diese Auflösung fällt übrigens genau mit der ersten zusammen; denn der Hülfswinkel $\varphi$ ist nichts anderes als der Winkel B.

**77. Dritter Fall.** Es seien in einem Dreieck zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel C gegeben, man soll c, A und B finden.

Aus Nro. 65 hat man

$$a : b = \sin A : \sin B,$$

welche Proportion zwei Unbekannte, A und B enthält. Aber es ergibt sich daraus

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B,$$

und dann hat man aus Nro. 40

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B);$$

man erhält also

[1] $$a + b : a - b = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Aber $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(180 - C) = 90 - \frac{1}{2}C$; also sind die drei ersten Glieder dieser Proportion bekannt, und es läßt sich daraus der Werth von $\frac{1}{2}(A - B)$ ableiten. Kennt man die halbe Summe und die halbe Differenz der Winkel A und B, so ist jeder derselben bekannt; denn man hat offenbar

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}, \text{ und } B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2};$$

nachdem A und B gefunden, ergibt sich die Seite c aus

[2] $$\sin A : \sin C = a : c.$$

**78.** In dieser Proportion sind drei neue Logarithmen, nämlich für a, sin A und sin C, zu suchen. In folgendem Verfahren ist einer weniger zu berechnen.

Man hat nämlich $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$, also auch $\sin A + \sin B : \sin C = a + b : c$, woraus $c = \dfrac{(a + b)\sin C}{\sin A + \sin B}$.

Nach bekannten Formeln (Nro. 39 und 29) ist aber

$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{1}{2}(A+B)\cos \frac{1}{2}(A-B)$, $\sin C = 2\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C$, und wieder $\sin \frac{1}{2}(A + B) = \sin(90 - \frac{1}{2}C) = \cos \frac{1}{2}C$. Setzt man diese Werthe in c, so ergibt sich nach den vorgenommenen Reductionen

[3] $$c = \frac{(a + b)\sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}.$$

Da diese Formel a + b enthält, dessen Logarithme schon bekannt ist, so hat man wirklich einen Logarithmen weniger zu suchen, als in der Proportion [2].

**79.** Die Bestimmung von c hat erst nach der von A und B stattgefunden. Um c direct zu erhalten, bedient man sich des vierten Lehrsatzes (Nro. 66); dieser gibt

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

Da jedoch die Logarithmen bei dieser Formel nicht anwendbar sind, so muß man einen Hülfswinkel gebrauchen. Unter den verschiedenen Umformungen, die man mit dieser Gleichung vornehmen kann, folge hier die bemerkenswertheste.

Weil $\cos^2 \frac{1}{2}C + \sin^2 \frac{1}{2}C = 1$, und $\cos^2 \frac{1}{2}C - \sin^2 \frac{1}{2}C = \cos C$, (Nro. 31), so ergibt sich

$$c = \sqrt{(a^2+b^2)(\cos^2 \tfrac{1}{2}C + \sin^2 \tfrac{1}{2}C) - 2ab(\cos^2 \tfrac{1}{2}C - \sin^2 \tfrac{1}{2}C)}$$
$$= \sqrt{(a+b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}C + (a-b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}C},$$
$$= (a+b)\sin \tfrac{1}{2}C \sqrt{1 + \frac{(a-b)^2 \cot^2 \tfrac{1}{2}C}{(a+b)^2}}.$$

Da nun eine Tangente jede beliebige Größe haben kann, so mache man

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{(a-b)\cot \frac{1}{2}C}{a+b};$$

dann wird der letzte Wurzelwerth

$$\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\cos \varphi};$$

folglich hat man

$$c = \frac{(a+b)\sin \frac{1}{2}C}{\cos \varphi}.$$

Auf diese Weise findet man nach einander den Hülfswinkel $\varphi$ und die Seite c mittelst der beiden Formeln, die logarithmisch leicht zu berechnen sind.

Diese Auflösung unterscheidet sich indeß nur scheinbar von der vorigen: denn da $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{1}{2}C$, so ist der Werth für tang $\varphi$ identisch mit dem aus der Proportion [1] abgeleiteten für $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)$, und folglich ist auch der letzte Werth für c identisch mit dem in der Formel [3].

**80.** In der Praxis kommt es oft vor, daß die Seiten durch ihre Logarithmen gegeben sind. Angenommen, es sei dieß bei a und b der Fall, wo außerdem noch C gegeben ist, und nur A und B zu finden. Um nun $\frac{1}{2}(A-B)$ mittelst der Proportion [1] zu bestimmen, müßte man zuerst a und b in den Tafeln suchen; dieß läßt sich aber durch den Gebrauch eines Hülfswinkels vermeiden; denn wenn Winkel $\psi$ aus $\operatorname{tang} \psi = \frac{b}{a}$ gefunden ist, so hat man aus der Formel [2] in Nro. 34

$$\text{tang}\,(45^0 - \psi) = \frac{\text{tang}\,45^0 - \text{tang}\,\psi}{1 + \text{tang}\,45^0\,\text{tang}\,\psi} = \frac{1 - \text{tang}\,\psi}{1 + \text{tang}\,\psi};$$

also, indem man für tang $\psi$ seinen Werth setzt, erhält man

$$\text{tang}\,(45^0 - \psi) = \frac{a - b}{a + b}.$$

Ferner gibt die schon angeführte Proportion [1]

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B),$$

folglich

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B) = \text{tang}\,(45^0 - \psi)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B),$$

und da $\psi$ bekannt ist, so läßt sich leicht $\frac{1}{2}(A - B)$ finden. Auf diese Weise hat man zwei Logarithmen weniger zu berechnen, als wenn man die Seiten a und b gesucht hätte.

**81. Vierter Fall.** Die drei Seiten a, b, c seien gegeben, man soll die Winkel A, B, C finden.

Nach Lehrsatz IV hat man $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, also

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich B und C. Man muß indeß eine für Logarithmen bequemere Formel finden.

Aus Nro. 31 erhält man durch Subtraction der 6ten von der 7ten Formel folgende:

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}A = 1 - \cos A;$$

substituirt man für cos A diesen Werth, so ergibt sich nach einander

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2bc};$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{4bc}}.$$

Um diese Formel einfacher auszudrücken, setzt man den Dreiecksumfang $a + b + c = 2s$; dann ist $a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c)$, und $a - b + c = 2s - 2b = 2(s - b)$, also

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{bc}}.$$

Hieraus ergibt sich die Regel: Man ziehe vom halben Umfang des Dreiecks jede der Seiten ab, welche den gesuchten Winkel einschließen, dividire das Product der beiden Reste durch das der beiden Seiten, und ziehe aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man den Sinus des gesuchten halben Winkels.

Obgleich der Winkel A durch seinen Sinus bestimmt ist, so entsteht daraus doch keine Zweideutigkeit; denn als Winkel eines Dreiecks ist $A < 180^0$, und $\frac{1}{2}A < 90^0$.

**82.** Ebenso leicht erhält man Formeln für $\cos \frac{1}{2}A$ und $\operatorname{tang} \frac{1}{2}A$. Indem man nämlich darauf Rücksicht nimmt, daß (Nro. 31) $2\cos^2 \frac{1}{2}A = 1 + \cos A$, kommt man mit ähnlichen Umformungen wie die vorigen auf

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}.$$

Hierauf, indem man $\sin \frac{1}{2}A$ durch $\cos \frac{1}{2}A$ dividirt, ergibt sich noch

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}.$$

Da jede der drei Formeln die Aufsuchung von vier Logarithmen erfordert, so hat bei der Bestimmung eines einzigen Dreieckswinkels keine einen Vorzug vor der andern. Sind aber zwei zu berechnen, so ist es besser, die letzte zu gebrauchen; denn man braucht dann nur für beide Winkel die vier Größen, $s$, $s-a$, $s-b$, $s-c$ zu suchen, während man bei den zwei ersten Formeln zwei weitere zu suchen hätte.

**83.** Bekanntlich ist es nicht immer möglich, aus drei beliebigen Seiten ein Dreieck zu bilden; es soll nun gezeigt werden, daß diese Unmöglichkeit durch die Rechnung selbst angedeutet wird. Angenommen, man gebrauche die Formel

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}.$$

Ist das Dreieck möglich, so muß sich für $\sin \frac{1}{2}A$ ein reeller Werth und kleiner als 1 ergeben; ist es aber unmöglich, so läßt sich beweisen, daß ein Werth sich ergibt, der imaginär oder größer als 1 ist. Damit die Unmöglichkeit stattfinde, muß eine Seite größer als die Summe der beiden andern sein; sehen wir nun, welche Resultate dann die Formel gibt.

1) Es sei $b > a + c$, so ist $2b > a + b + c$, also $2b > 2s$ und $s - b < 0$; aber außerdem ist offenbar $a + b > c$, also $a + b + c$ oder $2s > 2c$, oder $s - c > 0$. Somit ist der Werth von $\sin \frac{1}{2}A$ imaginär.

2) Es sei $c > a + b$, daraus folgt $s - c < 0$ und $s - b > 0$, d. h. $\sin \frac{1}{2}A$ ist wieder imaginär.

3) Es sei $a > b + c$, so ist $a + b + c$ oder $2s > 2b + 2c$, also $s > b + c$, daher $s - b > c$, $s - c > b$ und $(s-b)(s-c) > bc$; folglich ist der Werth von $\sin \frac{1}{2}A$ größer als 1, was bei keinem Winkel der Fall sein kann.

## Angewandte Beispiele.

**84.** Die großen trigonometrischen Arbeiten erfordern den Gebrauch verschiedener Instrumente, deren nähere Beschreibung nicht hieher gehört.

Folgende Andeutungen mögen genügen, um die gegebenen Beispiele zu verstehen.

Um eine gerade Linie auf dem Felde zu ziehen, bedient man sich der Absteckpfähle oder Markirstäbe, die man von einer Entfernung zur andern so ausstteckt, daß, wenn sich das Auge vor dem ersten befindet, alle andern mit diesem nur einen zu bilden scheinen.

Einen Winkel zeichnet man auf das Papier mittelst des Transporteurs, eines in Grade getheilten Halbkreises.

Zur Messung der Winkel sowohl auf dem Felde als auch im Raume gibt es viele Instrumente, z. B. den Winkelmesser (graphomètre), den Compaß oder die Bouſſole, das Astrolabium, den Theodolit u. s. w. Im Allgemeinen bestehen sie aus einem Kreise oder Kreisausschnitte, auf welchem ein fester Halbmesser den Anfang der Gradeintheilung anzeigt, während ein anderer, um seinen Mittelpunkt beweglicher Halbmesser in beliebiger Richtung darauf gedreht werden kann. Die Ebene des Kreises läßt sich selbst um seinen Mittelpunkt drehen. Will man nun den von zwei Geraden, die von einem gegebenen Punkte nach zwei andern gehen, eingeschlossenen Winkel kennen, so darf man nur den Mittelpunkt des Instruments in den ersten Punkt bringen, und die beiden Halbmesser nach den zwei andern Punkten richten; dann kann man auf dem Kreisumfang die zwischen den Halbmessern enthaltene Anzahl der Grade ablesen, und erhält so den gesuchten Winkel.

Gehen wir jetzt zu den Beispielen über; dabei ist zu bemerken, daß die Berechnungen nach dem in Nro. 61 erläuterten Verfahren ausgeführt sind.

**85. Erstes Beispiel.** (Fig. 19.) *In einem in A rechtwinkligen Dreiecke ABC ist* $a = 1785^m$ (Meter), 395, $B = 59^0\,37'\,42''$; *man soll C, b und c finden* (Nro. 69).

Zieht man B von $90^0$ ab, so bleibt $C = 90^0 - 59^0\,37'\,42'' = 30^0\,22'\,18''$. Es ist also noch b und c zu finden.

| Berechnung von b, aus $b = a \sin B$. | | Berechnung von c, aus $c = a \cos C$. | |
|---|---|---|---|
| L. $\sin 59^0\,37'\,42''$. | 9,9358919 | L. $\cos 59^0\,37'\,42''$. | 9,7038132 |
| L. 1785,395 . . | 3,2517343 | L. 1785,395 . . | 3,2517343 |
| L. b | 3,1876262 | L. c. | 2,9555475 |
| $b = 1540^m,374$ | | $c = 902^m,708$. | |

**86. Zweites Beispiel.** (Fig. 20.) In einem Dreieck ABC sei $a = 2597^m,845$, $b = 3084^m,327$, und $A = 56^0\ 12'\ 47''$; man soll B, C und c finden (Nro. 74).

Berechn. v. B, aus a : b = sinA : sinB

| | |
|---|---|
| L. sin $56^0\ 12'\ 47''$. | 9,9196592 |
| L. 3084,327 . . | 3,4891604 |
| L'. 2597,845 . . | 6,5853868 |
| L. sin B | 9,9942064 |

Es gibt zwei Auflösungen:

Bei der ersten ist $B = 80^0\ 39'\ 43''$

Bei der zweiten $B = 99^0\ 20'\ 17''$.

Erste Auflösung mit $B = 80^0 39' 43''$.

Berechn. v. C, aus $C = 180 - A - B$.

$180^0$

$A = 56^0\ 12'\ 47''$

$B = 80^0\ 39'\ 43''$

$C = 43^0\ 7'\ 30''$.

Berechn. v. c, aus sinA : sinC = a : c

| | |
|---|---|
| L. 2597,845 . . | 3,4146132 |
| L. sin $43^0\ 7'\ 30''$. | 9,8347972 |
| L.' sin $56^0\ 12'\ 47''$. | 0,0803408 |
| L. c. | 3,3297512 |

$c = 2136^m,737$

Zweite Auflös. mit $B = 99^0 20' 17''$.

Berechn. v. C, aus $C = 180 - A - B$.

$180^0$

$A = 56^0\ 12'\ 47''$

$B = 99^0\ 20'\ 17''$

$C = 24^0\ 26'\ 56''$.

Berechn. v. c, aus sinA : sinC = a : c

| | |
|---|---|
| L. 2597,845 . . | 3,4146132 |
| L. sin $24^0\ 26'\ 56''$. | 9,6168759 |
| L'. sin $56^0\ 12'\ 47''$. | 0,0803408 |
| L. c | 3,1118299 |

$c = 1193^m,689$.

**87. Drittes Beispiel.** (Fig. 20.) Es soll auf dem Felde die Lage eines Punktes C bestimmt werden, wenn die Entfernung desselben von zwei bekannten Punkten A und B, die eine = a, die andere = b, gegeben ist.

Wenn das Dreieck ABC nur einen sehr kleinen Raum einnimmt, so kann man von den Punkten A und B als Mittelpunkten mit den gegebenen Entfernungen als Halbmessern zwei Kreisbögen beschreiben. Da jedoch diese Operation für bedeutende Entfernungen nicht anwendbar ist, so mißt man zuerst die Entfernung AB: dann kennt man die drei Seiten des Dreiecks ABC, und der Winkel A läßt sich (Nro. 81) leicht berechnen. Nachdem die Richtung der Seite AC so bestimmt ist, darf man nur in derselben die gegebene Entfernung AC = b ausstecken.

Es sei gegeben $a = 9459^m,31$; $b = 8032^m,29$; $c = 8242^m,58$: so ist

$2s = 25734,18$; $s = 12867,09$; $s - b = 4834,80$; $s - c = 4624,51$.

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

| | |
|---|---|
| L. (s — b) . . . . . | 3,6843785 |
| L. (s — c) . . . . . | 3,6650657 |
| L.′ b . . . . . | 6,0951606 |
| L.′ c . . . . . | 6,0839368 |
| 2 L. sin ½A . . . . . | 19,5285416 |
| L. sin ½A . . . . . | 9,7642708 |

$\frac{1}{2}A = 35^\circ\ 31'\ 47''$, und $A = 71^\circ\ 3'\ 34''$.

**88. Viertes Beispiel.** (Fig. 21.) Die Höhe AB eines Gebäudes zu finden, dessen Fuß zugänglich ist.

Man messe auf dem als eben angenommenen Boden von dem Fußpunkt des Gebäudes aus eine Grundlinie BC, welche, um kleine Winkel zu vermeiden, in Vergleich mit der Höhe AB weder sehr klein noch sehr groß sein darf.

In C stellt man das Instrument auf, mit welchem der Winkel EDA, den die DA mit der wagrechten DE, die mit CB parallel läuft, bildet, gemessen wird. Dann kennt man im rechtwinkligen Dreieck AED die Seite DE und den Winkel D, woraus sich AE (Nro. 70) berechnen läßt; addirt man dann CD zu AE, so hat man die gesuchte Höhe.

Es sei CD = 1m,10; DE = 61m,28; $D = 41^\circ\ 31'\ 25''$; nun hat man

$$AE = 61{,}28 \cdot \text{tang}\ 41^\circ\ 31'\ 25''.$$

| | |
|---|---|
| L. tang 41° 31′ 25″ . . . | 9,9471690 |
| L. 61,28 . . . . . | 1,7873188 |
| L. AE . . . . . | 1,7344878 |

AE = 54m,261; AB = 55m,361.

Ist der Fuß des Gebäudes unzugänglich, oder ist AB die Erhebung eines Hügels über die umgebende Fläche (Fig. 22), so ist der Fuß dieses Perpendikels unbekannt, und man kann die Entfernung BC nicht mehr messen. Indessen läßt sich doch der Winkel ADE noch messen; denn man kann, ohne die Linie AB zu sehen, die Ebene des Kreises, mit welchem die Winkel gemessen werden, in die Lage bringen, daß die Senkrechte AB in derselben liegt. Außerdem läßt sich die Entfernung AD nach dem folgenden Beispiel finden; man kennt also dann die Hypotenuse AD und den Winkel D, woraus auch AE (Nr. 69) gefunden werden kann.

**89. Fünftes Beispiel.** (Fig. 23.) Es soll von dem Standpunkte A die Entfernung nach einem unzugänglichen, aber bemerkbaren Punkte P gefunden werden.

Man messe zuerst eine Basis AB, sowie die Winkel PAB und PBA; dann läßt sich AP (Nro. 73) bestimmen.

Es sei gegeben AB = 247m,49, $A = 62^\circ\ 41'$, $B = 59^\circ\ 42'$; daraus ergibt sich $P = 57^\circ\ 37'$; dann berechnet man AP folgendermaßen:

$$\sin P : \sin B = AB : AP.$$

| | |
|---|---|
| L. AB . . . . . | 2,3935577 |
| L. sin B . . . . . | 9,9362089 |
| L′. sin P . . . . . | 0,0734087 |
| L. AP . . . . . | 2,4031762. |

Gesuchte Entfernung AP = 253m,032.

**90. Sechstes Beispiel.** (Fig. 24.) Die Entfernung PQ von zwei unzugänglichen, aber sichtbaren Punkten zu finden.

Man messe eine Basis AB und die Winkel BAP, BAQ, ABP und ABQ; dann bestimme man, wie vorhin, die Seite AP des Dreiecks ABP, und die Seite AQ des Dreiecks ABQ. Außerdem ist der Winkel PAQ bekannt; denn wenn die vier Punkte A, B, P, Q in einer Ebene liegen, so ist PAQ = BAP — BAQ; jedenfalls kann man diesen Winkel, auch durch unmittelbare Messung, finden. Also kennt man in dem Dreieck PAQ zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, woraus sich leicht (Nro. 77) die Seite PQ finden läßt.

Es sei gegeben: AB=345m,29; BAP=69°26′, BAQ=44°31′, PAQ = 24° 55′, ABP = 48° 15′, ABQ = 102° 14′.

Daraus ergibt sich sogleich APB = 62° 19′, AQB = 33° 15′; hierauf führt man die Rechnungen in folgender Weise aus:

1) Berechnung von AP.

sin APB : sin ABP = AB : AP

| | |
|---|---|
| L. AB . . . . . | 2,5381840 |
| L. sin ABP . . . . . | 9,8727722 |
| L′. sin APB . . . . . | 0,0527973 |
| L. AP . . . . . | 2,4637535 |

AP = 290m,907.

2) Berechnung von AQ.

sin AQB : sin ABQ = AB : AQ

| | |
|---|---|
| L. AB . . . . . | 2,5381840 |
| L. sin ABQ . . . . . | 9,9900247 |
| L′. sin AQB . . . . . | 0,2609871 |
| L. AQ . . . . . | 2,7891958 |

AQ = 615m,454.

3) Berechnung der Winkel P und Q.

Es sei

AQ = p, AP = q, APQ = P, AQP = Q;

so ist p + q = 906,361, p—q=324,547; $\frac{1}{2}(P+Q)=77°32'30''$.

Nun hat man

$$p + q : p - q = \text{tang } \tfrac{1}{2}(P + Q) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(P - Q)$$

| | |
|---|---|
| L. tang $\frac{1}{2}(P + Q)$ . . . | 10,6557419 |
| L. $(p - q)$ . . . . . | 2,5112776 |
| L'. $(p + q)$ . . . . . | 7,0426988 |
| L. tang $\frac{1}{2}(P - Q)$ . . . | 10,2097183 |

$\frac{1}{2}(P-Q) = 58^0\,19'\,32''$; folglich $P = 135^0\,52'\,2''$ und $Q = 19^0\,12'\,58''$.

4) Berechnung von PQ.

$$\sin Q : \sin PAQ = q : PQ$$

| | |
|---|---|
| L. q . . . . . | 2,4637535 |
| L. sin PAQ . . . . . | 9,6245911 |
| L'. sin Q . . . . . | 0,4826297 |
| L. PQ . . . . . | 2,5709743 |

$$PQ = 372^m,37.$$

**91.** Andere Auflösung. Da man die Entfernungen AP und AQ nur durch ihre Logarithmen erhalten hat, so läßt sich hier der Hülfswinkel $\psi$ anwenden, von dem in Nro. 80 die Rede war. In diesem Fall sucht man, nachdem L. AP und L. AQ gefunden ist, die Winkel P und Q auf folgende Weise:

Berechnung von $\psi$.

$$\text{tang } \psi = \frac{AP}{AQ}.$$

| | |
|---|---|
| L. AP . . . . . | 2,4637535 |
| L'. AQ . . . . . | 7,2108042 |
| L. tang $\psi$ . . . . . | 9,6745577 |

$$\psi = 25^0\,17'\,55''$$
$$45^0 - \psi = 19^0\,42'\,5''.$$

Berechnung von P und Q.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(P - Q) = \text{tang } \tfrac{1}{2}(P + Q)\ \text{tang } (45^0 - \psi),$$

| | |
|---|---|
| L. tang $\frac{1}{2}(P + Q)$ . . . | 10,6557419 |
| L. tang $(45^0 - \psi)$ . . . | 9,5539790 |
| L. tang $\frac{1}{2}(P - Q)$ . . . | 10,2097209 |

$\frac{1}{2}(P - Q) = 58^0\,19'\,32''$.

Das Uebrige wird wie oben gerechnet.

**92.** **Siebentes Beispiel.** (Fig. 25.) Drei bemerkbare Punkte A, B, C, liegen auf einem ebenen Felde; man soll

den Punkt M finden, von welchem aus die Punkte B und C unter gegebenen Winkeln gesehen werden.

Da die Winkel AMB und AMC gegeben sind, so beschreibe man auf AB einen Kreisbogen, der den ersten Winkel, und auf AC einen Bogen, der den zweiten Winkel in sich schließt; dann schneiden sich die Bögen in A und M, und M muß der gesuchte Punkt sein. Da jedoch diese Construction auf dem Felde nicht anwendbar ist, so wollen wir den Winkel BAM und die Entfernung AM durch Rechnung bestimmen. Folgende Methode, bei welcher zuerst die Winkel ABM und ACM gesucht werden, dürfte die einfachste sein.

Es seien die gegebenen Größen $AB = a$, $AC = b$, $BAC = A$, $AMB = \alpha$, $AMC = \beta$, und die gesuchten $ABM = x$, $ACM = y$.

In dem Viereck ABMC hat man

$$x + y = 360^0 - (A + \alpha + \beta):$$

somit ist die Summe der Winkel x und y bekannt. Suchen wir nun ihre Differenz.

In den Dreiecken ABM und ACM erhält man

[1] $\sin \alpha : \sin x = a : AM$, $\sin \beta : \sin y = b : AM$.

Indem man die Werthe für AM einander gleich setzt, erhält man

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta}, \text{ oder } \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

Man setze $a' = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$, wo a' logarithmisch leicht zu berechnen ist; dann erhält man

$$\frac{b}{a'} = \frac{\sin x}{\sin y}, \text{ woraus } \frac{b + a'}{b - a'} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y};$$

also (Nro. 40)

$$\frac{b + a'}{b - a'} = \frac{\tang \frac{1}{2}(x + y)}{\tang \frac{1}{2}(x - y)}.$$

Da nun die Summe $x + y$ bekannt und die Differenz $x - y$ durch die letzte Gleichung gegeben ist, so kann man x und y leicht finden. Dann ist aber Winkel $BAM = 180^0 - (\alpha + x)$, und die Entfernung AM läßt sich aus einer der Proportionen [1] finden.

## Relationen zwischen den Winkeln und Seiten eines sphärischen Dreiecks.

**93.** Fundamental-Gleichung. Die Theile eines auf einer gegebenen Kugelfläche verzeichneten sphärischen Dreiecks sind bekannt, wenn man die Anzahl der Grade, welche jeder derselben enthält, kennt. Die

Auflösung der Aufgaben über sphärische Dreiecke hängt also von den Relationen ab, welche zwischen den Zahlen für diese Grade, d. h. zwischen den trigonometrischen Zahlen für den Sinus, Cosinus ꝛc. stattfinden. Es soll nun zuerst die Formel, welche einen beliebigen Winkel mit den drei Seiten in Beziehung bringt, entwickelt und dann gezeigt werden, wie sich daraus die Auflösung aller Fälle, die sich bei sphärischen Dreiecken ergeben können, ableiten läßt. Die Winkel sind immer mit A, B, C, und die Gegenseiten derselben beziehungsweise mit a, b, c bezeichnet.

Es sei O (Fig. 26) der Mittelpunkt der Kugelfläche, auf welcher das Dreieck liegt: man ziehe die Halbmesser OA, OB, OC; errichte auf OA die Senkrechten AD und AE, die eine in der Ebene OAB, die andere in der Ebene OAC, und nehme an, sie treffen die verlängerten Halbmesser OB und OC in D und E. Nun ist Winkel DAE gleich dem Winkel A des sphärischen Dreiecks, und indem man OA als Einheit annimmt, erhält man $AD = \text{tang } c$, $OD = \sec c$, $AE = \text{tang } b$, $OE = \sec b$.

Dieß vorausgesetzt, ergeben die Dreiecke DAE und DOE nach (Nro. 66)

$$AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos A = DE^2,$$
$$OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cdot \cos a = DE^2.$$

Nun ziehe man die erste Gleichung von der zweiten ab, beachte ferner, daß

$$OD^2 - AD^2 = OE^2 - AE^2 = 1,$$

setze für die Linien ihre trigonometrischen Bezeichnungen, und dividire durch 2, so ergibt sich

$$1 - \sec b \sec c \cos a + \text{tang } b \text{ tang } c \cos A = 0:$$

Da aber $\sec b = \frac{1}{\cos b}$, $\text{tang } b = \frac{\sin b}{\cos b}$, $\sec c = \frac{1}{\cos c}$, $\text{tang } c = \frac{\sin c}{\cos c}$; so erhält man

$$1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\sin b \sin c \cos A}{\cos b \cos c} = 0,$$

woraus

[1] $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Dieß ist die Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie.

**94.** Die Seiten c und b sind in der Figur kleiner als $90^0$, aber es läßt sich leicht zeigen, daß die Formel [1] allgemein ist. Nehmen wir an, eine der Seiten, z. B. b oder AC sei größer als $90^0$ (Fig. 27): nun vollende man die Halbkreise CAC′ und CBC′, und bilde so das Dreieck ABC′, dessen Seiten a′ und b′, oder BC′ und AC′ Supplemente von a und b sind, und dessen Winkel BAC′ ein Supplement von A ist. Da die Seiten b′ und c kleiner als $90^0$ sind, so läßt sich die Formel [1] auf das Dreieck ABC′ anwenden, und man erhält

$$\cos a' = \cos b' \cos c + \sin b' \sin c \cos BAC'.$$

Nun ist

$$a' = 180^0 - a,\ b' = 180^0 - b,\ BAC' = 180^0 - A;$$

substituirt man diese Werthe und vertauscht die Vorzeichen in den Gliedern der Gleichung mit den entgegengesetzten, so verfällt man wieder auf die Formel [1]; sie gilt also auch für den Fall, daß $b > 90^0$ ist.

Angenommen, die beiden Seiten b und c seien größer als $90^0$ (Fig. 28), so verlängere man die Seiten AB und AC bis zu ihrem Durchschnittspunkt A', und bilde das Dreieck BCA', in welchem Winkel A' gleich A, und die Seiten b' und c' die Supplemente von b und c sind. Die Formel [1] läßt sich auf dieses Dreieck anwenden, indem man $180^0 - b$ und $180^0 - c$ für b und c setzt, ohne daß diese Substitutionen eine Aenderung in derselben hervorbringen.

Endlich läßt sich die Gültigkeit der Formel auch für die Fälle darthun, wo eine der beiden Seiten b und c, oder jede derselben $= 90^0$ ist. Da sie indessen für Werthe, die $90^0$ so nahe kommen können, als man will, richtig ist, so muß sie offenbar auch für diese besondern Fälle giltig sein.

**95.** Da sich die Formel [1] auf jede der Seiten des Dreiecks anwenden läßt, so erhält man auf diese Weise drei Gleichungen, mittelst welcher immer drei beliebige Stücke gefunden werden können, wenn die drei andern gegeben sind. Für die Anwendungen ist es jedoch nothwendig, die verschiedenen Relationen zwischen vier Stücken des Dreiecks für jeden möglichen Fall besonders zu erhalten. Es gibt im Ganzen nur vier verschiedene Combinationen, die wir nun nach einander vornehmen wollen.

**96.** 1) Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel. Diese ist in der bereits gefundenen Gleichung enthalten, welche durch die Vermutation der Buchstaben in drei zerfällt, nämlich

[1] $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$

[2] $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$

[3] $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$

**97.** 2) Relation zwischen zwei Seiten und ihren zwei Gegenwinkeln. Um diese, der Combination a, b, A, B entsprechende Relation zu erhalten, muß man in [1 und 2] c eliminiren. Dieß könnte zwar dadurch geschehen, daß man die Werthe für sin c und cos c entwickelt und dann in der Gleichung $\sin^2 c + \cos^2 c = 1$ substituirt; folgende Rechnung, ähnlich der in Nro. 67, ist jedoch einfacher.

Die Gleichung [1] gibt

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$ ferner

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$
$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c},$$
$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

also

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Es findet hier für das Vorzeichen des Wurzelwerthes keine Zweideutigkeit statt; denn da die Winkel und Seiten kleiner sind als $180^0$, so sind ihre Sinus positiv. Da das zweite Glied constant bleibt, wenn man A und a in B und b, und umgekehrt, oder auch in C und c und umgekehrt, verwandelt, so folgt daraus

[4] $$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c};$$

also verhalten sich in einem sphärischen Dreiecke die Sinus der Winkel, wie die Sinus ihrer Gegenseiten.

**98.** 3) Relation zwischen zwei Seiten, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und einem ihrer Gegenwinkel. Man nehme die Combination a, b, C, A. Zuerst eliminirt man cos c aus [1 und 3], so ergibt sich

$$\cos a = \cos a \cos b^2 + \cos b \sin a \sin b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Bringt man cos a cos $b^2$ auf die linke Seite und beachtet, daß cos a — cos a $\cos^2 b$ = cos a $\sin^2 b$, dividirt das Ganze durch sin a sin b, so erhält man

$$\frac{\cos a \sin b}{\sin a} = \cos b \cos C + \frac{\sin c \cos A}{\sin a}.$$

Aber $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$; somit erhält man für die gesuchte Relation

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Es lassen sich hier verschiedene Permutationen zwischen den Buchstaben vornehmen, wodurch man im Ganzen sechs Gleichungen erhält, nämlich:

[5] $\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A,$

[6] $\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B,$

[7] $\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A,$

[8] $\cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C,$

[9] $\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B,$

[10] $\cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C.$

**99.** 4) Relation zwischen einer Seite und den drei Winkeln. Um diese letzte der vier Relationen zu erhalten, eliminire man b und c aus den Gleichungen [1, 2, 3], und setze zu diesem Ende den aus der dritten genommenen Werth für cos c in die erste; so ergibt sich wie oben:

$$\frac{\cos a \sin b}{\sin a} = \cos b \cos C + \frac{\sin c \cos A}{\sin a};$$

und diese Relation geht mittelst der Gleichungen

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \text{ und } \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A},$$

leicht in folgende über:

$$\cos a \sin B = \cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C.$$

Führt man dieselben Rechnungen an der Gleichung [2] aus, oder vielmehr, vertauscht man in der letzten a und A mit b und B, und umgekehrt, so ergibt sich

$$\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C.$$

Man darf jetzt nur noch cos b aus den beiden vorigen Gleichungen wegschaffen, so findet man nach den vorgenommenen Reductionen die gesuchte Relation zwischen A, B, C und a, welche, auf die drei Winkel nach einander angewendet, folgende drei Gleichungen gibt:

[11] $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$

[12] $\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$

[13] $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$

**100.** Diese Gleichungen haben mit der Fundamentalgleichung eine auffallende Uebereinstimmung, die auf eine bemerkenswerthe Folgerung führt. Denken wir uns ein sphärisches Dreieck A'B'C', dessen Seiten a'b'c' die Supplemente der Winkel A, B, C sind; so hat man vermöge der Formel [1]

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A';$$

aber $\sin a' = \sin A$, $\cos a' = -\cos A$, $\sin b' = \sin B$, u. s. f.;

folglich

$$-\cos A = \cos b \cos C + \sin B \sin C \cos A'.$$

Man kann daraus für cos A' einen dem Werth für cos a in [11] gleichen Werth mit entgegengesetztem Vorzeichen erhalten: somit ist $a = 180^0 - A'$; ebenso $b = 180^0 - B'$ und $c = 180^0 - C'$. Ist daher ein sphärisches Dreieck gegeben, und man bildet ein zweites, dessen Seiten die Supplemente zu den Winkeln des ersten sind, so sind umgekehrt die Seiten des ersten auch die Supplemente zu den Winkeln des zweiten Dreiecks.

Aus diesem Grunde heißen die beiden Dreiecke Ergänzungs- oder Supplementärdreiecke. In der Geometrie wird gezeigt, daß jedes

derſelben beſchrieben werden kann, indem man die drei Spitzen des einen Dreiecks als Pole des andern nimmt; wegen dieſer Eigenſchaft heißt jedes der beiden Dreiecke auch Polardreieck des andern.

**101.** Neper'ſche Analogien. Es ſollen noch die Proportionen entwickelt werden, die unter dem Namen der Neper'ſchen Analogien bekannt ſind und zur Vereinfachung einiger Fälle in der ſphäriſchen Trigonometrie gebraucht werden.

Die Gleichungen [1 und 2] geben

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B,$$

woraus man durch Diviſion und mit Rückſichtnahme auf $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ erhält

$$\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\cos a - \cos b \cos c} = \frac{\sin A \cos B}{\sin B \cos A}.$$

Bringt man dieſe Gleichung in Form einer Proportion und ſetzt die Verhältniſſe aus der Differenz der Glieder zur Summe derſelben einander gleich, ſo ergibt ſich durch leicht zu bemerkende Umformungen

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} \times \frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \frac{\sin (A - B)}{\sin (A + B)}.$$

Nach bekannten Formeln (aus Nro. 40, 37, 29) hat man aber

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b),$$
$$\frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} c},$$
$$\sin (A + B) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B),$$
$$\sin (A - B) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B);$$

ſubſtituirt man dieſe Werthe, ſo erhält man:

$$[\alpha] \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Aus der Proportion $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$ erhält man ferner

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B},$$

und dieſe läßt ſich (nach Nro. 40, 39) in folgende umformen:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)}.$$

Multiplicirt man zuerst die Gleichung [α] durch diese, dividirt ferner eben dieselben durch einander, so bleiben in beiden Fällen nur Quadrate. Indem man nun die Wurzeln auszieht und beachtet, daß wegen der Gleichung [α] tang $\frac{1}{2}$ (a + b) und cos $\frac{1}{2}$ (A + B) dasselbe Vorzeichen haben müssen, so erhält man

$$[14] \quad \text{tang } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang } \tfrac{1}{2}c \, \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)},$$

$$[15] \quad \text{tang } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang } \tfrac{1}{2}c \, \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Um diese Formel auch auf das Polardreieck anzuwenden, ersetze man a, b, c, A, B durch $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$, $180^0 - a$, $180^0 - b$; so ergibt sich:

$$[16] \quad \text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B) = \cot \tfrac{1}{2}C \, \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$[17] \quad \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-B) = \cot \tfrac{1}{2}C \, \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Diese vier Gleichungen sind die von Neper gefundenen Proportionen oder Analogien. Man bedient sich der zwei erstern, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind, und der beiden letzteren, wenn man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt.

**102.** Relationen zwischen den Theilen eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks. Um die für das rechtwinklige Dreieck geeigneten Formeln zu erhalten, genügt es, in den oben gefundenen Gleichungen, welche den Winkel A enthalten, $A = 90^0$ zu setzen. Auf diese Weise findet man:

| | | | |
|---|---|---|---|
| [a] | $\cos a = \cos b \cos c$, | | Nro. 96 [1]. |
| [b] | $\sin b = \sin a \sin B$, | $\sin c = \sin a \sin C$, | Nro. 97 [4]. |
| [c] | $\text{tang } b = \text{tang } a \cos C$, | $\text{tang } c = \text{tang } a \cos B$, | Nro. 98 [5,7]. |
| [d] | $\text{tang } b = \sin c \text{ tang } B$, | $\text{tang } c = \sin b \text{ tang } C$, | Nro. 98 [9, 10]. |
| [e] | $\cos B = \sin C \cos b$, | $\cos C = \sin B \cos c$, | Nro. 99 [12, 13]. |
| [f] | $\cos a = \cot B \cot C$, | | Nro. 99 [11]. |

Diese sechs unterschiedene Formeln sind für die logarithmische Rechnung gleich bequem. Die erste enthält eine Relation zwischen der Hypotenuse und den beiden andern Seiten; die zweite zwischen der Hypotenuse, einer Seite und ihrem Gegenwinkel; die dritte zwischen der Hypotenuse, einer Seite und ihrem anliegenden Winkel; die vierte zwischen den beiden Seiten und dem Gegenwinkel der einen; die fünfte zwischen einer Seite und den beiden schiefen Winkeln, und endlich die sechste zwischen der Hypotenuse und den beiden schiefen Winkeln. So hat man, wenn von den fünf Stücken zwei bekannt sind, immer eine Formel, um jedes andere beliebige Stück zu finden.

**103.** Es sind hier noch gewisse Eigenschaften der rechtwinkligen Dreiecke anzuführen:

1) Die Formel [a] erfordert, daß cos a das Vorzeichen des Productes cos b cos c habe: deßwegen müssen entweder alle drei Cosinus, oder nur ein einziger, positiv sein. *In einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck sind also entweder alle drei Seiten kleiner als 90°, oder es sind zwei Seiten größer und die dritte ist kleiner als 90°.*

2) Die Formeln [d] zeigen, daß tang b dasselbe Vorzeichen wie tang B, und tang c dasselbe wie tang C hat. *Jede Seite des rechten Winkels ist also mit ihrem Gegenwinkel gleichartig, d. h. die Seite und ihr Gegenwinkel sind entweder beide kleiner, oder beide größer als 90°.*

## Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

**104.** Ein sphärisches Dreieck kann zwei, oder selbst drei rechte Winkel enthalten; im letztern Falle sind die drei Seiten Quadranten. Im ersten Falle sind die Gegenseiten der beiden rechten Winkel ebenfalls Quadranten, und der dritte Winkel, der die dritte Seite zum Maße hat, muß ebenso viel Grade enthalten, wie diese Seite. Diese beiden Fälle geben also zu keiner Aufgabe Anlaß, und es kann nur von dem sphärischen Dreieck, das blos einen rechten Winkel enthält, die Rede sein. Um dasselbe zu bestimmen, braucht man von den fünf Stücken nur zwei zu kennen, weßhalb sechs Fälle zu betrachten sind.

**105. Erster Fall.** *Die Hypotenuse a und eine Cathete b sei gegeben, man soll c, B und C finden.*

Hier sind die Relationen [a, b, c]$^{\top}$ anzuwenden; diese ergeben

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \qquad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Da es sich hier um Bögen und Winkel handelt, die nicht über 180° gehen können, und es innerhalb dieser Grenze nur einen einzigen Bogen gibt, der einem gegebenen Cosinus entspricht, so folgt daraus, daß c und C sich ohne Zweideutigkeit bestimmen lassen. In Betreff des Winkels B, der durch seinen Sinus bekannt ist, scheint es, man könnte ihn sowohl spitzig als stumpf nehmen; aber nach den Bemerkungen in Nro. 103 muß er mit der gegebenen Seite b gleichartig sein.

**106. Zweiter Fall.** *Die beiden Catheten b und c seien gegeben, man soll die Hypotenuse a und die beiden Winkel B und C finden.*

Aus den Relationen [a und d] erhält man

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b};$$

und es ist klar, daß hier keine Zweideutigkeit stattfindet.

**107. Dritter Fall.** Die Hypothenuse a und ein anliegender Winkel B seien gegeben, man soll b, c und C finden.

Aus den Relationen [b, c, f] erhält man

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B, \quad \cot C = \cos a \operatorname{tang} B.$$

Bei c und C ist keine Zweideutigkeit, und die Seite b muß mit B gleichartig sein (Nro. 103).

**108. Vierter Fall.** Die Cathete b und ihr Gegenwinkel B seien gegeben, man soll a, c, C finden.

Mittelst der Relationen [b, d, e] hat man

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Hier ist eine Zweideutigkeit wegen der Sinus, und man sieht leicht, daß sie stattfinden muß. Denn wenn das in A rechtwinklige Dreieck BAC (Fig. 29) der Aufgabe entspricht, so verlängere man BA und BC bis zu ihrem Durchschnittspunkte D, nehme dann $DA' = BA$ und $DC' = BC$; so sind die Dreiecke BAC und DA'C' in allen ihren Theilen einander gleich, also ist Winkel A' ein rechter, und $C'A' = CA = b$. Somit ist das Dreieck BA'C' rechtwinklig und enthält auch die zwei gegebenen Stücke B und b. Man kann also beliebig $a < 90^0$ oder $a > 90^0$ nehmen; ist aber einmal die Wahl getroffen, so bestimmt die Relation $\cos a = \cos b \cos c$, von welcher Art c ist, und damit muß auch C gleichartig sein.

Ist $b = B$, so hat man nur ein einziges Dreieck, das zwei rechte Winkel hat; ist $\sin b > \sin B$, so gibt es gar keines.

**109. Fünfter Fall.** Eine Cathete b und ihr anliegender Winkel C seien gegeben, man soll a, c, B finden.

Aus den Relationen [c, d, e] findet man

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C}; \quad \operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C, \quad \cos B = \cos b \sin C,$$

woraus sich a, c und B ohne Zweideutigkeit ergibt.

**110. Sechster Fall.** Die beiden schiefen Winkel B und C seien gegeben, man soll a, b, c finden.

Die Gleichungen [f und e] geben

$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Diese Werthe enthalten keine Zweideutigkeit, und wenn das Dreieck unmöglich ist, so deuten sie dieß an.

**111.** Bemerkung. Mehrere Fälle lassen sich auf das rechtwinklige Dreieck zurückführen.

1) Wenn in einem sphärischen Dreieck drei Stücke gegeben sind, unter welchen eine Seite gleich $90^0$ ist, so muß der entsprechende Winkel im Polardreieck ein rechter sein. Ferner kennt man zwei der fünf andern Stücke dieses Dreiecks; man kann es also nach dem Vorigen auflösen: aber durch die Auflösung dieses Dreiecks läßt sich offenbar auch das erste finden.

2) Ist ein Dreieck gleichschenklig, so werden die beiden gleichen Seiten nur als ein Element gezählt, und ebenso ihre Gegenwinkel; man braucht dann zur Bestimmung des Dreiecks blos zwei Stücke. Zieht man nun von der Spitze des Dreiecks auf die Mitte seiner Grundlinie einen größten Kreisbogen, so wird dasselbe in zwei rechtwinklige, in allen ihren Theilen gleiche Dreiecke getheilt, und in jedem derselben kennt man außer dem rechten Winkel zwei Stücke; die gleichschenkligen Dreiecke lassen sich also mittelst der rechtwinkligen Dreiecke auflösen.

3) Es sei ABC (Fig. 30) ein sphärisches Dreieck, in welchem $a + b = 180^0$. Verlängert man a und c bis zu ihrem Durchschnittspunkt D, so hat man $a + CD = 180^0$, also $CD = b$. Durch jedes bekannte Stück des Dreiecks ABC ist nun auch eines in dem gleichschenkligen Dreieck ACD gegeben und umgekehrt; die Auflösung eines Dreiecks, in welchem die Summe zweier Seiten gleich $180^0$ ist, läßt sich also auf die eines gleichschenkligen, und somit auch auf die eines rechtwinkligen Dreiecks zurückführen.

4) Dasselbe ist von einem sphärischen Dreieck zu bemerken, in welchem zwei Winkel Supplemente zu einander sind. Denn es kann nicht $a+b=180^0$ sein, ohne daß zugleich $A + B = 180^0$ wäre, und umgekehrt. Wirklich ist in dem gleichschenkligen Dreieck ACD der Winkel $CAD = D = B$; da nun $CAD + CAB = 180^0$, so muß in dem Dreieck ABC auch $A + B = 180^0$ sein.

## Auflösung der sphärischen Dreiecke überhaupt.

**112. Erster Fall.** Es seien die drei Seiten a, b, c gegeben, man soll die Winkel A, B, C finden.

Um z. B. A zu erhalten, gibt die Gleichung [1] Nro. 96

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

man erhält jedoch einen für die Logarithmen bequemeren Ausdruck, wenn man, wie bei den ebenen Dreiecken, $\sin \frac{1}{2}A$, $\cos \frac{1}{2}A$ oder $\operatorname{tang} \frac{1}{2}A$ sucht.

Man nehme daher die Formel (Nro. 31) $2\sin^2 \frac{1}{2}A = 1 - \cos A$, und setze darin den Werth für $\cos A$, so erhält man

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos b \cos c + \sin b \sin c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

In der bekannten Formel

$$\cos q - \cos p = 2\sin \tfrac{1}{2} (p + q) \sin \tfrac{1}{2} (p - q)$$

(Nro. 39) mache man $p = a$ und $q = b - c$, so erhält man

$\cos (b - c) - \cos a = 2\sin \frac{1}{2} (a+b-c) \sin \frac{1}{2} (a-b+c)$; also

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a + b - c) \sin \frac{1}{2} (a - b + c)}{\sin b \sin c}}.$$

Zur Abkürzung setze man $a + b + c = 2s$, so hat man

$$a + b - c = 2 (s - c), \quad a - b + c = 2 (s - b);$$

folglich hat man statt der vorigen Formel

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}};$$

ebenso ergibt sich

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}};$$

und somit

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}.$$

**113. Zweiter Fall.** Zwei Seiten a und b, nebst einem Gegenwinkel derselben A seien gegeben, man soll c, B und C finden.

Man erhält zuerst den Winkel B, der b gegenüber liegt, aus der Proportion

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B, \text{ woraus } \sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

Nun ist es am geeignetsten, c und C durch die Neper'schen Analogien (Nro. 101) zu bestimmen; diese geben

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - b) \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} (A - B)},$$

$$\cot \tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A - B) \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} (a - b)}.$$

Da der Winkel B durch seinen Sinus gefunden wird, so kann er spitzig oder stumpf sein. Doch gibt es für gewisse Werthe der gegebenen Größen a, b, A nur ein Dreieck. Wir werden in einem besondern Paragraphen (Nro. 118) auf diese Discussion, die der für den zweiten Fall der ebenen Dreiecke (Nro. 75) analog ist, zurückkommen.

Man kann auch C direct durch die Gleichung [5] in Nro. 98 finden

$$\cot A \sin C + \cos b \cos C = \cot a \sin b.$$

Zu diesem Zweck bestimme man zuerst einen Hülfswinkel $\varphi$, indem man $\cot A = \cos b \cot \varphi$ setzt, woraus

$$\cot \varphi = \frac{\cot A}{\cos b};$$

dann substituire man in der Gleichung [5] den Werth für

$$\cot A = \cos b \cot \varphi = \frac{\cos b \cos \varphi}{\sin \varphi};$$ diese gibt

$$\cos b (\sin C \cos \varphi + \cos C \sin \varphi) = \cot a \sin b \sin \varphi.$$

Daraus erhält man

$$\sin (C + \varphi) = \frac{\operatorname{tang} b \sin \varphi}{\operatorname{tang} a};$$

man kennt also $C + \varphi$; es sei nun $C + \varphi = m$, so ist $C = m - \varphi$.

Ist C gefunden, so erhält man die Seite c aus der Proportion

$$\sin A : \sin C = \sin a : \sin c.$$

Will man aber c direct berechnen, so muß man die Gleichung [1] in Nro. 96 anwenden:

$$\cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c = \cos a.$$

Man reducirt, wie vorhin, das erste Glied mittelst eines Hülfswinkels $\varphi$ auf einen einzigen Ausdruck, indem man $\cos A \sin b = \cos b \cot \varphi$ setzt, woraus

$$\cot \varphi = \cos A \operatorname{tang} b.$$

Somit erhält man

$$\cos b (\sin \varphi \cos c + \cos \varphi \sin c) = \cos a \sin \varphi,$$

oder

$$\sin (c + \varphi) = \frac{\cos a \sin \varphi}{\cos b};$$

also erhält man c leicht, nachdem einmal $\varphi$ berechnet ist.

**114. Dritter Fall.** Zwei Seiten a, b, und der eingeschlossene Winkel C seien gegeben, man soll A, B, c finden.

Die Formeln [5 und 6] in Nro. 98 ergeben für A und B

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C}, \quad \cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos a \cos C}{\sin C}.$$

Durch Anwendung von Hülfswinkeln läßt sich leicht jeder Zähler in einen eingliedrigen Ausdruck verwandeln. Es ist jedoch einfacher, die Analogien Neper's (Nro. 101) anzuwenden:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A + B) = \cot \tfrac{1}{2}C \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A - B) = \cot \tfrac{1}{2}C \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)}.$$

Daraus ergibt sich $\frac{1}{2}(A + B)$ und $\frac{1}{2}(A - B)$, somit auch A und B.

Sind einmal diese Winkel gefunden, so erhält man c leicht aus der Proportion sin A : sin C = sin a : sin c. Will man aber c unmittelbar erhalten, so nehme man die Formel (Nro. 96)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

in welcher man $\sin b \cos C = \frac{\cot b \cos \varphi}{\sin \varphi} = \cot b \cot \varphi$ setzt. Dann ergibt sich ohne weitere Zweideutigkeit

$$\cot \varphi = \text{tang } b \cos C, \quad \cos c = \frac{\cos b \sin (a + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

**115. Vierter Fall.** Es seien zwei Winkel A und B mit der anliegenden Seite c gegeben, man soll a, b, C finden.

Man kann a und b durch die Formeln [7 und 9] in Nro. 98 finden:

$$\cot a = \frac{\cot A \sin B + \cos B \cos c}{\sin c}, \quad \cot b = \frac{\cot B \sin A + \cos A \cos c}{\sin c};$$

doch noch besser mittelst der Neper'schen Analogien:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a + b) = \text{tang } \tfrac{1}{2}c \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a - b) = \text{tang } \tfrac{1}{2}c \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)}.$$

Dann erhält man C aus der Proportion

$$\sin a : \sin c = \sin A : \sin C.$$

Will man c unmittelbar, so nehme man die Formel (Nro. 99)

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B,$$

und setze $\sin B \cos c = \cos B \cot \varphi$, so ergibt sich

$$\cot \varphi = \operatorname{tang} B \cos c, \quad \cos C = \frac{\cos B \sin (A - B)}{\sin \varphi}.$$

Dieser Fall ist dem dritten analog und ohne Zweideutigkeit.

**116. Fünfter Fall.** Es seien zwei Winkel A und B, nebst der Gegenseite a von einem derselben gegeben, man soll b, c, C finden.

Dieser Fall ist dem zweiten ganz analog, läßt sich ebenso behandeln, und bietet dieselben Zweideutigkeiten dar.

Man leitet b ab aus der Proportion $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$, und erhält c und C aus den schon (Nro. 113) gebrauchten Formeln:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - b) \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} (A - B)},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A - B) \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} (a - b)}.$$

Die Seite c erhält man auch aus der Gleichung [7] in Nro. 98

$$\cot a \sin c - \cos B \cos c = \cot A \sin B,$$

in welcher man $\cot a = \cos B \cot \varphi$ macht; dann ergibt sich

$$\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos B}, \quad \sin (c - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} B \sin \varphi}{\operatorname{tang} A}.$$

Endlich kann man auch C finden aus

$$\sin a : \sin c = \sin A : \sin C,$$

oder (Nro. 99) mittelst der Gleichung

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A.$$

Hier verwandelt man zuerst die linke Seite der Gleichung in einen einzigen Ausdruck, indem man $\cos a \sin B = \cos B \cot \varphi$ setzt; so ergibt sich:

$$\cot \varphi = \cos a \operatorname{tang} B, \quad \sin (C - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}.$$

Diese Werthe bestimmen $\varphi$, $C - \varphi$, und somit auch C.

**117. Sechster Fall.** Es seien die drei Winkel A, B, C gegeben, man soll die drei Seiten finden.

Dieser Fall läßt sich durch ähnliche Rechnungen wie beim ersten auflösen. Um z. B. a zu erhalten, bedient man sich der Gleichung [11] in Nro. 99; diese gibt zuerst

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Hierauf sucht man durch die in dem angeführten Falle angewandten Rechnungen die Ausdrücke für $\sin \frac{1}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}a$, $\tang \frac{1}{2}a$, welche zur logarithmischen Rechnung bequemer sind. Setzt man

$$A + B + C = 180^0 + 2S,$$

so sind diese Ausdrücke folgende:

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin S \,(\sin A - S)}{\sin B \,\sin C}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin (B-S)\,\sin (C-S)}{\sin B \,\sin C}},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin S \,\sin (A-S)}{\sin (B-S)\,\sin (C-S)}}.$$

Die große Uebereinstimmung dieser drei letzten Fälle mit den drei ersten folgt auch daraus, daß sie, vermöge der Eigenschaften des Polardreiecks (Nro. 100) auf dieselben zurückgeführt werden können.

## Ueber die zweifelhaften Fälle bei sphärischen Dreiecken.

**118.** Die einzigen Fälle, bei welchen über die Art der unbekannten Stücke eine Ungewißheit stattfindet, sind der zweite und fünfte. Es soll nun untersucht werden, aus welchen Kennzeichen man schließen kann, ob zwei Auflösungen oder nur eine möglich sind, oder ob sogar das Dreieck unmöglich ist; wobei Folgendes zur Begründung vorausgehen möge.

Auf einer Kugelfläche sei ein Halbkreis DCD′ (Fig. 31), der auf einem ganzen Kreis DHD′ senkrecht steht; man nehme $CD < 90^0$, und ziehe vom Punkte C nach den verschiedenen Punkten der Peripherie DHD′ Bögen größter Kreise, wie CB, CB′, CH, . . . .; ferner verlängere man CD, bis $C'D = CD$, und ziehe C′B. Nun haben die Dreiecke CDB und C′DB einen rechten Winkel zwischen gleichen Seiten, also ist $CB = C'B$. Aber da $CDC' < CB + BC'$, so muß auch $CD < CB$ sein. Folglich ist 1) *der Bogen CD der kleinste, den man vom Punkte C an die Peripherie DHD′ ziehen kann, und somit CD′ der größte.*

Es sei $DB' = DB$; da nun die Dreiecke CDB und CDB′ zwischen gleichen Seiten auch einen rechten Winkel einschließen, so ist $CB = CB'$. *Also sind 2) die schiefen Bögen, die von CD oder CD′ gleich weit abstehen, einander gleich.*

Endlich sei $DH > DB$; man ziehe C′H und verlängere CB bis I auf C′H. Da der Bogen CC′ kleiner ist als ein Halbkreis, so muß er mit der Verlängerung von CB auf der andern Seite von C′ zusammentreffen; deßhalb muß der Durchschnittspunkt I zwischen H und C′ liegen. Man hat also $C'B < C'I + IB$, und somit $C'B + BC < C'I + IC$. Aber da $IC < HI + HC$, und daher $C'I + IC < C'H + HC$, so ist um so mehr $C'B + BC < C'H + HC$. Aber $C'B = BC$ und $C'H = HC$;

folglich hat man $BC < HC$. Also sind 3) die schiefen Bögen um so größer, je weiter sie von CD abstehen, oder je mehr sie sich CD' nähern.

**119.** Es soll nun ein sphärisches Dreieck aus zwei gegebenen Seiten a, b und dem Winkel A, der a gegenüber liegt, construirt werden.

Vorerst ist zu bemerken, daß gewisse unmögliche Fälle durch die Rechnung selbst angedeutet sind. Um diese kennen zu lernen, mache man (in Fig. 32 und 33) den Winkel $CAB = A$ und $AC = b$, verlängere AC und AB bis zu ihrem Durchschnittspunkte E, und fälle CD senkrecht auf AE. Der Bogen CD muß von derselben Art sein, wie der Winkel A (Nro. 103); ist also A spitzig, so ist CD die kürzeste Entfernung vom Punkte C zum Halbkreis AE, und die größte, wenn A stumpf ist (Nro. 118, 1). Bei der ersten Voraussetzung wird das Dreieck unmöglich, wenn $a < CD$, wo dann $\sin a < \sin CD$; und bei der zweiten wird es unmöglich, wenn $a > CD$, wobei wieder $\sin a < \sin CD$ ist. In dem rechtwinkligen Dreieck ACD hat man aber

$$1 : \sin b = \sin A : \sin CD, \text{ oder } \sin CD = \sin b \sin A;$$

unter diesen beiden Voraussetzungen hätte man also $\sin a < \sin b \sin A$. Ferner erhält man, wenn der Winkel B des unbekannten Dreiecks ACB gesucht wird,

$$\sin a : \sin A = \sin b : \sin B, \text{ oder } \sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a};$$

dieser Werth von B wäre also $> 1$, was offenbar eine Unmöglichkeit andeutet.

Wäre $a = CD$ gegeben, so wäre blos das rechtwinklige Dreieck ACD möglich, was ebenfalls der Werth von $\sin B$ anzeigt, da $\sin B = 1$ wird. Dabei ist vorausgesetzt, daß Winkel A nicht gleich $90^0$ ist.

**120.** Lassen wir nun diese Fälle bei Seite und untersuchen die verschiedenen Beziehungen, die aus der Größe der gegebenen a, b, A hervorgehen.

Es sei $A < 90^0$ und $b < 90^0$ (Fig. 32); somit ist auch $AD < 90^0$ (Nro 103), also $AD < DE$. Dieß angenommen, und wenn noch $a < b$ ist, so ist klar, daß man zwischen CA und CD einen Bogen $CB = a$, und wieder zwischen CD und CE einen andern $CB' = CB = a$, ziehen kann: das heißt, es lassen sich mit den nämlichen gegebenen Stücken a, b, A zwei Dreiecke ACB und ACB' construiren. Ist $a = b$, so verschwindet das Dreieck ACB, und es bleibt nur noch ACB'. Hat man $a + b = 180^0$, oder $a + b > 180^0$, so fällt der Punkt B' auf E oder darüber hinaus, und dann entsteht kein Dreieck.

Auf dieselbe Weise behandelt man auch die andern Hypothesen. Die Resultate sind alle in folgender Uebersicht zusammengestellt. Das Zeichen $\gtrless$ bedeutet gleich oder größer als, und das Zeichen $\lessgtr$ gleich oder kleiner als.

$$A < 90^0 \begin{cases} b < 90^0 \begin{cases} a < b & \text{zwei Auflösungen.} \\ a \geqslant b & \text{eine Auflösung, es wäre denn } a+b \geqslant 180^0. \\ a+b \geqslant 180^0 & \text{keine.} \end{cases} \\ b > 90^0 \begin{cases} a+b < 180^0 & \text{zwei Auflösungen.} \\ a+b \geqslant 180^0 & \text{eine Auflösung, es wäre denn } a \geqslant b. \\ a \geqslant b & \text{keine.} \end{cases} \\ b = 90^0 \begin{cases} a < b & \text{zwei Auflösungen.} \\ a \geqslant & \text{keine.} \end{cases} \end{cases}$$

$$A > 90^0 \begin{cases} b < 90^0 \begin{cases} a+b > 180^0 & \text{zwei Auflösungen.} \\ a+b \leqslant 180^0 & \text{eine Auflösung, es wäre denn } a \leqslant b. \\ a \leqslant b & \text{keine.} \end{cases} \\ b > 90^0 \begin{cases} a > b & \text{zwei Auflösungen.} \\ a \leqslant b & \text{eine Auflösung, es wäre denn } a+b \leqslant 180^0. \\ a+b \leqslant 180^0 & \text{keine.} \end{cases} \\ b = 90^0 \begin{cases} a > b & \text{zwei Auflösungen.} \\ a \leqslant b & \text{keine.} \end{cases} \end{cases}$$

$$A = 90^0 \begin{cases} b < 90^0 \begin{cases} a > b & \text{eine Auflösung, es wäre denn } a+b \geqslant 180^0. \\ a \leqslant b & \text{keine.} \\ a+b \geqslant 180^0 & \text{keine.} \end{cases} \\ b > 90^0 \begin{cases} a < b & \text{eine Auflösung, es wäre denn } a+b \leqslant 180^0. \\ a \geqslant b & \text{keine.} \\ a+b \leqslant 180^0 & \text{keine} \end{cases} \\ b = 90^0 \begin{cases} a \neq 90^0 & \text{unendlich viel Auflösungen.} \\ a < \text{ oder } > 90^0 & \text{keine.} \end{cases} \end{cases}$$

**121.** Vermöge der Eigenschaft des Polardreiecks lassen sich diese Resultate auch auf das Dreieck anwenden, von welchem A, B, a gegeben ist, was den fünften Fall bildet (Nro. 116). Nur muß man a, b, A in A, B, a, das Zeichen $>$ in $<$, und $<$ in $>$ verwandeln.

Wenn die gegebenen Stücke einen der Fälle bilden, für welche es nur eine Auflösung geben kann, so zeigt die Rechnung doch immer auch deren zwei an; um aber diejenige, welche beizubehalten ist, heraus zu finden, darf man nur darauf Rücksicht nehmen, daß die größeren Winkel auch den größeren Seiten gegenüber stehen müssen, und umgekehrt.

Angenommen, die gegebenen Stücke seien $A = 112^0$, $a = 102^0$, $b = 106^0$. Unter den Fällen, die sich in der obigen Tabelle auf $A > 90^0$ beziehen, kommt bei denjenigen insbesondere, wo $b > 90^0$, der Fall in Betracht, wo $a \leqslant b$.

Außerdem ist zu beachten, daß

$$a + b = 208; \text{ also } a + b > 180^0.$$

Nun folgert man nach der Tabelle, daß nur eine Auflösung statt findet, und da $b > a$, so ist auch $B > A$, also B ein stumpfer Winkel.

## Anwendung der sphärischen Trigonometrie.

**122. Erstes Beispiel.** (Fig. 34.) Einen Winkel auf den Horizont zu reduciren.

Es sei BAC ein in einer schiefen Ebene liegender Winkel, und AD die durch seinen Scheitel A gehende Senkrechte. Man beschreibe eine beliebige horizontale Ebene MN, welche die Linien AB, AC und AD in E, F und G treffen: nun ist der Winkel EGF die Horizontalprojection des Winkels BAC, oder mit andern Worten, der Winkel BAC ist auf den Horizont reducirt. Es soll nun dieser Winkel EGF berechnet werden, wenn die Winkel BAC, BAD und CAD durch Messung bekannt sind.

Die graphische Auflösung wäre leicht: denn da die Linie AG beliebig sein kann, so genügt das Gegebene, um zuerst die rechtwinkligen Dreiecke EAG und FAG, dann das Dreieck EAF, und endlich EGF zu construiren.

Die Berechnung des Winkels ist ebenso leicht. Beschreibt man mit einem beliebigen Halbmesser aus dem Mittelpunkt A eine Kugeloberfläche, so bestimmen die Geraden AB, AC, AD ein sphärisches Dreieck BCD, dessen Seiten durch die gegebenen Winkel in Graden bekannt sind, und dessen Winkel BDC nichts anderes ist als der gesuchte Winkel EGF. Die Aufgabe läßt sich also durch den ersten Fall für sphärische Dreiecke überhaupt (Nro. 112) auflösen, nämlich mittelst der Formel

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}},$$

wo $a = BAC$, $b = BAD$, $c = CAD$, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Es sei $a = 47^0\,45'\,39''$, $b = 69^0\,49'\,19''$, $C = 80^0\,17'\,36''$; so hat man $2s = 197^0\,52'\,34''$, $s = 98^0\,56'\,17''$, $s - b = 29^0\,6'\,58''$, $s - c = 18^0\,38'\,41''$, was folgende Rechnung gibt:

| | |
|---|---|
| L. sin (s — b) . . . . | 9,6871552 |
| L. sin (s — c) . . . . | 9,5047412 |
| L.′ sin b . . . . . | 0,0275078 |
| L.′ sin c . . . . . | 0,0062623 |
| 2L. sin $\frac{1}{2}$A . . . . . | 19,2256665 |
| L. sin $\frac{1}{2}$A . . . . . | 9,6128332 |

$\frac{1}{2}A = 24^0\,12'\,27,''9$

$A = 48^0\,24'\,56''.$

**123. Zweites Beispiel.** (Fig. 35.) Die Breite und Länge zweier Punkte auf der Erdoberfläche ist gegeben, man soll die Entfernung dieser zwei Punkte finden.

Es seien A und B die beiden Punkte. Man nehme an, QR sei der Aequator, C der Nordpol, und CED, CFD die Meridiane der beiden Punkte; endlich werde noch angenommen, die Längengrade werden vom Punkt P aus in der Richtung PEF gezählt.

Der Unterschied PF — PE der Längengrade ist gleich dem Bogen EF oder dem zwischen den beiden Meridianen enthaltenen Winkel C, und die Bögen AC, BC sind die Complemente der gegebenen Breitengrade AE, BF. Also kennt man in dem sphärischen Dreieck ABC den Winkel C mit den einschließenden Seiten, und es ist die dritte Seite AB zu finden. Nach Nro. 114 wird aber BA oder c bestimmt durch die Formeln:

$$\cot\varphi = \operatorname{tang} b \cos C, \qquad \cos c = \frac{\cos b \sin(a+\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Es sei z. B. die Entfernung von Brest nach Cayenne zu finden; nun liegt Brest unter dem 6° 49′ 0″ westliche Länge (von Paris aus), und 48° 23′ 14″ nördlicher Breite, Cayenne unter dem 54° 35′ 0″ westlicher Länge (von Paris aus), und 4° 56′ 15″ nördlicher Breite.

Aus diesen Angaben erhält man zuerst

$$C = 54^\circ\,35' - 6^\circ\,49' = 47^\circ\,46'$$
$$a = 90^\circ - 48^\circ\,23'\,14'' = 41^\circ\,36'\,46''$$
$$b = 90^\circ - 4^\circ\,56'\,15'' = 85^\circ\,3'\,45'';$$

woraus c folgendermaßen gesucht wird:

Berechnung des Hülfswinkels $\varphi$.

| | |
|---|---|
| L. cos C . . . . . | 9,8274671 |
| L. tang b . . . . . | 11,0635386 |
| L. cot $\varphi$ . . . . . | 10,8910057 |

$$\varphi = 7^\circ\,19'\,26''$$
$$a+\varphi = 48^\circ\,56'\,12''.$$

Berechnung der Seite c.

| | |
|---|---|
| L. cos b . . . . . | 8,9348468 |
| L. sin (a+$\varphi$) . . . . . | 9,8773621 |
| L.′ sin $\varphi$ . . . . . | 0,8945642 |
| L. cos c. . . . . | 9,7067731 |

$$c = 59^\circ\,23'\,54'',38.$$

Also beträgt der Bogen, der die Entfernung zwischen Brest und Cayenne mißt, 59°23′54″,38. Um dieselbe in Myriameter auszudrücken,

setze man, da der Quadrant des Erdmeridians 10 000 000 Meter oder 1000 Myriameter enthält, die Proportion an

$$90 : 59^0\ 29'\ 54'',38 = 1000 : x;$$

dann ist, indem man die Bögen in Secunden ausdrückt

$$x = \frac{213834{,}38 \times 1000}{324000} = 659{,}983^{\text{myr.}}.\ *$$

Diese letzte Berechnung wäre leicht gewesen, wenn der Bogen c in Centesimalgraden ausgedrückt worden wäre. Es sei z. B. nach dieser Eintheilung ein Bogen von $37^0\ 45'\ 69''$; dieser ist in Decimaltheilen des Quadranten $= 0{,}374569$, und indem man diese Zahl durch die Zahl der Myriameter, welche der Quadrant enthält, multiplicirt, erhält man sogleich durch bloßes Verrücken des Kommas, $374{,}569^{\text{myr.}}$.

Weitere Anwendungen der Trigonometrie suche man in Werken, die für diesen Gegenstand besonders bestimmt sind.

---

* Um diesen Bogen in deutschen Meilen zu erhalten, multiplicirt man, da 40 000 000 Meter oder 4000 Myriameter = 5400 deut. Meil., also 1 Myriameter = 1,35 deut. Meil., obiges Resultat mit 1,35; so erhält man 659,983 . 1,35 = 890,97705 deut. Meil. Unmittelbar würde man dieses Resultat durch die Proportion erhalten:

$$360 : 59^0\ 23'\ 54'',38 = 5400 : x,$$

$$\text{oder } 360 \cdot 60 \cdot 60'' : 213834'',38 = 5400 : x,$$

$$\text{also } x = \frac{213834{,}38 \cdot 5400}{360 \cdot 60 \cdot 60} = 890{,}977$$

Anmerk. d. Ueberf.

# Drittes Kapitel.

## Einige in der höhern Mathematik gebrauchte Formeln. Entwicklung der Reihen für den Sinus und Cosinus. Auflösung der Binomialgleichung und der Gleichung des dritten Grades.

### Moivre'sche Formel. Mehrfache Bedeutung derselben.

**124.** Diese Formel, welche den Namen des französischen Mathematikers, der sie entdeckt hat, führt, ist folgende:

$$[A] \quad (\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi;$$

d. h. um das Binom $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ auf irgend eine Potenz zu erheben, darf man nur den Bogen $\varphi$ mit dem Exponenten dieser Potenz multipliciren. Man kann dabei beliebig $+$ oder $-$ vor $\sqrt{-1}$ setzen; denn dadurch ändert sich blos $\varphi$ in $-\varphi$.

Da blos der Fall, wo der Exponent eine ganze, positive Zahl ist, in der Folge vorkommt; so soll mit der Betrachtung desselben angefangen werden. Durch Multiplication erhält man

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)\,(\cos\psi + \sqrt{-1}\,\sin\psi) =$$
$$\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi + \sqrt{-1}\,(\sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi).$$

Nun ist nach bekannten Formeln [Nro. 26] der reelle Theil dieses Products gleich $\cos(\varphi+\psi)$, und der imaginäre Theil gleich

$$\sqrt{-1}\,\sin(\varphi+\psi);\ \text{also ist}$$

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)\,(\cos\psi + \sqrt{-1}\,\sin\psi) =$$
$$\cos(\varphi+\psi) + \sqrt{-1}\,\sin(\varphi+\psi);$$

das heißt, wenn man zwei Ausdrücke von der Form $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ mit einander multiplicirt, so erhält man wieder einen ähnlichen Ausdruck, in welchem die beiden Bögen zusammen addirt sind. Um das Product mit einem neuen Factor von derselben Form zu multipliciren, darf man also

nur den neuen Bogen zu den beiden andern addiren, und so fort, wie groß auch die Zahl der Factoren sein mag. Nimmt man also an, es seien n Factoren, alle gleich $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$, so erhält man

[1] $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi.$

Betrachten wir nun den Fall, wo der Exponent ein Bruch ist. Indem man $\frac{\varphi}{n}$ für $\varphi$ setzt, gibt die Formel [1]

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi;$$

zieht man hierauf die nte Wurzel aus, und setzt anstatt des Wurzelzeichens einen gebrochenen Exponenten, so ist die Formel [A] für den Exponenten $\frac{1}{n}$ bewiesen; denn man erhält

[2] $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi}{n}.$

Im Allgemeinen bezeichnet der Ausdruck $A^{\frac{m}{n}}$, man solle A auf die mte Potenz erheben und aus dem Resultat die nte Wurzel ziehen; erhebt man daher $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ auf die mte Potenz nach der Formel [1], und zieht hierauf nach der Formel [2] die nte Wurzel, so ergibt sich

[3] $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi}{n}.$

Dieß ist die Formel [A], wenn n in einen beliebigen positiven Bruch $\frac{m}{n}$ verwandelt wird.

Ist endlich der Exponent negativ, so beachte man, daß

$$(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi)\,(\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,\sin n\varphi) =$$
$$\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = 1,$$

und hieraus erhält man

$$\frac{1}{\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi} = \cos n\varphi - \sqrt{-1}\,\sin n\varphi,$$

oder, was dasselbe ist

[4] $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + \sqrt{-1}\,\sin(-n\varphi).$

Also ist die Formel [A] richtig, man mag für n eine beliebige positive oder negative Zahl nehmen.

Die irrationalen Exponenten wurden weggelassen, da sie keine Bedeutung haben, wofern man nicht commensurable Zahlen, die übrigens einander beliebig nahe kommen können, dafür setzt; und was die imaginären Exponenten betrifft, so sind sie an und für sich keiner Deutung fähig.

**125.** Die Formel [A], so einfach und elegant sie erscheint, ist doch sehr mangelhaft, wenn der Exponent ein Bruch ist. Denn das erste Glied, das dann einem Wurzelwerth gleich kommt, muß mehrere Werthe haben, und doch gibt das zweite Glied nur einen. Folgende Erörterungen sollen diesen Mangel beseitigen.

Nehmen wir noch einmal die Formel [2], in welcher n eine positive ganze Zahl ist. Nach den Regeln der Algebra muß dann das erste Glied, das $\sqrt[n]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}$ wird, n verschiedene Werthe haben, und damit das zweite sie alle gebe, genügt es, wie gezeigt werden soll, daß man in demselben für $\varphi$ alle Bögen setzt, die denselben Sinus und Cosinus, wie $\varphi$ selbst, haben.

Der allgemeine Ausdruck für diese Bögen ist $\varphi + kC$, wo C den ganzen Kreisumfang, und k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Setzt man $\varphi + kC$ anstatt $\varphi$, so erhält man für das zweite Glied der Formel [2]

$$[5] \qquad \cos\frac{\varphi + kC}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi + kC}{n},$$

und in diesem Zustande muß es genau dieselben Werthe enthalten, wie das erste Glied.

Denn da erstlich n eine ganze Zahl ist, so muß man offenbar nach der Formel [1], wenn man dieses zweite Glied auf die nte Potenz erhebt, wieder auf $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ verfallen.

Setzt man ferner nach einander $k = 0,\ k = 1,\ k = 2, \ldots k = n - 1$, so erhält man n verschiedene Werthe. Es seien z. B. zwei solcher beliebiger Werthe

$$\cos\frac{\varphi+\alpha C}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi+\alpha C}{n} \text{ und } \cos\frac{\varphi+\beta C}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi+\beta C}{n},$$

in welchem $\alpha$ und $\beta$ ganze Zahlen und $< n$ sind. Sollten die Werthe gleich sein, so müßte eine besondere Gleichung zwischen den reellen, und wieder eine zwischen den imaginären Theilen stattfinden; also müßte die Differenz der beiden Bögen $\frac{\varphi + \alpha C}{n}$ und $\frac{\varphi + \beta C}{n}$ einem oder mehreren Kreisumfängen gleich sein; aber diese Differenz $\frac{(\alpha - \beta)\,C}{n}$ ist kleiner als C; da sowohl $\alpha$ als $\beta < n$ ist.

Nimmt man endlich für k andere Zahlen als $0, 1, 2 \ldots n - 1$, so wird man keine neuen Werthe finden. Denn alle positiven oder negativen ganzen Zahlen lassen sich darstellen durch die Formel $n\gamma + n'$, wo $\gamma$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl und n' eine positive ganze Zahl $< n$ bezeichnet; setzt man nun $k = n\gamma + n'$, so wird der Ausdruck [5]

$$\cos\left(\gamma C + \frac{\varphi + n'C}{n}\right) + \sqrt{-1}\,\sin\left(\gamma C + \frac{\varphi + n'C}{n}\right),$$

oder auch, indem man die überflüssigen Kreisumfänge wegläßt,

$$\cos\frac{\varphi + n'C}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{\varphi + n'C}{n}\right),$$

und da n' eine positive Zahl $< n$ ist, so ist dieser Werth unter denen enthalten, die sich ergaben, als man $k = 0, 1, 2, \ldots . n - 1$ setzte.

Somit muß das zweite Glied der Formel [2] jede wünschenswerthe Allgemeinheit erhalten, wenn man darauf Bedacht nimmt, daß man für den Bogen $\varphi$ nicht allein diesen Bogen selbst, sondern auch die Bögen $\varphi + C'$, $\varphi + 2C \ldots . \varphi + (n - 1)\,C$ setzt.

Die Formel [3] muß ebenfalls auf ähnliche Weise erklärt werden. Man erhielt sie, indem man $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ auf die mte Potenz erhob und aus dem Resultat die nte Wurzel zog. Aber die Formel [1], die für einen positiven ganzen Exponenten gilt, gibt zuerst $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\,\sin m\varphi$, und dann gibt die Formel [2] für die nte Wurzel

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi}{n} + \cos\sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi}{n}.$$

Damit jedoch das zweite Glied dieselbe Ausdehnung erhalte, wie das erste; so muß man nach der vorigen Erklärung darin $m\varphi + kC$ anstatt $m\varphi$ setzen, oder was dasselbe ist, $m\varphi$ nach einander durch $m\varphi + C$, $m\varphi + 2C \ldots . m\varphi + (n - 1)C$ ersetzen. *

Will man die Formel [3] gebrauchen, um aus dem Ausdruck $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ die nte Wurzel zu ziehen, und dann diese Wurzel auf die mte Potenz zu erheben, so bedarf es noch einiger Erklärung. Läßt sich der Bruch $\frac{m}{n}$ nicht vereinfachen, so kann man die Formel [3] unmittelbar gebrauchen; denn wenn die Zahlen m und n relative Primzahlen sind, so beweist die Algebra, daß $(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$ ist. Läßt sich aber der Bruch $\frac{m}{n}$ vereinfachen, und es ist seine einfachste Form $\frac{p}{q}$, so beweist

---

* Auf der zweiten Seite der Formel [3] läßt man der größeren Bestimmtheit und Eleganz wegen den Bogen $\frac{m\varphi}{n}$ stehen; denn genau genommen, sollte man in derselben $\frac{m\varphi + kC}{n}$ setzen. Daraus ist zu ersehen, daß man sich wohl hüten muß, den Bruch $\frac{m}{n}$ auf seine einfachste Form zu bringen. Diese Reduction ist übrigens im ersten Glied ebenso wenig gestattet; denn man darf in demselben den Exponenten nicht als einen Bruch, sondern als eine Andeutung betrachten, daß der Zähler m eine Potenz bezeichnet, die man zuerst bilden soll, und der Nenner n eine Wurzel, die hernach auszuziehen ist.

man, daß $(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[q]{A^p} = A^{\frac{p}{q}}$ ist; um also die Formel [3] anzuwenden, muß man zuerst den Bruch $\frac{m}{n}$ in seiner einfachsten Form ausdrücken, und dieselbe so schreiben:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p\varphi}{q} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{p\varphi}{q}.$$

Würde man $\frac{m}{n}$ in der Formel beibehalten, so wäre das erste Glied gleich einem Wurzelwerth vom nten Grad, der n verschiedene Werthe hätte, während er deren nur eine Anzahl von q haben darf. Es ist übrigens überflüssig zu bemerken, daß man, wie oben gesagt wurde, nach $p\varphi$ sich den Ausdruck $+ kC$ gesetzt denken muß.

**126.** Sind die Zahlen m und n relative Primzahlen, so ist, wie schon bemerkt $(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m}$; das heißt, das Radiciren und Potenziren kann in beliebiger Ordnung ausgeführt werden. Zieht man zuerst nach der Formel [2] die nte Wurzel aus $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$, und potenzirt dann mit m nach der Formel [1], so ergibt sich

$$\left(\sqrt[n]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi}\right)^m = \cos\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi}{n};$$

und dann ist zu beachten, daß für $\varphi$ im zweiten Gliede $\varphi + kC$ zu setzen ist. Wenn dagegen zuerst nach Formel [1] die mte Potenz genommen, und dann nach Formel [2] die nte Wurzel ausgezogen wird, so ergibt sich

$$\sqrt[n]{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^m} = \cos\frac{m\varphi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi}{n};$$

und dann muß man $m\varphi$ durch $m\varphi + kC$ ersetzen. Daraus ergibt sich als nothwendige Folge, daß die beiden Ausdrücke

$$\cos\frac{m(\varphi + kC)}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m(\varphi + kC)}{n},$$

$$\cos\frac{m\varphi + kC}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\varphi + kC}{n},$$

in welchen k eine beliebige ganze Zahl ist, vollkommen gleichbedeutend sein müssen, sobald m und n relative Primzahlen sind. Dieß würde sich indessen direct herausstellen, wenn man nach einander $k = 1, 2, 3 \ldots (n - 1)$ setzen und zeigen würde, daß bei der Division von m, 2m, 3m .... (n — 1)m durch n alle Reste von einander verschieden sind.

**127.** Das Vorhergehende zeigt, mit welcher Vorsicht man die Moivre'sche Formel gebrauchen muß. Ist der Exponent ein Bruch $\frac{m}{n}$, so

nimmt man der Einfachheit wegen gewöhnlich m und n als relative Primzahlen an; aber selbst in diesem Falle darf man nie übersehen, daß zu m und mφ noch Vielfache des Kreisumfangs zu addiren sind. Diese Aufmerksamkeit ist besonders in der unter dem Namen der Winkelschnitte (sections angulaires) bekannten Theorie nothwendig. Wegen solcher Fehler, sagt Poinsot, haben manche Schriftsteller gewisse Schwierigkeiten, die man in diesem Theil der Analyse fand, nicht vorgesehen, und die, welche sie gefunden, haben sie nicht immer gelöst.

### Formeln für sin nφ und cos nφ, $(\sin\varphi)^n$ und $(\cos\varphi)^n$.

**128.** Nehmen wir noch einmal die Moivre'sche Formel [Nro. 124]

[1] $\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n$,

in welcher n als eine ganze Zahl angenommen wird. Aendert man φ in $-\varphi$, so ergibt sich

[2] $\cos n\varphi - \sqrt{-1}\,\sin n\varphi = (\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n$.

Addirt man diese Gleichung zur vorigen, und zieht sie dann von derselben ab, so erhält man folgende Werthe:

[3] $$\cos n\varphi = \frac{(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n + (\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n}{2},$$

[4] $$\sin n\varphi = \frac{(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n - (\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

**129.** Man kann die Potenzen nach der Binomialformel entwickeln, dann erhält man, indem die sich aufhebenden Glieder weggelassen werden:

[5] $$\cos n\varphi = (\cos\varphi)^n - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(\cos\varphi)^{n-2}(\sin\varphi)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\cos\varphi)^{n-4}(\sin\varphi)^4 - \text{u. s. f.}$$

[6] $$\sin n\varphi = \frac{n}{1}(\cos\varphi)^{n-1}\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(\cos\varphi)^{n-3}(\sin\varphi)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}(\cos\varphi)^{n-5}(\sin\varphi)^5 - \text{u. s. f.}$$

Diese Formeln drücken den Sinus und Cosinus des vielfachen Bogens nφ als Funktion vom Sinus und Cosinus des einfachen Bogens aus. Das Gesetz, wie die Glieder auf einander folgen, ist klar, und sie müssen, wie die Binomialformel, von welcher sie abgeleitet sind, so lange fortlaufen, bis ein Glied zu Null wird.

Man kann zu diesen Gleichungen auch blos mittelst der Gleichung [1] kommen. Denn die Entwicklung des zweiten Gliedes gibt einen reellen und einen mit $\sqrt{-1}$ behafteten Theil, und damit die Gleichung statt habe, müssen in beiden Gliedern die reellen Theile unter sich, und wieder die imaginären unter sich gleich sein, was zu den beiden Formeln führt.

**130.** Bei den Anwendungen der höheren Mathematik braucht man oft den $(\sin\varphi)^n$ und $(\cos\varphi)^n$ als Funktion von Sinus und Cosinus vielfacher Bögen ausgedrückt. Ist n eine ganze positive Zahl, was der gewöhnliche Fall ist, so gelangt man hinzu auf folgende Weise. Man setze

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi = u, \text{ und } \cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi = v;$$

so ist

$$2\cos\varphi = u + v, \quad 2\sqrt{-1}\,\sin\varphi = u - v, \text{ also}$$

$$2^n(\cos\varphi)^n = (u+v)^n, \quad (2\sqrt{-1})^n\,(\sin\varphi)^n = (u-v)^n,$$

oder, indem man die Potenzen entwickelt,

$$[7] \qquad 2^n(\cos\varphi)^n = u^n + \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{n-2}v^2 + \text{u. s. f.}$$

$$[8] \quad (2\sqrt{-1})^n(\sin\varphi)^n = u^n - \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{n-2}v^2 - \text{u. s. f.}$$

Für den Augenblick betrachten wir nur die Formel [7] und nehmen an, n sei eine ungerade Zahl $2m+1$. Aus der Algebra ist bekannt, daß die von den äußersten gleich weit entfernten Glieder gleiche Coefficienten haben, und daß die Zahl der Glieder für diese Formel $2m+1$ ist. Daraus ergibt sich leicht, wenn man die zweite Hälfte der Glieder in umgekehrter Ordnung nimmt und sie unter die erste schreibt,

$$2^n(\cos\varphi)^n = u^n + \frac{n}{1}u^{n-1}v \ldots + \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,m}u^{m+1}\,v^m$$
$$+ v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u \ldots + \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,m}u^m\,v^{m+1},$$

oder, was dasselbe ist

$$2^n(\cos\varphi)^n = (u^n+v^n) + \frac{n}{1}uv(u^{n-2}+v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4})$$
$$+ \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\quad\ldots\ldots\quad m}u^m\,v^m\,(u+v).$$

Aber die Moivre'sche Formel gibt allgemein

$$u^k+v^k = (\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)^k + (\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\sin\varphi)^k$$
$$= \cos k\varphi + \sqrt{-1}\,\sin k\varphi + \cos k\varphi - \sqrt{-1}\,\sin k\varphi = 2\cos k\varphi;$$

ferner sind die Potenzen des Products uv gleich 1, denn man hat

$$uv = (\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi)\,(\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\sin\varphi) = \cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1.$$

Also vereinfacht sich nach diesen Bemerkungen der Ausdruck $2^n(\cos\varphi)^n$, und indem man alle Glieder mit 2 dividirt, ergibt sich

$$[9]\quad 2^{n-1}(\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)\varphi$$
$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}\cos\varphi.$$

Nehmen wir zweitens an, n sei eine gerade Zahl 2m. Nun hat die Formel [7] 2m+1 Glieder; zerlegt man den mittlern Ausdruck in zwei andere, von denen jeder die Hälfte dieses Glieds ist, so findet man mittelst ähnlicher Reductionen wie die vorigen

$$[10]\quad 2^{n-1}(\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)\varphi$$
$$\ldots\ldots + \tfrac{1}{2}\frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}.$$

Betrachten wir jetzt die Formel [8]. Die Glieder haben abwechslungsweise das Vorzeichen + und −; so daß, wenn n eine ungerade Zahl 2m + 1 ist, die von den äußersten gleich weit entfernten Glieder gleiche Coefficienten, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Nun erhält man durch Folgerungen wie für die Formel [7], folgende Gleichung:

$$(2\sqrt{-1})^{2m+1}(\sin\varphi)^{2m+1} = u^n - v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} - v^{n-2}) +$$
$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^2v^2(u^{n-4} - v^{n-4}) \ldots \pm\frac{n(n-1)(n-2)\,..\,(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}u^mv^m(u-v).$$

Um die Reductionen auszuführen, ist wieder zu bemerken, daß $uv=1$, und daß allgemein $u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\,k\varphi$ ist. Folglich sind die beiden Glieder durch $2\sqrt{-1}$ theilbar, und es bleibt

$$[11]\ (2\sqrt{-1})^{2m}(\sin\varphi)^{2m+1} = \sin n\varphi - \frac{n}{1}\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(n-4)\varphi$$
$$\ldots\ldots \pm\frac{n(n-1)\,(n-2)\,..\,(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}\sin\varphi.$$

Ist n eine gerade Zahl 2m, so haben die von den äußersten gleich entfernten Glieder in der Formel [8] gleiche Coefficienten und gleiche Vorzeichen; und indem man hier schließt, wie in dem analogen Fall der Formel [7], ergibt sich leicht

$$[12]\ \tfrac{1}{2}(2\sqrt{-1})^{2m}(\sin\varphi)^{2m} = \cos n\varphi - \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)\varphi$$
$$\ldots\ldots \pm\tfrac{1}{2}\frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}.$$

Die Formeln [9, 10, 11, 12], die hier zu entwickeln waren, dienen dazu, die Potenzen eines Sinus oder Cosinus in eine Reihe von Gliedern zu verwandeln, von denen jedes den Sinus oder Cosinus eines vielfachen Bogens blos im ersten Grade enthält.

Es wird wohl der Bemerkung nicht entgehen, daß, wenn in den zwei letzten Formeln die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ auf eine gerade Potenz erhoben, einen reellen Factor gleich $+1$ oder $-1$ ergeben muß, je nachdem m selbst gerade oder ungerade ist. Auch ist der bequemern Rechnung halber zu bemerken, daß man aufhören muß, dem durch die ersten Glieder angedeuteten Gesetze zu folgen, sobald sich ein Glied findet, das einen negativen Bogen enthält, und nur die Hälfte des letzten nimmt, wenn es den Bogen gleich Null enthält.

## Entwicklung des Sinus und Cosinus in Reihen.

**131.** Aus den Formeln [5 und 6] in Nro. 129 hat Euler die Reihen, welche den Sinus und Cosinus als Function des Bogens ausdrücken, folgendermaßen abgeleitet. Ohne daß n aufhört, eine ganze Zahl zu sein, kann man $\varphi$ so nehmen, daß $n\varphi$ einem beliebigen Bogen x gleich ist. Man setze also $n\varphi = x$, so ist $n = \frac{x}{\varphi}$, und dann lassen sich die Formeln so schreiben:

$$[1]\quad \cos x = (\cos\varphi)^n - \frac{x(x-\varphi)}{1.\,2}(\cos\varphi)^{n-2}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2 + \frac{x(x-\varphi)\,(x-2\varphi)\,(x-3\varphi)}{1.\,2.\quad 3.\quad 4}(\cos\varphi)^{n-4}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^4 - \text{u. s. f.}$$

$$[2]\quad \sin x = \frac{x}{1}(\cos\varphi)^{n-1}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) - \frac{x(x-\varphi)\,(x-2\varphi)}{1.\,2.\quad 3}(\cos\varphi)^{n-3}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^3 + \frac{x(x-\varphi)\,(x-2\varphi)\,(x-3\varphi)\,(x-4\varphi)}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}(\cos\varphi)^{n-5}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^5 - \text{u. s. f.}$$

Nehmen wir an, $\varphi$ nehme bis auf Null ab, so muß n ins Unendliche wachsen: dann behalten obige Formeln keine Spur von $\varphi$ und n, sondern enthalten nur noch den Bogen x. Dieß muß auch wirklich bei Formeln der Fall sein, durch welche der Sinus und Cosinus eines Bogens als Function dieses Bogens ausgedrückt werden soll. Wird $\varphi$ gleich Null, so ist $\cos\varphi = 1$, und auch $\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$ (Nro. 51). Nehmen wir an, die Potenzen von $\cos\varphi$ und $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ seien dann alle gleich 1, so groß auch die Exponenten sein mögen, so erhält man für obige Formeln

$$[3]\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{u. s. f.}$$

$$[4]\quad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{u. s. f.}$$

Da die Zahl n unendlich geworden ist, so folgt daraus, daß diese Reihen nicht aufhören dürfen. Sie sind aber deßhalb nicht minder geeignet, sehr nahe Werthe des Sinus und Cosinus zu geben, besonders wenn der Bogen x ein kleiner Bruch ist, und blos in diesem Falle machen die Mathematiker Gebrauch davon. *

**132.** Beim ersten Anblick scheint es klar, wie es auch angenommen wurde, daß alle Potenzen von $\cos\varphi$ und $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ die Einheit ergeben müssen, wenn man $\varphi$ bis auf Null abnehmen läßt. Bei näherer Betrachtung ergibt sich aber eine Schwierigkeit, die man auflösen muß, und die in Folgendem näher erörtert werden soll.

Es sei $u^v$ ein Ausdruck, in welchem u und v veränderliche Größen vorstellen, die ganz unabhängig von einander sind. Nimmt man für v eine constante positive Zahl, und läßt u von Null bis 1 wachsen, so muß der Werth $u^v$ selbst von 0 bis 1 wachsen. Bleibt dagegen u constant, aber $< 1$, und nimmt man für v sehr große Werthe, so ist die Größe $u^v$ sehr klein, und ihre Grenze, wofür $v = \infty$ ist, muß Null sein. Nehmen wir jetzt an, u wachse von 0 bis 1, während zugleich v bis $+\infty$ wächst; so läßt sich, so lange keine Beziehung zwischen u und v stattfindet, zwischen diesen veränderlichen Größen immer eine Verbindung denken, so daß die Grenze von $u^v$, die den Werthen $u = 1$ und $v = +\infty$ entspricht, entweder 0 oder 1, oder jede andere zwischen 0 und 1 befindliche Größe sein kann: d. h. es findet dann eine wirkliche Unbestimmtheit statt.

Die Sache verhält sich aber anders, wenn die Veränderlichen u und v nicht unabhängig sind. Sie seien z. B. Functionen von derselben Veränderlichen t, und durch die Aenderung von t wachse u bis 1, und v bis $+\infty$. Nun ist zu untersuchen, wie sich in dem Ausdruck $u^v$ die Vermehrung, welche die Zunahme von u bewirkt, gegen die Verminderung verhält, welche die Zunahme von v bewirkt; oder man muß wenigstens aus

---

* Diese beiden Reihen sind von der Art der convergenten. Um von einem Gliede zum folgenden zu gelangen, multiplicirt man stets dieses Glied mit $x^2$, und dividirt es durch zwei ganze Zahlen, die immer zunehmen (auf das Vorzeichen ist im Augenblick nicht Rücksicht genommen); dadurch weiß man, daß in jeder Reihe ein Glied vorkommen muß, von welchem an alle andern unbestimmt abnehmen. Da ferner die Glieder wechselsweise positiv und negativ sind, so ist offenbar der Fehler, wenn man mit irgend einem der abnehmenden Glieder in der Reihe aufhört, geringer als das folgende Glied; folglich kann dieser Fehler so klein gemacht werden, als man nur will. Ein weiteres Eingehen in diesen Gegenstand gehört in die Algebra.

der Zusammensetzung von u und v zu einer Function von t erkennen, nach welcher Grenze hin der Ausdruck $u^v$ sich neigt. Eben eine Schwierigkeit dieser Art ergibt sich nun, wenn man von den Formeln [1 und 2] zu den Reihen [3 und 4] übergeht.

Die beiden Veränderlichen sind hier $\varphi$ und n; sie sind unter sich durch die Gleichung $n\varphi = x$ verbunden, nach welcher das Product $n\varphi$ stets einem gegeben Bogen x, der beliebig genommen werden kann, gleich ist. Nun enthalten die Formeln [1 und 2] die Ausdrücke $(\cos\varphi)^n$, $(\cos\varphi)^{n-1}$, .... in welchen man zugleich $\varphi = 0$ und $n = +\infty$ machen muß; es läßt sich also nicht absehen, wie die Grenzen dieser Ausdrücke die Einheit sein können. Auf der andern Seite enthalten dieselben Reihen auch die wachsenden Potenzen des Verhältnisses $\sin\varphi$ zu $\varphi$, und wenn n unendlich groß ist, so haben die Reihen unendlich viele Glieder; folglich können die Exponenten dieses Verhältnisses bei den Gliedern der beiden Reihen bis ins Unendliche wachsen, und es ergibt sich noch einmal dieselbe Schwierigkeit. Folgende Erklärungen scheinen von jedem Einwurf frei zu sein.

Kehren wir noch einmal zu den Formeln [1 und 2] zurück, und setzen der Abkürzung wegen

$$F = (\cos\varphi)^{n-m}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^m;$$

so läßt sich das allgemeine Glied jeder dieser Formeln auf folgende Weise schreiben:

$$\pm\frac{x}{1}\left(\frac{x}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{2\varphi}{3}\right)\ldots\left(\frac{x}{m}-\frac{(m-1)\varphi}{m}\right)F,$$

wo m für die Formel [1] eine gerade, und für [2] eine ungerade Zahl vorstellt. Setzt man $\varphi = 0$, und bezeichnet das, was dann F wird, mit M, so ergibt sich als allgemeines Glied

$$[5] \qquad \pm\frac{Mx^m}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m},$$

wo also M bestimmt werden muß. Nehmen wir nun $\varphi$ kleiner als den Quadranten, was erlaubt ist, da man $\varphi = 0$ machen muß, so hat man $\varphi < \text{tang}\,\varphi$, und daher

$$F > (\cos\varphi)^{n-m}\left(\frac{\sin\varphi}{\text{tang}\,\varphi}\right)^m,$$

oder durch Vereinfachung

$$F > (\cos\varphi)^n.$$

Da aber $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$; also $\cos\varphi > \sqrt{1-\varphi^2}$, so ist

$$F > \sqrt{(1-\varphi^2)^{2n}}.$$

Entwickelt man die Potenz 2n, und beachtet daß $n\varphi = x$, so erhält man

$$(1-\varphi^2)^{2n} = 1 - \frac{2n}{1}\varphi^2 + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\varphi^4 - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\varphi^6 + \text{u. s. f.}$$

$$= 1 - \frac{2x}{1}\varphi + \frac{2x}{1}\left(\frac{2x}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\varphi^2 - \frac{2x}{2}\left(\frac{2x}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{2x}{3}-\frac{2\varphi}{3}\right)\varphi^3 + \text{u.s.f.}$$

Um zu der Voraussetzung $\varphi = 0$ zu gelangen, muß man zuerst $\varphi$ sehr klein annehmen; dann müssen offenbar die Glieder dieser Reihe abnehmen, und da sie wechselsweise positiv und negativ sind, so erhält man, wenn man sich auf die beiden ersten beschränkt, ein zu geringes Resultat, d. h. es ist $(1 - \varphi^2)^{2n} > 1 - 2\varphi x$, und um so mehr ist

$$F > \sqrt{1 - 2\varphi x}.$$

Setzt man $\varphi = 0$, so reducirt sich dieser Wurzelwerth auf 1, und F wird die Grenze von M; also kann M nicht kleiner als 1 sein. Da außerdem die Function F das Product zweier Factoren ist, die nicht größer als 1 sein können, so kann die Grenze M auch nicht $> 1$ werden, also ist $M = 1$. Somit ist endlich der allgemeine Ausdruck [5] der Reihen, die cos x und sin x ausdrücken,

$$\pm \frac{x^m}{1.2.3 \ldots m}.$$

Macht man hier $m = 0, 2, 4 \ldots$, oder auch $m = 1, 3, 5 \ldots$, und nimmt auf die Abwechslung der Vorzeichen Rücksicht, so erhält man alle Glieder der Reihen [3 und 4], welche auf diese Weise strenge bewiesen sind.

## Auflösung der binomischen Gleichungen. Lehrsatz von Côtes.

**133.** Es sei $y^n = \pm A$ eine binomische Gleichung; bezeichnet man irgend eine der nten Wurzeln von A mit a, und macht $y = ax$, so verwandelt sich die binomische Gleichung in $x^n = \pm 1$.

Betrachten wir zuvor den ersten Fall

[1] $$x^n = +1.$$

Setzt man

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi,$$

so gibt die Moivre'sche Formel

$$x^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi;$$

folglich ergeben alle Werthe von $\varphi$, welche bestimmt sind durch die Gleichung

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi = +1,$$

Werthe von x, die Wurzeln der Gleichung [1] sind. Für die von der Moivre'schen Formel hier gemachten Anwendung genügt es, wenn sie für ganze positive Exponenten bewiesen ist.

Um dieser letzten Gleichung zu genügen, muß der imaginäre Theil $\sqrt{-1}\sin n\varphi$ verschwinden, woraus folgt, daß $n\varphi$ ein Vielfaches des halben Kreisumfangs sein muß. Dann muß auch $\cos n\varphi = 1$ sein, weßhalb $n\varphi$ ein gerades Vielfache des Halbkreises sein muß; bezeichnet man also den Halbkreis mit H, und eine beliebige gerade Zahl mit 2k, so erhält man

$$n\varphi = 2kH; \text{ woraus } \varphi = \frac{2kH}{n},$$

und folglich

$$x = \cos\frac{2kH}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2kH}{n}.$$

Hätte man überall — vor $\sqrt{-1}$ gesetzt, so würde die Folgerung dieselbe gewesen sein; man erhält also Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$, indem man alle Werthe von x nimmt, die in dem Ausdruck

$$[\alpha] \qquad x = \cos\frac{2kH}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2kH}{n}$$

enthalten sind.

Die Gleichung [1] hat n Wurzeln, und bekanntlich sind alle diese Wurzeln ungleich. Nun kann man in der obigen Gleichung für k alle möglichen ganzen, positiven und negativen Werthe setzen, und es läßt sich zeigen, daß man für x auf diese Weise n verschiedene Werthe und nicht mehr erhält: diese n Werthe sind also die n Wurzeln der Gleichung [1].

Erstlich ist es unnöthig, für k negative Werthe zu nehmen; denn indem man — k für k setzt, verwandeln sich blos die beiden Werthe der Formel [α] der eine in den andern.

Zweitens ist es auch nicht nöthig, $k = n$ oder $> n$ zu setzen, denn man kann von k das größte Vielfache von n, das darin enthalten ist, wegnehmen; dadurch werden vom Bogen $\frac{2kH}{n}$ ein oder mehrere Kreisumfänge weggenommen, was weder den Cosinus noch den Sinus verändert.

Betrachtet man endlich zwischen 0 und n die Zahlen k' und $n - k'$, die von den ersteren gleich weit abstehen, so sind die entsprechenden Werthe von x die nämlichen.

Denn es sei $k = n - k'$, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= \cos\frac{2(n-k')H}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2(n-k')H}{n} \\ &= \cos\frac{-2k'H}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{-2k'H}{n} \\ &= \cos\frac{2k'H}{n} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{2k'H}{n}; \end{aligned}$$

und diese Werthe sind dieselben, wie die für $k = k'$. Es ist also nicht nöthig, für k Werthe $> \frac{1}{2}n$ zu setzen, und folglich kann man, man mag für n eine gerade Zahl 2p oder eine ungerade $2p + 1$ annehmen, sich darauf beschränken, daß man für k die Werthe $k = 0, 1, 2, \ldots p$ setzt.

Es bleibt nun in Folgendem zu beweisen, daß die Formel $[\alpha]$ auf diese Weise alle Wurzeln gibt, welche die Gleichung [1] in sich begreift.

Ist die Gleichung von der Form $x^{2p} = 1$, so verändert sich die Formel $[\alpha]$ in

$$x = \cos \frac{kH}{p} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{kH}{p}.$$

Für die äußersten Zahlen $k = 0$, und $k = p$, findet man $x = +1$, und $x = -1$. Für die Zwischenzahlen 1, 2, 3 . . . . $p - 1$, ist der Bogen zwischen 0 und $180^0$ enthalten; also wird der Sinus, der mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt wird, nicht Null, und somit sind die Werthe von x imaginär. Ferner gibt es unter diesen letztern keinen, der sich wiederholt; denn in den beiden zusammengehörigen Wurzeln, die zu demselben Paar gehören, d. h. die aus demselben Werth von k entstehen, hat die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ entgegengesetzte Vorzeichen, und bei den Paaren, die von verschiedenen Werthen von k herkommen, sind die reellen Theile verschieden, da sie die Cosinus von Bögen sind, die von 0 bis $180^0$ wachsen. Verbindet man mit diesen imaginären Werthen, deren Anzahl $2p - 2$ beträgt, die beiden reellen Werthe $+1$ und $-1$, so hat man im Ganzen 2p Wurzeln für die Gleichung $x^{2p} = 1$, wie dieß der Fall sein muß.

Hat die Gleichung [1] die Form $x^{2p+1} = 1$, so erhält man für die Gleichung $[\alpha]$

$$x = \cos \frac{2kH}{2p + 1} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2kH}{2p + 1}.$$

In diesem Fall gibt es nur eine einzige reelle Wurzel $x = +1$, welche $k = 0$ entspricht; alle andern sind imaginär, und überdieß muß offenbar die ganze Anzahl der Wurzeln gleich dem Exponenten $2p + 1$ sein.

Betrachten wir nun die Gleichung

[2] $$x^n = -1.$$

Setzt man

$$x = \cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi,$$

so erhält man

$$x^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi.$$

Also ergeben sich aus der Gleichung Wurzeln für x, indem $\varphi$ durch die Bedingung

$$\cos n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi = -1 \text{ bestimmt wird;}$$

deßhalb muß je besonders $\sin n\varphi = 0$ und $\cos n\varphi = -1$ sein. Daraus folgt, daß der Bogen $n\varphi$ ein ungerades Vielfache von H sein muß.

Setzt man deßwegen

$$n\varphi = (2k + 1)\,H, \text{ woraus } \varphi = \frac{(2k+1)\,H}{n},$$

so erhält man

$$[\beta] \qquad x = \cos\frac{(2k+1)\,H}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)\,H}{n}.$$

Man kann hier keine negativen Vielfache von H nehmen, denn es würden sich daraus dieselben Werthe für x ergeben, als wenn diese Vielfache positiv wären. Auch kann man nicht $k > n$ oder $k = n$ setzen; denn wenn man von k das darin enthaltene Vielfache von n abzieht, vermindert man den Bogen $\frac{(2k+1)\,H}{n}$ um einen oder mehrere ganze Kreisumfänge, was die Werthe in $[\beta]$ nicht ändert. Die Zahl $k = n - 1$ gibt

$$x = \cos\frac{(2n-1)\,H}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n-1)\,H}{n}$$

$$= \cos\frac{-H}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{-H}{n} = \cos\frac{H}{n} \mp \sqrt{-1}\,\sin\frac{H}{n}.$$

Diese Werthe sind dieselben, die man mittelst der Voraussetzung $k = 0$ erhält; wie überhaupt die Werthe für k, die von 0 und $n - 1$ gleich weit abstehen, dieselben Werthe von x geben. Denn wenn man $k = n - 1 - k'$ setzt, so ergibt sich

$$x = \cos\frac{(2n-2k'-1)\,H}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2n-2k'-1)\,H}{n}$$

$$= \cos\frac{(2k'+1)\,H}{n} \mp \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k'+1)\,H}{n},$$

welches Resultat man auch für $k = k'$ erhalten hätte. Daraus folgt, daß man alle Werthe von x erhält, wenn man für k Werthe setzt, die $\frac{1}{2}(n-1)$ nicht überschreiten. Ist also n eine gerade Zahl 2p, so muß man $k = 0, 1, 2 \ldots p - 1$ setzen, und ist n eine ungerade Zahl $2p + 1$, so macht man $k = 0, 1, 2, \ldots p$.

Für den Fall, wo $n = 2p$ ist, ist die aufzulösende Gleichung $x^{2p} = -1$, und die Zahlen $k = 0, 1, 2, \ldots p - 1$ ergeben in der Formel $[\beta]$ die zunehmenden Bögen

$$\frac{H}{2p}, \quad \frac{3H}{2p}, \quad \frac{5H}{2p}, \quad \ldots \quad \frac{(2p-1)\,H}{2p},$$

welche alle zwischen 0 und H enthalten sind; folglich ist kein Sinus derselben gleich Null, und ihre Cosinus sind alle ungleich. Jeder Bogen muß daher zwei imaginäre Werthe von x geben, die durch das Vorzeichen von $\sqrt{-1}$ von einander verschieden sind und sich nicht wiederholen können; x hat also 2p verschiedene Werthe.

Für den Fall, wo $n = 2p + 1$, ist die Gleichung $x^{2p+1} = -1$, und die Zahlen $k = 0, 1, 2, \ldots p$ bringen in die Formel $[\beta]$ die Bögen

$$\frac{H}{2p+1}, \quad \frac{3H}{2p+1}, \quad \ldots \quad \frac{(2p+1)H}{2p+1} \text{ oder } H.$$

Der letzte Bogen, der gleich H ist, gibt $x = -1$; für jeden der andern hat x zwei imaginäre Werthe, und man sieht leicht ein, daß von allen diesen Werthen sich keiner wiederholt; x hat somit $2p + 1$ Werthe.

**134.** Wenn man die Wurzeln der Gleichungen $x^n = +1$ und $x^n = -1$ kennt, so lassen sich die reellen Factoren des zweiten Grades von den Binomen $x^n - 1$ und $x^n + 1$ leicht finden.

Erstlich gibt die Formel $[\alpha]$ als Factoren des ersten Grades von dem Binom $x^n - 1$ die zwei Ausdrücke

$$x - \cos\frac{2kH}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2kH}{n}, \quad x - \cos\frac{2kH}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2kH}{n};$$

und indem man sie mit einander multiplicirt, erhält man

$$[\alpha'] \qquad x^2 - 2x\cos\frac{2kH}{n} + 1.$$

Diese Formel enthält alle reellen Factoren des zweiten Grades von dem Binom $x^n - 1$: um sie daraus abzuleiten, darf man nur anstatt k die positiven Zahlen von 0 bis $\frac{1}{2}n$ setzen.

Auf ähnliche Weise findet man für die Factoren des zweiten Grades von dem Binom $x^n + 1$ die Formel

$$[\beta'] \qquad x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)H}{n} + 1,$$

in welcher man für k alle positiven ganzen Zahlen von $k = 0$ bis zu $\frac{1}{2}(n-1)$ setzen muß.

Da die Formeln $[\alpha]$ und $[\beta]$ die reellen Wurzeln der Gleichungen $x^n = 1$ und $x^n = -1$ enthalten, so folgt daraus, daß die beiden letzten Formeln auch die reellen Factoren des ersten Grades der Binome $x^n - 1$ und $x^n + 1$ enthalten; wobei jedoch zu bemerken ist, daß sie darin ins Quadrat erhoben vorkommen. Setzt man z. B. in der Formel $[\alpha']$ $k=0$, so wird daraus $x^2 - 2x + 1$ oder $(x-1)^2$, wovon aber nur $x - 1$ genommen wird.

**135.** Lehrsatz von Côtes. Um diesen Lehrsatz zu begründen, ist zu bemerken, daß, wenn man in der Formel $[\alpha']$ für k alle Werthe $k = 0, 1, 2, \ldots$ bis $n - 1$ setzt, und die aus diesen Werthen sich ergebenden Trinome mit einander multiplicirt, man offenbar ein Product erhält, in welchem alle Factoren von $x^n - 1$ ins Quadrat erhoben sind, und folglich dieses Product gleich $(x^n - 1)^2$ ist. Ebenso, wenn man für

k in der Formel $[\beta']$ alle Werthe $k = 0, 1, 2 \ldots$ bis $n - 1$ setzt, so ist das aus allen Trinomen sich ergebende Product gleich $(x^n + 1)^2$.

Dieß vorausgesetzt, theile man einen beliebigen Kreisumfang in 2n gleiche Theile und bezeichne die Theilungspunkte durch die Ziffern 0, 1, 2, 3 ꝛc.; dann ziehe man an den Theilungspunkt 0, der als Anfangspunkt genommen wird, einen Halbmesser und verlängere diesen nöthigenfalls über den Theilungspunkt hinaus; auf diesem Halbmesser nehme man einen Punkt an in beliebiger Entfernung x vom Mittelpunkt, und ziehe von diesem Punkt aus gerade Linien nach allen Theilpunkten der Peripherie.

Hierauf nehme man den Halbmesser des Kreises als Einheit an, bezeichne eine dieser Geraden mit u, und betrachte das Dreieck, das sie mit den beiden Geraden, die ihre Endpunkte mit dem Mittelpunkt verbinden, bildet. Trifft sie in einen geraden mit 2k bezeichneten Theilungspunkt, so ist der zwischen diesem und dem Anfangspunkt 0 enthaltene Bogen $\frac{2H}{2n} \times 2k$ oder $\frac{2kH}{n}$, und man erhält, wie sich dieß leicht aus dem Dreieck ergibt

$$u^2 = x^2 - 2x \cos \frac{2kH}{n} + 1.$$

Trifft aber die Gerade u auf einen ungeraden Theilungspunkt, der mit $2k + 1$ bezeichnet sei, so erhält man

$$u^2 = x^2 - 2x \cos \frac{(2k + 1)\,H}{n} + 1.$$

Setzt man in diesen Trinomen anstatt k nach einander alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots n - 1$, so gibt das erste die Quadrate der Linien, die in die geraden Theilungspunkte treffen, und das zweite die Quadrate der in die ungeraden Theilungspunkte treffenden Linien. Diese Trinome sind aber die nämlichen wie $[\alpha']$ und $[\beta']$; es läßt sich daher nach dem oben Bemerkten der folgende, von Côtes gefundene Lehrsatz folgern: Das Product aller, an die geraden Theilungspunkte der Peripherie gezogenen Linien ist gleich der Differenz $x^n - 1$, und das Product aller an die ungeraden Theilungspunkte gezogenen Linien ist gleich der Summe $x^n + 1$.

## Trigonometrische Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

**136.** Die Gleichung des dritten Grades läßt sich zurückführen auf die Form

$$x^3 + 3px + 2q = 0,$$

und es wird in der Algebra gezeigt, daß die drei Werthe von x in der Formel

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

enthalten sind. Da indessen die mehrfachen cubischen Wurzelwerthe für diesen Ausdruck neue Werthe ergeben würden, so ist noch überdieß zu beachten, daß wenn der erste cubische Wurzelwerth mit a, und der zweite mit b bezeichnet wird, man nur die Werthe von a und b zusammen nehmen darf, für welche $ab = -p$ ist. Folglich lassen sich alle fremdartigen Werthe wegschaffen, indem man setzt

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad \text{und } x = a - \frac{p}{a}.$$

**137.** Ist $q^2 + p^3$ eine negative Größe, so sind die allgemeinen Werthe von x mit imaginären verbunden, und da ferner in der Algebra gezeigt wird, daß bei der Voraussetzung $q^2 + p^3 < 0$, die drei Wurzeln der Gleichung reell sind, so scheint es, die Rechnung müsse zur Reduction der imaginären Werthe Mittel liefern. Dem ist jedoch nicht so, außer man gebraucht unendliche Reihen; und diese Schwierigkeit, welche die Mathematiker schon viel beschäftigte, hat dem betreffenden Falle den Namen des unauflöslichen gegeben.

Die Schwierigkeit kommt daher, daß die beiden Cubikwurzeln, die in dem allgemeinen Ausdruck für x vorkommen, sich nicht, außer in besondern Fällen so ausziehen lassen, daß der reelle Theil von dem imaginären gesondert ist. Aber mittelst der Gleichung von Moivre ergibt sich diese Trennung sogleich in Ausdrücken von der Form $\sqrt[n]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}$; deßwegen sollen die beiden cubischen Wurzelwerthe auf diese Form gebracht werden.

Da $q^2 + p^3 < 0$ sein soll, so muß p negativ sein; setzt man daher $-p$ für p, so läßt sich die Gleichung so ausdrücken

[1] $$x^3 - 3px + 2q = 0.$$

Dann hat man $q^2 - p^3 < 0$ oder $q^2 < p^3$, und die Werthe für a sind durch die Formel gegeben

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 - p^3}},$$

und die von x durch die Formel

$$x = a + \frac{p}{a} = \sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a}\right),$$

in welcher man die verschiedenen Werthe für a setzen muß.

Dieß vorausgesetzt, so ergibt der allgemeine Ausdruck für a

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{1 - \frac{q^2}{p^3}}\sqrt{-1}},$$

und da $q^2 < p^3$ angenommen ist, so läßt sich ein Bogen $\varphi$ mittelst der Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$$

bestimmen. Zwar gibt es unendlich viele Bögen, die einem gegebenen Cosinus entsprechen; wir wollen aber hier voraussetzen, daß der gegebene $< 180^0$ sei.

Mittelst der Moivre'schen Formel hat man offenbar

$$[2] \qquad (\cos\tfrac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\tfrac{1}{3}\varphi)^3 = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi.$$

Also ist auch umgekehrt

$$\sqrt[3]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi} = \cos\tfrac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi;$$

somit ergibt sich

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi} = \cos\tfrac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$\frac{\sqrt{p}}{a} = \frac{1}{\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{3}\varphi} = \cos\tfrac{1}{3}\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a} = 2\cos\tfrac{1}{3}\varphi.$$

Man beachte, daß sich das zweite Glied der Formel [2] nicht ändert, wenn man in derselben zu $\varphi$ beliebig viele Kreisumfänge setzt; daraus folgt, wenn man noch $180^0$ mit H und eine beliebige ganze Zahl mit k bezeichnet, daß man für x alle Werthe nehmen kann, die in der Formel

$$x = 2\sqrt{p}\,\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2kH)$$

enthalten sind. Indessen darf man nicht glauben, daß sich mehr als drei Werthe daraus für x ergeben; denn nachdem man $k = 0, 1, 2$, gemacht hat, führen alle andern Substitutionen auf dieselben Resultate, und man erhält keine andern Werthe, als folgende

$$x = 2\sqrt{p}\,\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$x = 2\sqrt{p}\,\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2H),$$
$$x = 2\sqrt{p}\,\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 4H).$$

**138.** Man bedient sich hauptsächlich der trigonometrischen Linien, um die dem unauflöslichen Fall eigenthümliche Schwierigkeit zu überwinden; man kann sie jedoch auch in andern Fällen anwenden. Man nehme wieder p negativ, und betrachte deßhalb nochmals die Gleichung

$$[3] \qquad x^3 - 3px + 2q = 0;$$

nehme aber $q^2 > p^3$ an. Die Umformungen der vorigen Nummer sind dann unmöglich, denn, abgesehen von seinem Vorzeichen, wäre $\cos\varphi > 1$. Dieser Fall wird auf folgende Weise behandelt. Es ist immer

$$x = \sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a}\right).$$

Nun setze man $\frac{a}{\sqrt{p}}$ in der Form

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\frac{q^2}{p^3} - 1}},$$

und bestimme den Bogen $\varphi$ durch die Gleichung

$$\sin 2\varphi = -\frac{\sqrt{p^3}}{q};$$

dann erhält man

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\sin 2\varphi} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\varphi} - 1}} = \sqrt[3]{\frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}}.$$

Zieht man daraus die Quadratwurzel, so kann man beliebig $-\cos 2\varphi$ oder $+\cos 2\varphi$ nehmen; wovon man den Grund sogleich einsehen wird.

Ersetzt man $1 - \cos 2\varphi$ durch $2\sin^2\varphi$ und $\sin 2\varphi$ durch $2\sin\varphi\cos\varphi$, und reducirt dann, so ergibt sich

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\frac{2\sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}} = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi}.$$

Nun setze man noch

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi},$$

und berechne den Bogen $\psi$ aus dieser Formel. Drückt man die beiden imaginären Cubikwurzeln der Einheit, von denen bekanntlich die eine das Quadrat der andern ist, durch $\theta$ und $\theta^2$ aus, so sind die drei Werthe von $\frac{a}{\sqrt{p}}$

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \operatorname{tang}\psi, \quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \theta\operatorname{tang}\psi, \quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \theta^2\operatorname{tang}\psi.$$

Setzt man diese Werthe in x, und beachtet, daß $\operatorname{tang}\psi\cot\psi = 1$ und $\theta^3 = 1$, so ergibt sich

$$x = \sqrt{p}\,(\operatorname{tang}\psi + \cot\psi),$$
$$x = \sqrt{p}\,(\theta\operatorname{tang}\psi + \theta^2\cot\psi),$$
$$x = \sqrt{p}\,(\theta^2\operatorname{tang}\psi + \theta\cot\psi).$$

Hätte man in der Berechnung $+\cos 2\varphi$ anstatt $-\cos 2\varphi$, so hätte man $\cot\psi$ anstatt $\tang\psi$ und umgekehrt erhalten; es hätte sich aber dabei kein neuer Werth für x ergeben.

Setzen wir jetzt für $\theta$ und $\theta^2$ ihre Werthe und trennen in jedem Werthe von x den reellen Theil von dem imaginären. Aus der Algebra hat man

$$\theta = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}), \quad \theta^2 = \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3});$$

beachtet man überdieß, daß

$\cot\psi + \tang\psi = 2\operatorname{cosec} 2\psi$, und $\cot\psi - \tang\psi = 2\cot 2\psi$,

so ergibt sich nach allen vorgenommenen Reductionen,

$$x = 2\sqrt{p}\ \operatorname{cosec} 2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}\,(\operatorname{cosec} 2\psi + \sqrt{-3}\cot 2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}\,(\operatorname{cosec} 2\psi - \sqrt{-3}\cot 2\psi).$$

**139.** Um auch den Fall, wo p positiv ist, zu betrachten, nehme man noch einmal die Gleichung des dritten Grades, wie sie zuerst war,

[4] $$x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Dann hat man wegen $ab = -p$,

$$x = a - \frac{p}{a} = \sqrt{p}\left(\frac{a}{\sqrt{p}} - \frac{\sqrt{p}}{a}\right);$$

und außerdem

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{\sqrt{p^3}} + \sqrt{\frac{q^2}{p^3}+1}}.$$

Da die Tangente und Cotangente jede Größe erreichen, und der Ausdruck $\frac{-q}{\sqrt{p^3}}$ eine beliebige Größe erhalten kann, so läßt sich dieser durch eine dieser Linien ersetzen.

Es sei daher

$$\cot 2\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}},$$

so ergibt sich

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \sqrt[3]{\cot 2\varphi + \sqrt{\cot^2 2\varphi + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1+\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{2\cos^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}} = \sqrt[3]{\cot\varphi}.$$

Es sei ferner

$$\cot \psi = \sqrt[3]{\cot \varphi};$$

wo die Winkel $\varphi$ und $\psi$ sich leicht aus den Tafeln finden lassen; so erhält man die drei Werthe

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \cot \psi, \quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \theta \cot \psi, \quad \frac{a}{\sqrt{p}} = \theta^2 \cot \psi;$$

folglich sind die Werthe von x nach den vorgenommenen Reductionen:

$$x = 2\sqrt{p} \cot 2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}\,(\cot 2\psi - \sqrt{-3} \operatorname{cosec} 2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}\,(\cot 2\psi + \sqrt{-3} \operatorname{cosec} 2\psi).$$

## Weiteres Mittel zur trigonometrischen Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

**140.** Wenn eine trigonometrische Linie, die einem beliebigen Bogen entspricht, gegeben ist, und man sucht eine Linie, die der Hälfte, dem Drittel ꝛc. des ersten Bogens entspricht, so gelangt man auf Gleichungen, deren Vergleichung mit gewissen gegebenen Gleichungen dazu dienen kann, die Wurzeln dieser letztern direct zu finden. Dieß soll für die Gleichung des dritten Grades in Folgendem gezeigt werden.

Man nehme noch einmal die Gleichung ohne zweites Glied

[1] $$x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Es sei $\varphi$ ein beliebiger Bogen; betrachtet man $\cos \varphi$ als gegeben und macht $\cos \frac{1}{3}\varphi = z$, so hat man (Nro. 33) zur Bestimmung von z die Gleichung

[2] $$z^3 - \tfrac{3}{4}z - \tfrac{1}{4}\cos \varphi = 0;$$

und nimmt man an, daß der dem gegebenen Cosinus entsprechende Bogen $\varphi$ positiv und kleiner als H sei, so ist erwiesen, daß die drei Wurzeln der Gleichung [2] folgende sind:

[3] $$z = \cos \tfrac{1}{3}\varphi, \quad z = \cos \tfrac{1}{3}(2H + \varphi), \quad z = \cos \tfrac{1}{3}(2H - \varphi).$$

Um die Gleichung [2] mit [1] identisch zu machen, sind zwei Bedingungen zu stellen: es müßten also zwei unbestimmte Größen in der Gleichung [2] vorkommen, während nur eine einzige $\varphi$ vorhanden ist. Man führt nun eine zweite $\varrho$ ein, indem man $x = \varrho z$ setzt, woraus $z = \frac{x}{\varrho}$. Mittelst dieser Umformung erhält man für die Gleichung [2]

[4] $$x^3 - \tfrac{3}{4}\varrho^2 x - \tfrac{1}{4}\varrho^3 \cos \varphi = 0;$$

und wenn man die Werthe in [3] mit $\varrho$ multiplicirt, erhält man die Wurzeln dieser letztern Gleichung.

Man macht dieselbe mit [1] identisch, indem man $-\frac{3}{4}\varrho^2 = 3p$ und $-\frac{1}{4}\varrho^3 \cos\varphi = 2q$ setzt; so erhält man

$$\varrho = 2\sqrt{-p}, \qquad \cos\varphi = \frac{q}{p\sqrt{-p}}.$$

Damit der Bogen $\varphi$ reell sei, muß es zuerst $\cos\varphi$ sein, weßhalb p in der Gleichung [1] negativ sein muß. Deßwegen ändert man p in $-p$, dann hat man

$$[5] \qquad x^3 - 3px + 2q = 0,$$

und die Werthe von $\varrho$ und $\cos\varphi$ sind

$$\varrho = 2\sqrt{p}, \qquad \cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}.$$

Damit aber $\varphi$ reell sei, muß ferner, vom Vorzeichen abgesehen, $\cos\varphi < 1$ sein, d. h. es muß $q^2 < p^3$ oder $q^2 - p^3 < 0$ sein. Dann läßt sich $\varphi$ aus den Tafeln berechnen, und indem die Werthe in [3] mit $\varrho$ oder $2\sqrt{p}$ multiplicirt werden, erhält man die Wurzeln der Gleichung [5], nämlich:

$$x = 2\sqrt{p}\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$x = 2\sqrt{p}\cos\tfrac{1}{3}(2H + \varphi),$$
$$x = 2\sqrt{p}\cos\tfrac{1}{3}(2H - \varphi),$$

welche selbst aus den Tafeln leicht zu berechnen sind. Die von Nro. 137 sind leicht aus diesen zu berechnen.

Es wurde hier stillschweigend vorausgesetzt, daß der Werth $\varrho = 2\sqrt{p}$ positiv sei, man kann übrigens auch den negativen Werth $\varrho = -2\sqrt{p}$ nehmen. Anstatt $\cos = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}$ hätte man dann $\cos\varphi = \frac{q}{\sqrt{p^3}}$; dann müßte man in den vorigen Werthen $\sqrt{p}$ in $-\sqrt{p}$ und $\varphi$ in $H - \varphi$ umändern. Da jedoch eine Gleichung des dritten Grades nur drei Wurzeln hat, so läßt sich kein neuer Werth für x finden, was auch sonst leicht nachzuweisen ist.

Nimmt man p negativ und $q^2 < p^3$ an, so gehört die Gleichung [1] unter den unauflösbaren Fall; somit läßt sie sich durch das Vorhergehende nicht auflösen.

**141.** Nehmen wir fortwährend p negativ, aber $q^2 - p^3 > 0$ an, ohne daß das Zeichen $>$ die Gleichheit ausschließe.

Bei dieser Voraussetzung sind die oben gefundenen Werthe von x nur deßwegen imaginär, weil man wegen der Bedingung, welche $\varphi$ bestimmt, $\cos\varphi > 1$ haben muß; man muß daher natürlich für x einen Werth $> 2\sqrt{p}$ suchen, und setzt deßhalb $x = 2\sqrt{p}\operatorname{cosec}\psi$, oder vielmehr, um die Brüche zu vermeiden, $x = 2\sqrt{p}\operatorname{cosec} 2\psi$. Man muß also

zum Voraus eine Gleichung des dritten Grades bilden, die eine reelle Wurzel von derjenigen Form zuläßt, deren beide andern Wurzeln imaginär sind und die sich leicht mittelst der Tafeln auflösen läßt.

Ohne für den Factor cosec $2\psi$ eine Voraussetzung zu machen, setze man $x = 2\varrho \operatorname{cosec} 2\psi$, wo $\varrho$ und $\psi$ zwei Unbekannte sind. Beachtet man, daß

$$2\operatorname{cosec} 2\psi = \frac{2}{\sin 2\psi} = \frac{\sin^2\psi + \cos^2\psi}{\sin\psi\cos\psi} = \operatorname{tang}\psi + \cot\psi \text{ ist,}$$

so hat man

$$x = \varrho\,(\operatorname{tang}\psi + \cot\psi).$$

Also ist $x^3 = \varrho^3(\operatorname{tang}^3\psi + \cot^3\psi) + 3\varrho^3(\operatorname{tang}\psi + \cot\psi)$, oder auch, indem man $x$ für $\varrho\,(\operatorname{tang}\psi + \cot\psi)$ setzt, und die Ausdrücke auf eine Seite schafft:

[6] $$x^3 - 3\varrho^2 x - \varrho^3(\operatorname{tang}^3\psi + \cot^3\psi) = 0.$$

Da die beiden imaginären Cubikwurzeln der Einheit $\delta$ und $\delta^2$ sind, so kommt man, wie leicht einzusehen, zu derselben Gleichung [6], indem man einen beliebigen der drei Werthe nimmt,

$$x = \varrho\,(\operatorname{tang}\psi + \cot\psi),$$
$$x = \varrho\,(\delta\operatorname{tang}\psi + \delta^2\cot\psi),$$
$$x = \varrho\,(\delta^2\operatorname{tang}\psi + \delta\cot\psi);$$

folglich sind diese Werthe die Wurzeln der Gleichung [6].

Indem man diese Gleichung mit der gegebenen $x^3 - 3px + 2q = 0$ identisch macht, ergibt sich

$$\varrho = \sqrt{p} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}^3\psi + \cot^3\psi = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}}.$$

Um $\psi$ zu finden, setze man

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi};$$

so erhält man $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}^3\psi$, $\cot\varphi = \cot^3\psi$; also

$$\operatorname{tang}\varphi + \cot\varphi = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}}, \quad \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}},$$
$$\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = -\frac{2q}{\sqrt{p^3}}, \quad \sin 2\varphi = -\frac{\sqrt{p^3}}{q}.$$

Somit erhält man aus den Tafeln $\varphi$; aus $\varphi$ ergibt sich $\psi$, und dann erhält man endlich die Werthe von $x$. Setzt man für $\varrho$, $\delta$, $\delta^2$ ihre Werthe und nimmt die Reductionen vor, so ergibt sich, wie in Nro. 138

$$x = \sqrt{p}\operatorname{cosec} 2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}\,(\operatorname{cosec} 2\psi + \sqrt{-3}\cot 2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}\,(\operatorname{cosec} 2\psi - \sqrt{-3}\cot 2\psi).$$

**142.** Dieſe Formeln eignen ſich nur für die Fälle der Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$, in welchen p negativ und $q^2 > p^3$ iſt; denn ſonſt wäre der Werth von $\sin 2\varphi$ entweder imaginär oder $> 1$. Man muß alſo das mittlere Glied ändern, wenn p poſitiv iſt.

Dann ſei $x = 2\varrho \cot 2\psi$, ſo hat man ebenfalls

$$x = 2\varrho \left(\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{2\sin\psi\cos\psi}\right) = \varrho(\cot\psi - \operatorname{tang}\psi),$$

und die Erhebung in den Cubus führt, wie oben, auf die Gleichung

[7] $$x^3 + 3\varrho^2 x - \varrho^3(\cot^3\psi - \operatorname{tang}^3\psi) = 0,$$

wovon die drei Wurzeln ſind:

$$x = \varrho(\cot\psi - \operatorname{tang}\psi),$$
$$x = \varrho(\delta\cot\psi - \delta^2\operatorname{tang}\psi),$$
$$x = \varrho(\delta^2\cot\psi - \delta\operatorname{tang}\psi).$$

Man macht ſie mit der gegebenen Gleichung identiſch, indem man $\varrho = \sqrt{p}$, $\cot^3\psi - \operatorname{tang}^3\psi = \frac{-2q}{\sqrt{p^3}}$ ſetzt, und um $\psi$ mittelſt der Tafeln zu beſtimmen, ſetzt man

$$\cot\psi = \sqrt[3]{\cot\varphi};$$

alſo $\cot\varphi - \operatorname{tang}\varphi = \cot^3\psi - \operatorname{tang}^3\psi$, und ſomit

$$\cot\varphi - \operatorname{tang}\varphi = \frac{-2q}{\sqrt{p^3}}, \quad \text{oder } \cot 2\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}}.$$

Iſt der Bogen $\varphi$ bekannt, ſo findet man $\psi$, und dann auch die drei Werthe von x, nämlich

$$x = 2\sqrt{p}\cot 2\psi,$$
$$x = -\sqrt{p}(\cot 2\psi - \sqrt{-3}\operatorname{cosec} 2\psi),$$
$$x = -\sqrt{p}(\cot 2\psi + \sqrt{-3}\operatorname{cosec} 2\psi).$$

Die vorigen Umformungen dürfen nicht auf den Fall, wo p negativ iſt, angewendet werden, weil dann $\cot 2\varphi$ imaginär iſt.

---

## Anmerkungen des Ueberſetzers.

Zu Nro. 41.

$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$ erhält man durch Multiplication von [2] mit [4] in Nro. 26, indem ſodann $1 - \sin^2 b$ für $\cos^2 b$, und $1 - \cos^2 a$ für $\sin^2 a$ geſetzt wird.

$\operatorname{tang}(45^0 + a) = \frac{1 + \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang} a}$ ergibt sich aus Nro. 34 [1] und Nro. 8,

wo $\operatorname{tang} 45^0 = r = 1$.

$$\cos a = \frac{1}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} \frac{1}{2}a}.$$

Aus Nro. 36 [7] folgt

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}a \sin a = 1 - \cos a;$$

durch Division mit $\cos a$ ergibt sich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tang} a = \frac{1}{\cos a} - 1,$$

also

$$\frac{1}{\cos a} = 1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}a,$$

und daher

$$\cos a = \frac{1}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} \frac{1}{2}a}.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} \\
&= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} \\
&= \frac{\sin (a+b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} \\
&= \frac{\sin c}{\cos a \cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} \\
&= \frac{\sin c \cos c + \cos a \cos b \sin c}{\cos a \cos b \cos c} \\
&= \frac{\sin c (\cos c + \cos a \cos b)}{\cos a \cos b \cos c} \\
&= \frac{\sin c (\cos a \cos b - \cos(a+b))}{\cos a \cos b \cos c} \quad \text{Nro. 9 [1]} \\
&= \frac{\sin c (\cos a \cos b - \cos a \cos b + \sin a \sin b)}{\cos a \cos b \cos c} \\
&= \frac{\sin a \sin b \sin c}{\cos a \cos b \cos c} \\
&= \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c.
\end{aligned}$$

Zu Nro. 99. Entwickelung der Gleichungen [11, 12, 13]:

Die letzte Gleichung

$$\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

gibt

$$\cos b = \frac{\cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin A},$$

setzt man diesen Werth für cos b in die vorletzte Gleichung, so ist

$$\cos a \sin B = \sin A \cos C \frac{\cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin A} + \cos A \sin C$$
$$= \cos a \sin B \cos^2 C + \cos B \cos C \sin C + \cos A \sin C,$$

oder

$$\cos a \sin B (1 - \cos^2 C) = \cos B \cos C \sin C + \cos A \sin C,$$

woraus

$$\cos a \sin B \sin^2 C = \cos B \cos C \sin C + \cos A \sin C;$$

dieß mit sin C dividirt, gibt

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A,$$

also

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Zu Nro. 101. Die Neper'schen Analogien lassen sich auch unmittelbar aus den Gauß'schen Gleichungen ableiten, welche letztere ebenso wichtig sind als erstere und zu denen man durch folgende Entwickelungen gelangen kann.

Aus Nro. 97 [4] und Nro. 31 [5] ergibt sich

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}A \cos^2 \frac{1}{2}A}{\sin^2 \frac{1}{2}a \cos^2 \frac{1}{2}a} = \frac{\sin A \sin B}{\sin a \sin b} = \frac{\sin B \sin C}{\sin b \sin c},$$

und hieraus

$$(1) \quad \sin b \sin c = \frac{\sin B \sin C \sin^2 \frac{1}{2}a \cos^2 \frac{1}{2}a}{\sin^2 \frac{1}{2}A \cos^2 \frac{1}{2}A},$$

$$(2) \quad \sin B \sin C = \frac{\sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A \cos^2 \frac{1}{2}A}{\sin^2 \frac{1}{2}a \cos^2 \frac{1}{2}a}.$$

Aus Nro. 31 [8] und Nro. [96] erhält man:

$$(3) \quad 1 - \cos a = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a$$
$$= 1 - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A + \sin b \sin c - \sin b \sin c$$
$$= 1 - \cos(b-c) + 2\sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2}A,$$

oder

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}a = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}(b-c) + 2\sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2}A;$$

dieß beiderseits mit $2\sin^2 \frac{1}{2}a$ dividirt, gibt

$$(4) \quad \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(b-c)}{\sin^2 \frac{1}{2}a} = 1 - \frac{\sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A}{\sin^2 \frac{1}{2}a},$$

oder da nach (2) $\frac{\sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A}{\sin^2 \frac{1}{2}a} = \frac{\sin B \sin C \cos^2 \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}A}$,

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2}(b-c)}{\sin^2 \frac{1}{2}a} = \frac{1 - \sin B \sin C \cos^2 \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}A}.$$

Ebenso ergibt sich aus

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}a = 1 - \cos(b+c) - 2\sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2}A$$
$$= 2\sin^2 \tfrac{1}{2}(b+c) - 2\sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2}A,$$

folglich wieder durch Division ꝛc.

$$(5)\quad \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(b+c)}{\sin^2 \frac{1}{2}a} = 1 + \frac{\sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2}A}{\sin^2 \frac{1}{2}a} = 1 + \frac{\sin B \sin C \cos^2 \frac{1}{2}a}{\sin^2 \frac{1}{2}A}.$$

Auf ähnliche Weise findet man aus Nro. 96 [1] und (1)

$$(6)\quad \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(b+c)}{\cos^2 \frac{1}{2}a} = 1 - \frac{\sin b \sin c \cos^2 \frac{1}{2}A}{\cos^2 \frac{1}{2}a} = 1 - \frac{\sin B \sin C \sin^2 \frac{1}{2}a}{\sin^2 \frac{1}{2}A},$$

$$(7)\quad \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(b-c)}{\cos^2 \frac{1}{2}a} = 1 + \frac{\sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2}A}{\cos^2 \frac{1}{2}a} = 1 + \frac{\sin B \sin C \sin^2 \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}A}.$$

Aus Nro. 99 [11] ꝛc. ergibt sich auf ähnliche Weise:

$$(8)\quad \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(B+C)}{\sin^2 \frac{1}{2}A} = 1 - \frac{\sin B \sin C \sin^2 \frac{1}{2}a}{\sin^2 \frac{1}{2}A},$$

$$(9)\quad \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(B-C)}{\sin^2 \frac{1}{2}A} = 1 + \frac{\sin B \sin C \cos^2 \frac{1}{2}a}{\sin^2 \frac{1}{2}A},$$

$$(10)\quad \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(B-C)}{\cos^2 \frac{1}{2}A} = 1 - \frac{\sin B \sin C \cos^2 \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}A},$$

$$(11)\quad \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(B+C)}{\cos^2 \frac{1}{2}A} = 1 + \frac{\sin B \sin C \sin^2 \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}A}.$$

Hieraus ergeben sich sodann die Gauß'schen Analogien durch Gleichstellung, nämlich:

(12) (Aus 4 und 10) $\cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}(b-c) = \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}(B-C)$,

(13) (Aus 5 und 9) $\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}(b+c) = \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}(B-C)$,

(14) (Aus 6 und 8) $\sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(b+c) = \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}(B+C)$,

(15) (Aus 7 und 11) $\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(b-c) = \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}(B+C)$.

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich nun wieder die Neper'schen Analogien durch Division von 12 durch 15, von 13 durch 14, von 12 durch 13 und von 15 durch 14 ableiten.

# Zweiter Theil.

# Analytiſche Geometrie in der Ebene.

## Erſtes Kapitel.

## Beſtimmte Aufgaben.

### Regeln zur Darſtellung einer Aufgabe als Gleichung.

**143.** Unter analytiſcher Geometrie oder mit andern Worten, Anwendung der Algebra auf die Geometrie verſteht man den wichtigen Zweig der Mathematik, der die Algebra in geometriſchen Unterſuchungen anwenden lehrt. Von dieſem Geſichtspunkt aus betrachtet, muß ſie auch die Trigonometrie, die den erſten Theil dieſes Werkes bildet, in ſich ſchließen.

Viète, ein franzöſiſcher Mathematiker, dem die Algebra ſo bedeutende Erweiterungen verdankt, hat ſie zuerſt zur Auffindung der unbekannten Theile einer Figur angewendet, indem er die Beziehungen, in welchen alle Theile dieſer Figur zu einander ſtehen, durch Gleichungen ausdrückte. Descartes vervollkommnete Viète's Arbeiten nicht nur, ſondern er fand auch zur Anwendung der algebraiſchen Rechnung auf die Theorie der Curven allgemeine, ebenſo einfache als fruchtbare Methoden, die jenem ausgezeichneten Philoſophen bei der Nachwelt zum ſchönſten Ruhme gereichen. Sie wurden zuerſt nur auf ebene Curven, d. h. auf ſolche angewendet, deren Punkte alle in einer Ebene liegen; ſpäter wurden ſie auch auf beliebige Flächen und Linien ausgedehnt. Daher kommt die ziemlich allgemeine Unterſcheidung zwiſchen analytiſcher Geometrie von zwei und drei Ausdehnungen (in der Ebene und im Raume).

Um der natürlichsten Ordnung zu folgen, soll hier mit der von Viète angewandten Methode zur Auflösung bestimmter Aufgaben, mit Einschluß der Erweiterungen, welche Newton's allgemeine Arithmetik ihr gegeben hat, angefangen werden. Zwar scheinen hier nur die Aufgaben über ebene Figuren berücksichtigt zu werden; es läßt sich jedoch leicht einsehen, daß dabei auch die Oberflächen und Körper in Betracht kommen können.

**144.** Diese verschiedenen Größen, Linien, Flächen oder Körper können auf eine Maßeinheit gebracht und in Zahlen ausgedrückt werden, welche letztere sich durch Buchstaben allgemein darstellen lassen, und in dieser Form können dann offenbar auch die geometrischen Größen in arithmetische und algebraische Berechnung gebracht werden.

**145.** Eine geometrische Aufgabe ist zuweilen so leicht in eine Gleichung zu bringen, daß es hiezu keiner weitern Regel bedarf.

Handelt es sich zum Beispiel darum, eine gerade Linie nach dem äußern und mittlern Verhältniß zu theilen,* so bezeichne a die gegebene Linie, und x den größern Theil, so ist der kleinere a — x, und nach der in der Aufgabe gestellten Forderung hat man sogleich die Gleichung

$$[1] \qquad x^2 = a(a - x),$$

woraus sich leicht ergibt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Der zweite Werth ist negativ und für die Aufgabe nicht brauchbar; denn der gesuchte Abschnitt kann offenbar nur eine positive Größe sein. Man hat also nur eine Auflösung, nämlich:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Hat man die gegebene Linie mittelst einer gewissen Längeneinheit in Zahlen ausgedrückt, so darf man natürlich nur noch die in der Formel angezeigten Rechnungen ausführen, um die Anzahl der in dem gesuchten Abschnitt enthaltenen Längeneinheiten zu finden.

---

* d. h. eine gerade Linie so zu theilen, daß ein Theil die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem andern Theile sei.
Anm. d. Uebers.

Zu einer geometrischen Construction des gesuchten Abschnitts gibt der vorige Werth eine sehr einfache Anleitung. Man errichte (Fig. 36) im Endpunkt der gegebenen Linie AB eine Senkrechte BC gleich der halben AB und ziehe AC; so ist die Hypotenuse AC gleich $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, und indem man von C aus mit dem Halbmesser $BC = \frac{a}{2}$ einen Kreis beschreibt, der AC in D schneidet, so hat man offenbar

$$AD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2};$$

also ist $x = AD$. Um somit die Aufgabe aufzulösen, darf man nur noch $AD = AM$ auf AB antragen. Diese Construction ist, wie man leicht bemerken wird, gerade die in der Geometrie angewendete.

Der um den Mittelpunkt C beschriebene Kreis schneidet die Verlängerung von AC in D'; trägt man nun $AD' = AM'$ auf die verlängerte AB, so erhält man

$$AM' = AD' = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2};$$

also ist der zweite Werth von $x = -AM'$. Wir werden bald auf die negativen Werthe der Unbekannten und auf die Constructionen, deren die algebraischen Ausdrücke fähig sind, zurückkommen.

**146.** Die vorige Aufgabe war sehr einfach: durch die verschiedenen Beziehungen der Größe und Lage, in welcher die Linien zu einander stehen, werden die geometrischen Aufgaben jedoch meistens so verwickelt, daß es besonderer Methoden und Kunstgriffe bedarf, um die Gleichungen, von denen die Unbekannten abhängen, zu bilden. In diesem Falle gilt als erste Regel, daß man sich die Beziehungen, welche die Aufgabe zwischen den Linien, Winkeln, Flächen, Körpern aufstellt, ohne Rücksicht auf gegebene und gesuchte Größen, genau einpräge; dann wird man leicht diese Beziehungen in Gleichungen ausdrücken können, und zuletzt leitet man aus diesen Gleichungen, wenn dieß möglich ist, die Werthe der unbekannten Größen ab.

Nehmen wir zum Beispiel (Fig. 37) ein in einen Kreis beschriebenes gleichschenkliges Dreieck: offenbar muß hier zwischen dem Schenkel BC, der Grundlinie CD und dem Durchmesser AB eine solche Abhängigkeit stattfinden, daß, wenn zwei dieser drei Linien gegeben sind, man die dritte nothwendig daraus ableiten kann. Daraus folgt, daß die Aufgabe darin bestehen kann, den Durchmesser aus dem Schenkel und der Grundlinie, oder die Grundlinie aus dem Schenkel und dem Durchmesser, oder endlich den Schenkel aus der Grundlinie und dem Durchmesser zu suchen. Man mag jedoch von diesen drei Aufgaben eine auflösen, welche man will, so nimmt man zuerst keine Rücksicht auf gegebene und gesuchte Größen, sondern bildet einmal die Gleichung, welche die gegenseitige Beziehung der drei Größen

ausdrückt. Man darf dann nur den Werth der Linie, welche als unbekannt angenommen wurde, aus der Gleichung ableiten.

Es sei die Grundlinie $CD = b$, der Schenkel $BC = c$ und der Durchmesser $AB = d$. Wird derjenige Durchmesser genommen, der den Winkel CBD halbirt, so muß er auch die Grundlinie CD in ihrer Mitte senkrecht schneiden. Nun ist nach einem bekannten Lehrsatz die Sehne CB die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser BA und dem anliegenden Abschnitt BE; man hat also $BC^2 = AB \times BE$, oder wenn man für die Linien die sie bezeichnenden Buchstaben setzt,

$$c^2 = d \times BE, \text{ woraus } BE = \frac{c^2}{d};$$

aus dem rechtwinkligen Dreieck CBE erhält man aber $BC^2 - BE^2 = CE^2$, und hieraus ergibt sich

$$[2] \qquad c^2 - \frac{c^4}{d^2} = \tfrac{1}{4} b^2,$$

welche Gleichung für irgend eine als unbekannt angenommene Linie leicht aufzulösen ist.

Wird der Durchmesser gesucht, so erhält man, indem der Werth für d aus dieser Gleichung abgeleitet wird,

$$d = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}b^2}}.$$

Ist die Grundlinie unbekannt, so erhält man aus der Gleichung den Werth für b, nämlich:

$$b = \frac{2c\sqrt{d^2 - c^2}}{d}.$$

Sucht man endlich die Seite des gleichschenkligen Dreiecks, so wird die Gleichung nach c aufgelöst, und man erhält

$$c = \sqrt{\tfrac{1}{2} d^2 \pm \tfrac{1}{2} d\sqrt{d^2 - b^2}}.$$

In jedem dieser drei Fälle wurden die negativen Werthe vernachlässigt, weil sie keine Anwendung in der Aufgabe finden können. Die beiden ersten Fälle lassen nur eine Auflösung zu; der dritte kann zwei geben, denn wenn der Durchmesser AB und die Grundlinie CD gegeben ist, so ist offenbar jedes der Dreiecke ACD und BCD der Aufgabe gleich entsprechend.

**147.** Blicken wir nun zurück und beachten, wie man zu der Gleichung [2] gelangt ist. Der Anblick der Figur zeigt sogleich, daß man mittelst des Durchmessers AB und des Schenkels BC zuerst BE und dann die halbe Grundlinie CE berechnen konnte, und dieß war zur Bildung der Gleichung hinreichend. Daraus ergibt sich folgende von Newton aufgestellte Regel:

Eine gegebene Aufgabe betrachte man vorläufig als aufgelöst, und vergleiche alle darin vorkommenden

Größen mit einander, ohne Rücksicht darauf, ob sie bekannt oder unbekannt sind; hierauf untersuche man, wie sie von einander abhängen, um diejenigen zu erkennen, welche als gegeben zur Bestimmung der andern dienen können, und bringe sie in eine Gleichung.

**148.** Indessen muß hier mit demselben Mathematiker bemerkt werden, daß man nicht nothwendig auf den ersten Blick zu erkennen braucht, mittelst welcher Operationen die Rechnung von den ersten Größen auf die letzten führen kann; wenn man nur im Allgemeinen einsieht, daß die einen auf irgend eine Weise von den andern abgeleitet werden können. Dieß soll in Folgendem erörtert werden.

Es handle sich um eine Aufgabe, in welcher der Halbmesser AB (Fig. 38), nebst den drei in den Halbkreis einbeschriebenen Linien BC, CD, DA vorkommen. Sucht man den Halbmesser AB, wenn die andern Linien gegeben sind, so zeigt sich zur Bestimmung dieser Unbekannten keine passende Berechnung oder Construction. Es ist jedoch klar, daß der Halbmesser nicht willkührlich sein kann, denn er muß so beschaffen sein, daß man die drei gegebenen Linien in den Halbkreis einbeschreiben kann. Deßhalb betrachte man den Durchmesser AB als bekannt, und nehme die Rechnung vor, als wäre er es wirklich; dann läßt sich, mit Hülfe einiger Lehrsätze aus der Geometrie irgend eine der drei Sehnen, z. B. AD, mittelst des Durchmessers und der beiden andern Sehnen, leicht finden.

Zu diesem Zwecke ziehe man die Diagonale AC und fälle CE senkrecht auf die verlängerte AD. Der Winkel ACB ist ein rechter als Winkel im Halbkreis, und da das Viereck ABCD in einen Kreis beschrieben ist, so ist die Summe der Gegenwinkel ABC und ADC gleich 2R; die Winkel CDE und ADC sind aber ebenfalls zusammen gleich 2R; also sind die Winkel ABC und CDE einander gleich, und folglich die rechtwinkligen Dreiecke ACB und CED einander ähnlich. Um nun AD mittelst AB, BC und CD zu finden, wird die Rechnung auf folgende Weise geführt:

Es sei $AB = x$, $BC = a$, $CD = b$, $AD = c$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC erhält man mittelst AB und BC den Werth von AC, nämlich:

$$AC = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken ACB und CED ergibt sich CE und DE mittelst der Proportionen:

$$CE : AC = CD : AB \text{ oder } CE : \sqrt{x^2 - a^2} = b : x,$$
$$DE : BC = CD : AB \text{ oder } DE : a = b : x;$$

hieraus erhält man

$$CE = \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{x}, \quad DE = \frac{ab}{x}.$$

Das rechtwinklige Dreieck AEC gibt $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2}$; somit erhält man, indem man für AC und CE ihre Werthe setzt,

$$AE = \sqrt{x^2 - a^2 - \frac{b^2(x^2 - a^2)}{x^2}} = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}{x}.$$

Nun ergibt sich AD aus der Differenz AE—DE, man erhält nämlich

$$AD = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}{x} - \frac{ab}{x}.$$

Aber AD ist gleich c; also hat man die Gleichung

$$\frac{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}{x} - \frac{ab}{x} = c;$$

diese läßt sich nach einander umformen in

$$\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)} = cx + ab,$$
$$(x^2-a^2)(x^2-b^2) = (cx + ab)^2,$$
$$x^4 - a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = c^2x^2 + 2abcx + a^2b^2,$$
$$x^4 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 2abcx = 0,$$

und endlich, indem man durch x dividirt,

[3] $$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Somit hängt die Bestimmung des Durchmessers AB von einer Gleichung des dritten Grads ab, woraus sich schließen läßt, daß die Aufgabe drei Auflösungen haben kann. Wir wollen übrigens keine weitere Bemerkung darüber machen; denn es handelt sich für den Augenblick nur darum, zu zeigen, wie die geometrischen Aufgaben in Gleichungen gebracht werden.

**149.** Die Gleichung [3] wurde durch buchstäbliche Befolgung der Regel in Nro. 147 gefunden, d. h. man hat alle Linien der Aufgabe als bekannt angenommen, und dann diejenigen gesucht, welche zur leichten Auffindung der andern gebraucht werden konnten. Aber es ist oft schwer und sogar unmöglich, diesen Gang streng zu befolgen; denn in den meisten Fällen ist man genöthigt, Hülfslinien in der Figur zu ziehen, die zuerst mittelst der als bekannt angenommenen Linien ausgedrückt werden und deren Werthe dann den Werthen derjenigen Linien, die man als unbekannt betrachtet, einverleibt werden müssen. Diese Rechnungen werden aber natürlich äußerst umständlich, wenn die Ausdrücke für die Hülfslinien in eine große Zahl von Gliedern verwickelt werden. Zur Beseitigung dieser Schwierigkeiten ist es angemessen, die Regel in Nro. 147 in folgende umzuändern:

Wenn man alle in der Aufgabe vorkommenden, bekannten oder unbekannten Linien in der Figur gezeichnet hat, so ziehe man solche Hülfslinien, die sich zur leichtern Auflösung mittelst geometrischer Sätze besonders eignen; diese Hülfslinien sind dann neue Unbekannte, die man als in der Aufgabe schon vorhanden betrachtet; dann bildet man die Gleichungen, welche alle Linien der Figur unter einander verbinden. Ist die Aufgabe eine bestimmte, so erhält man immer ebenso viele Gleichungen, als unbekannte Linien vorhanden sind, und die geometrische Aufgabe läßt sich auf die Auflösung dieser Gleichungen zurückführen.

**150.** Die Aufgabe in Nro. 148 kann als eine sehr einfache Anwendung dieser Regel dienen. Nachdem die Hülfslinien AC, CE gezogen sind, setze man wieder AB = x, BC = a, CD = b, DA = c, betrachte AC als neue Unbekannte die man durch y bezeichne. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACB erhält man zwischen x und y die Gleichung

$$x^2 = a^2 + y^2.$$

Nun geben die ähnlichen Dreiecke ACB und CED den Werth $DE = \frac{ab}{x}$, und das stumpfwinklige Dreieck ACD gibt nach einem bekannten Lehrsatze die Gleichung

$$y^2 = b^2 + c^2 + 2c \times \frac{ab}{x}.$$

Hier hat man also zwei Gleichungen, in welchen die unbekannte Hülfslinie y und die eigentliche Unbekannte x vorkommt. Will man die Gleichung haben, in welcher x blos mittelst der Linien a, b, c bestimmt wird, so muß $y^2$ aus den beiden Gleichungen eliminirt werden, was leicht geschieht, indem man nur den in der zweiten Gleichung gefundenen Werth für $y^2$ in die erste zu setzen braucht; so erhält man

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2abc}{x},$$

oder mittelst der geeigneten Reductionen,

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\, x - 2abc = 0,$$

welches die oben gefundene Gleichung [3] ist.

**151.** Um noch eine Anwendung der Regel in Nro. 147 zu geben und zu zeigen, auf wie vielfache Weise dieselbe Aufgabe aufgelöst werden kann, folge hier noch eine andere Auflösung der nämlichen Aufgabe. Man verlängere CD und BA (Fig. 39) bis zu ihrem Durchschnittspunkt F, so

erhält man zwei ähnliche Dreiecke BCF und DAF: denn der Winkel F ist gemeinschaftlich, und ferner sind die Winkel ABC und ADF als Supplemente zu demselben Winkel ADC einander gleich. Wenn nun außer den in der Aufgabe vorkommenden Linien die BF noch gegeben wäre, so ließe sich CF und DF und damit auch die Gleichung CF — DF = CD leicht finden. Behalten wir nun für dieselben Linien auch dieselbe Bezeichnung a, b, c, x bei, und machen BF = y, so hat man AF = y — x, und die ähnlichen Dreiecke geben

$$DF : y \quad = c : a, \text{ woraus } DF = \frac{cy}{a},$$

$$CF : y - x = a : c, \text{ woraus } CF = \frac{a(y-x)}{c}.$$

Setzt man in CF — DF = CD, für die Linien ihre Werthe, so erhält man

$$\frac{a(y-x)}{c} - \frac{cy}{a} = b \quad \text{(1te Gleichung)}.$$

Da man aber zwei unbekannte Größen, BA und BF, als bekannte behandelt hat, so muß man noch eine weitere Gleichung finden. Deßhalb fälle man CG senkrecht auf BA, so erhält man

$$BG : BC = BC : BA, \text{ woraus } BG = \frac{BC^2}{BA} = \frac{a^2}{x}.$$

Aber das Dreieck CBF ergibt

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 - 2BF \times BG;$$

ersetzt man nun die Linien durch ihre Werthe, so ergibt sich

$$\frac{a^2(y-x)^2}{c^2} = a^2 + y^2 - \frac{2a^2y}{x} \quad \text{(2te Gleichung)}.$$

Durch Elimination der unbekannten Hülfslinie y erhält man die Gleichung, von welcher die erste Unbekannte x abhängt; zu diesem Zweck bringe man zuerst die beiden Gleichungen auf folgende:

$$(a^2 - c^2)\, y - a^2x = abc,$$

$$(a^2 - c^2)\, y^2x + 2a^2\,(c^2 - x^2)\, y + a^2\, x^3 - a^2c^2x = 0;$$

dann entnehme man aus der ersten $y = \frac{a^2x + abc}{a^2 - c^2}$, und indem man diesen Werth in der zweiten substituirt, findet man nach den vorgenommenen Reductionen, wie oben:

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\, x - 2abc = 0.$$

**152.** Die drei eben gegebenen Auflösungen sind nicht gleich einfach, woraus hervorgeht, daß die sich zuerst darbietenden Wege, wenn

man sie sofort einschlagen will, oft zu mühsamen Berechnungen führen; es ist dann gut, wenn man noch einmal von vorne anfängt und zur Auffindung eines leichtern Weges neue Versuche macht.

**153.** Folgende Aufgabe wird uns Gelegenheit zu neuen, wichtigen Bemerkungen geben.

Es sei ein Quadrat OCMN (Fig. 40) gegeben: man soll durch die Spitze M eine Gerade so ziehen, daß der zwischen den Linien AA′ und BB′, die den von M gegenüberliegenden Winkel O bilden, enthaltene Abstand einer gegebenen Linie m gleich sei.

Man lasse für jetzt die punktirten Linien der Figur, die sich auf Nro. 157 beziehen, außer Acht.

Es sei MQP eine Linie, die der Aufgabe Genüge leistet; da man nun nach der Aufgabe eine beliebige Unbekannte annehmen kann, wenn sie nachher nur zur leichtern Bestimmung der gesuchten Linie sich eignet, so nehme man OP als Unbekannte, und es sei OP = x, OC = MC = a; außerdem hat man aus der Aufgabe selbst QP = m. Dieß vorausgesetzt erhält man aus den ähnlichen Dreiecken OQP und CMP

$$QO : MC = PO : PC;$$ da aber $PC = x + a$, so ist

$$QO : a = x : a + x, \text{ woraus } QO = \frac{ax}{a+x}.$$

Das Dreieck OQP gibt ferner $PQ^2 = x^2 + \frac{a^2 x^2}{(x+a)^2}$; oder da PQ = m ist, so hat man $x^2 + \frac{a^2 x^2}{(x+a)^2} = m^2$, oder durch Reduction,

[4] $x^4 + 2ax^3 - (m^2 - 2a^2)\, x^2 - 2am^2 x - a^2 m^2 = 0;$

somit hängt die Aufgabe von einer Gleichung des vierten Grades ab.

Es wurde im Vorigen angenommen, die Linie QP befinde sich im Winkel BOA′; die Aufgabe selbst verlangt aber nur, daß sie zwischen den Geraden AA′, BB′ liege, ohne einen der vier rechten Winkel besonders zu bezeichnen. Man kann deßhalb die Bedingungen der Aufgabe auf viererlei Arten erfüllen, wie es die Figur anzeigt. Die beiden in den Winkeln BOA′ und AOB′ dargestellten Auflösungen finden immer statt; aber die beiden andern in dem Winkel AOB dargestellten nur dann, wenn die gegebene Linie m groß genug ist.

Um die Gleichungen zur Bestimmung der drei letzten Auflösungen zu bilden, bedarf es in den vorigen Folgerungen nur geringer Abänderungen. Bezeichnet man die Unbekannte OP′, oder OP″, oder OP‴ mit x, so gelangt man immer zu der Gleichung

$$x^4 - 2ax^3 - (m^2 - 2a^2)\, x^2 + 2am^2 x - a^2 m^2 = 0.$$

Wenn man in dieser Gleichung x in $-x$ verwandelt, so verfällt man, wie sich leicht bemerken läßt, wieder auf die Gleichung [4]; folglich genügt diese für alle Auflösungen der Aufgabe, wenn man nur darauf Rücksicht nimmt, daß man die negativen Werthe von x auf OA anträgt, während der positive Werth auf OA′ angetragen wird.

**154.** Die Gleichung [4] ist vollständig; mittelst einer passenden Wahl der Unbekannten kann man aber zu einer einfachern und leichter aufzulösenden Gleichung gelangen.

Es sei wieder MQP (Fig. 40) eine Gerade, die der Aufgabe Genüge leistet, und H sei die Mitte von PQ: man nehme nun MH als Unbekannte und setze $MH = y$; so erhält man

$$MQ = y - \frac{m}{2},\quad MP = y + \frac{m}{2},\quad CP = \sqrt{\left(y + \frac{m}{2}\right)^2 - a^2}.$$

Dann erhält man wegen der Parallelen MC und OQ

$$CP : OC = MP : MQ, \text{ woraus } MQ \times CP = OC \times MP.$$

Setzt man für diese Linien ihre Werthe, so ergibt sich die Gleichung

$$\left(y - \frac{m}{2}\right)\sqrt{\left(y + \frac{m}{2}\right)^2 - a^2} = a\left(y + \frac{m}{2}\right),$$

oder indem man sie ins Quadrat erhebt und reducirt,

$$[5] \qquad y^4 - \left(2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)y^2 + \frac{m^4}{16} - \frac{a^2 m^2}{2} = 0;$$

welche Gleichung nach dem zweiten Grad aufgelöst wird. Man erhält zuerst

$$y^2 = a^2 + \frac{m^2}{4} \pm a\sqrt{a^2 + m^2},$$

und hierauf

$$y = \sqrt{a^2 + \frac{m^2}{4} \pm a\sqrt{a^2 + m^2}}.$$

Der erste dieser Werthe ist immer reell und gibt die beiden Linien MQP und MP′Q′; der zweite, welcher die Linien P″MQ″ und P‴MQ‴ gibt, kann imaginär werden. Die negativen Werthe von y kommen nicht in Betracht, weil sie unbrauchbar sind.

**155.** Es war leicht vorauszusehen, daß die Unbekannte y nur von Gleichungen des zweiten Grads abhängen würde; denn da der Punkt M von den Schenkeln des Winkels AOB gleichweit entfernt ist, so muß offenbar, wenn die Auflösung MQP gefunden ist und man $OP' = OQ$ macht,

und $MP'Q'$ zieht, $P'Q' = PQ = m$ sein; also ist $P'Q'$ eine andere Auflösung der Aufgabe. Ebenso, wenn $P''Q''$ eine Gerade gleich m ist, und man nimmt $OP''' = OQ''$ und zieht $P'''MQ'''$, so hat man auch $P'''Q''' = m$. Wenn man ferner von PQ, $P'Q'$, $P''Q''$, $P'''Q'''$ die Mitten H, $H'$, $H''$, $H'''$ nimmt, so muß offenbar der Abstand $MH' = MH$, und der Abstand $MH''' = MH''$ sein; nimmt man daher den Abstand vom Punkte M bis zur Mitte der Geraden m, die einbeschrieben werden soll, als Unbekannte an, so kann diese Unbekannte nur zwei verschiedene Werthe haben und darf folglich nur vom zweiten Grad abhängen.

Anders verhielt es sich, als der Abstand des Punktes O von dem Punkte, wo die gesuchte Gerade die Linie $AA'$ schneidet, als Unbekannte angenommen wurde. Dann mußte die mit x bezeichnete Unbekannte vier ganz verschiedene Werthe haben, nämlich

$$x = OP, \quad x = -OP', \quad x = -OP'', \quad x = -OP'''.$$

Aus dem eben Gesagten ergibt sich folgende wichtige Regel: Bei der Wahl der Unbekannten muß man immer diejenige vorziehen, welche am wenigsten Werthe haben wird.

**156.** Wenn es nach dieser Regel vorkommt, daß die Beziehungen zweier Größen zu den andern in der Aufgabe so gleichartig sind, daß man bei der Wahl der einen oder der andern als Unbekannten zu ganz ähnlichen Gleichungen gelangt, so muß man beide weglassen und dafür als Unbekannte eine Größe wählen, die zu jenen beiden dieselbe Beziehung hat, zum Beispiel ihre Summe, oder ihre Differenz, oder eine mittlere Proportionale, oder endlich irgend eine andere zweckmäßig gewählte Größe.

Zuweilen bemerkt man sogleich, daß eine Größe keinen positiven Werth $+a$ haben kann, ohne zugleich auch einen negativen von derselben Größe $-a$ zu erhalten. Dieser Umstand kann Veranlassung sein, eine solche Größe als Unbekannte anzunehmen; denn man weiß dann zuverlässig, daß in der Endgleichung, von welcher die Unbekannte abhängt, von allen Wurzeln je zwei gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben, und daß folglich diese Gleichung nur gerade Potenzen der Unbekannten enthält.

Ferner bemerkt man bei gewissen Fällen, wenn das Verhältniß zweier Größen als Unbekannte angenommen wird, daß diese den Werth a nicht haben kann, ohne zugleich den Werth $\frac{1}{a}$ zu haben; dieß zeigt an, daß die Unbekannte durch eine reciproke Gleichung gefunden wird; eine solche Gleichung ist aber bekanntlich von einem um die Hälfte niederern Grad, und diese Rücksicht kann als entscheidend erscheinen.

**157.** Unter den Unbekannten, die beim ersten Anblick mit gleichem Vortheil anwendbar erscheinen, ist jedoch noch eine Wahl zu treffen, wenn man die möglichst einfache Auflösung wünscht, und diese Wahl ist zuweilen

so schwer, daß sie oft mehr vom Glück, als vom Scharfsinn abzuhängen scheint. Die letzte Aufgabe soll uns noch einmal als Beispiel dienen.

Nehmen wir, wie oben (Nro. 153) an, die Linie MQP genüge der Aufgabe und errichten auf MP die Senkrechte PR, welche die verlängerte MN in R trifft: so ist klar, daß der Punkt P bestimmt ist, sobald man den Punkt R kennt; denn man darf dann nur über MR als Halbmesser einen Halbkreis beschreiben. Man kommt freilich nicht gerade auf den Gedanken, die Entfernung NR als Unbekannte anzunehmen; es wird sich indessen bald zeigen, daß man auf diese Weise ein äußerst einfaches Resultat erhält.

Es sei nun $NR = z$; man mache ferner $MQ = u$ und fälle die Senkrechte PS auf MR. Die Dreiecke MNQ und PRS sind congruent; denn sie sind rechtwinklig und $MN = PS$; also ist $PR = MQ = u$. Nun ergeben sich aus dem rechtwinkligen Dreieck MPR die beiden Gleichungen

$$MR^2 = MP^2 + PR^2, \quad MR \times PS = MP \times PR.$$

Setzt man für die Linien ihre analytischen Bezeichnungen, so ergibt sich

$$(z + a)^2 = (m + u)^2 + u^2, \quad (z + a)\, a = (m + u)\, u;$$

und man hat somit zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten. Bringt man den Punkt P in die vier Lagen, die er einnehmen kann, so ersieht man, daß diese Gleichungen noch stattfinden, nur mit dem Unterschied, daß z sein Vorzeichen ändert, wenn der Punkt R auf NR′ fällt, und ebenso u, wenn Q in Beziehung auf den Punkt P, der immer auf der Linie AA′ bleiben muß, auf die andere Seite vom Punkte M zu liegen kommt.

Man eliminire u, indem man die zweite Gleichung zweimal von der ersten abzieht; dann erhält man

$$z^2 = a^2 + m^2, \quad \text{woraus } z = \pm\sqrt{a^2 + m^2},$$

welches Resultat unerwartet einfach ist und zu folgender Construction Anlaß gibt.

Man errichte $MT = m$ senkrecht auf MN, und ziehe NT, so ist $NT = \sqrt{a^2 + m^2}$; man muß also NT auf der verlängerten MN von N aus bis R und R′ antragen, dann über MR und MR′ Halbkreise beschreiben, welche die Linie AA′ in den Punkten P, P′, P″, P‴ schneiden; so erhält man die Auflösung der Aufgabe, indem man die vier Geraden MQP, MP′Q′, P″MQ″, P‴MQ‴ zieht. Die Durchschnittspunkte P″ und P‴ verschwinden, wenn $MR' < 2MC$, das heißt $\sqrt{a^2 + m^2} - a < 2a$ ist. Daraus folgert man leicht, daß $m < 2a\sqrt{2}$, oder auch $m < 2QM$, wenn man berücksichtigt, daß die Diagonale $OM = a\sqrt{2}$ ist; also ist die kleinste Linie, die man im Winkel AOB durch den Punkt M ziehen kann, gleich dem doppelten Abstand OM.

Diese Construction kannte schon Pappus, ein Mathematiker aus Alexandrien, der ums Jahr 400 n. Ch. lebte.

**158.** Nach den eben gegebenen Erörterungen wird es für den Leser, der mit den Lehrsätzen der Geometrie vertraut ist, keine große Schwierigkeit mehr haben, die Aufgaben in eine Gleichung zu bringen.

Kommen in der gegebenen Aufgabe Winkel vor, so muß man zwischen den Schenkeln dieser Winkel Linien ziehen, wodurch Dreiecke entstehen, und anstatt dieser Winkel führt man die Seiten der Dreiecke oder vielmehr die Verhältnisse dieser Seiten in die Rechnung ein. Man kann sich auch der trigonometrischen Linien bedienen, was im Grund dasselbe ist; denn diese Linien sind selbst die Seiten oder vielmehr die Verhältnisse der Seiten gewisser rechtwinkliger Dreiecke.

Kommen Flächen in Betracht, so kann man sie durch Quadrate oder Rechtecke ersetzen, und durch Ausdrücke wie $a^2$ und $ab$ darstellen. Enthält die Aufgabe Körper, so kann man gleichgroße Cuben oder rechtwinklige Parallelopipeden dafür setzen, und dieselben durch Ausdrücke von der Form $a^3$, $a^2b$, $abc$ bezeichnen.

## Von den negativen Werthen der Unbekannten.

**159.** Bei der Anwendung der Algebra auf Zahlenaufgaben findet man zuweilen für die Unbekannten negative Werthe. Diese Werthe eignen sich bekanntlich nicht für die Aufgabe, wenn letztere mit allen darin enthaltenen oder solchen Einschränkungen vorgenommen wird, die oft entweder im Anfang oder im Verlaufe der Rechnung unter gewissen Voraussetzungen in dieselbe eingeführt werden; auch weiß man, wie diese verschiedenen Arten von Einschränkungen durch die Veränderung des Vorzeichens der Buchstaben, welche die Unbekannte in den Gleichungen ausdrücken, beseitigt werden können. Diese Bemerkungen finden bei den geometrischen Aufgaben, welche algebraisch aufgelöst werden, ebenfalls ihre Anwendung, was in Folgendem erörtert werden soll.

**160.** Nehmen wir noch einmal die Aufgabe von Nro. 145, in welcher eine Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilt werden soll. Dieselbe fällt offenbar mit folgender zusammen: Eine Gerade **AB** (Fig. 41) so in zwei Theile **AM** und **MB** zu theilen, daß der eine Abschnitt **AM** die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie **AB** und dem andern Abschnitte **MB** sei.

Macht man $AB = a$, $AM = x$, so ist $MB = a - x$, und die Gleichung der Aufgabe ist

$$[1] \qquad x^2 = a(a - x),$$

aus welcher sich die zwei Werthe ergeben

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Der erste Werth ist positiv und kleiner als a; also bestimmt derselbe wirklich einen zwischen A und B gelegenen Punkt M, wie es die Aufgabe verlangt. Der zweite ist aber negativ und eignet sich deßhalb nicht für die Aufgabe.

Aendert man in der Aufgabe das Vorzeichen von x, so wird dieselbe

[2] $$x^2 = a\,(a + x),$$

und indem man den Werth von x, der gerade vorhin negativ war, positiv nimmt, erhält man den Ausdruck

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

welcher der Gleichung [2] genügen muß. Diese Gleichung ist nun gerade dieselbe, die man erhält, wenn man auf der Verlängerung der Geraden BA über A hinaus einen Punkt M' sucht, so daß der Abstand AM' die mittlere Proportionale zwischen dem Abstand BM' und der gegebenen Geraden AB sei. Daraus folgt, daß, wenn man den positiven Werth von x auf AB rechts von A, und den negativen Werth von x, der ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen genommen wird, auf AX links von A anträgt, alle Auflösungen der in folgender, allgemeiner Weise gestellten Aufgabe sich ergeben:

Auf einer unbegrenzten Geraden, die durch zwei gegebene Punkte A und B geht, soll ein Punkt bestimmt werden, dessen Abstand vom Punkte A die mittlere Proportionale zwischen seinem Abstand vom andern Punkte B und der gegebenen Entfernung AB sei.

Diese Fassung der Aufgabe ist, wie man sieht, von der Beschränkung frei, nach welcher der verlangte Punkt zwischen A und B, und nicht anderswo sich befinden sollte.

**161.** Man hätte diese letztere Fassung auch zuerst geben können; dann hätte man, indem die Aufgabe als aufgelöst betrachtet und angenommen worden wäre, der Punkt M entspreche allen Bedingungen, noch die Unbekannte AM = x gemacht, und wäre so zu derselben Gleichung [1] und denselben Werthen von x gelangt. Aber dann wäre von Anfang an eine der Aufgabe fremdartige Beschränkung hereingebracht worden; denn man hätte die Rechnung von der Voraussetzung abhängig gemacht, daß der gesuchte Punkt M zwischen A und B liege. Nun entspricht aber blos der positive Werth dieser Voraussetzung, während der negative Werth, wenn er positiv genommen und auf der Seite AX, welche der Seite, wo der Punkt M gesucht wurde, entgegengesetzt ist, angetragen wird, die zweite Auflösung der allgemeinen Aufgabe ausmacht.

So dient der negative Werth bald zur vollständigern Auflösung einer Aufgabe, wovon die vorgegebene Aufgabe nur ein besonderer Fall ist, bald zur Aufhebung einer Beschränkung, die zum Behuf der Folgerungen und Berechnungen eingeführt wurde. Für alle Fälle ist aber zu bemerken,

daß dieser als absolute Größe genommene Werth auf der Seite angetragen wurde, welche derjenigen, wo der gesuchte Abstand sich befinden mußte, entgegengesetzt ist. Deßhalb stellen wir folgenden Grundsatz auf:

Wird die Algebra zur Auflösung einer geometrischen Aufgabe angewendet, und man nimmt als Unbekannte auf einer gegebenen Linie eine Entfernung an, die von einem auf dieser Linie befindlichen festen Punkte ausgeht, so müssen die negativen Werthe der Unbekannten in einer der vorhin angenommenen entgegengesetzten Richtung genommen werden.

Dieser Grundsatz unterscheidet sich eigentlich nicht von dem, der im ersten Theile (Nro. 7) aufgestellt wurde; auch ist zu bemerken, daß er nicht zu denjenigen gehört, die man a priori beweisen kann. Man gelangt zu demselben durch Analogie oder durch Erweiterung der Begriffe, und er wird hernach durch Anwendungen bestätigt.

**162.** Dieselbe Aufgabe möge auch dazu dienen, den Leser auf einen bedeutenden Fehler, in welchen man zuweilen verfällt, aufmerksam zu machen.

Es wurde vorhin nicht angenommen, daß der gesuchte Punkt sich auf BY befinden könnte; denn da für einen beliebigen auf dieser Seite gelegenen Punkt N der Abstand AN größer ist als AB und als BN, so kann nicht $AN^2 = AB \times BN$ sein, wie es die Aufgabe verlangt. Nehmen wir nun für einen Augenblick an, diese Bemerkung sei uns entgangen und es sei der Punkt N nach der Bedingung $AN^2 = AB \times BN$ zu bestimmen, so daß der Abstand BN als Unbekannte angenommen werde. Indem $BN = x$ gesetzt wird, hat man $AN = a + x$, und die aufzulösende Gleichung ist nun:

$$(a + x)^2 = ax \quad \text{oder} \quad x^2 + ax + a^2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3a^2}{4}},$$

welche Werthe imaginär sind und eine Unmöglichkeit andeuten. Man würde sich aber sehr irren, wenn man daraus schließen wollte, daß die Unmöglichkeit in der Aufgabe selbst enthalten sei; denn das oben Gesagte zeugt vom Gegentheil. Die Unmöglichkeit liegt hier einzig und allein in der Annahme, daß der gesuchte Punkt sich auf BY befinde. Um sich davon zu überzeugen, suche man, ob es auf der andern Seite BX einen Punkt gebe, der die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen vermag. Man bezeichne wieder den Abstand vom Punkte B bis zu diesem unbekannten Punkt mit x, so ist dessen Abstand von A entweder $a - x$ oder $x - a$, je nachdem er vor oder hinter dem Punkt A liegt.

Im ersten Fall hat man $(a-x)^2 = ax$, und im zweiten $(x-a)^2 = ax$. Diese beiden Gleichungen führen auf folgende:

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0;$$

folglich gibt diese letzte zugleich den Punkt M und M'; wirklich findet man bei ihrer Auflösung zwei reelle und positive Werthe, nämlich:

$$x = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}.$$

Wenn daher eine unbekannte Entfernung auf der Seite gesucht wird, welche derjenigen, wo sie liegen muß, entgegengesetzt ist, so wird die fehlerhafte Voraussetzung nicht immer durch negative Werthe berichtigt, wie man meinen konnte. Dieser Irrthum ist wirklich in dem obigen Beispiel erst durch imaginäre Werthe angedeutet worden.

## Von der Gleichartigkeit (Homogénéité).

**163.** Bei algebraischen Berechnungen werden die Buchstaben als Ausdrücke für Zahlen oder Verhältnisse betrachtet; folglich muß man in den Formeln und Gleichungen, auf welche die geometrischen Aufgaben führen, die Linien, Flächen und Körper ansehen, als wären sie in Zahlen ausgedrückt. So bedeutet die Formel $x = 2 + \frac{b}{a}$, wo a, b, x Linien bezeichnen, daß man die Anzahl der in b enthaltenen Längeneinheiten durch die in a enthaltene Zahl von Längeneinheiten dividiren und zum Quotienten 2 addiren müsse, um die in der unbekannten Linie x enthaltene Anzahl von Längeneinheiten zu erhalten.

**164.** Es gibt aber über die Form der Gleichungen, in welchen geometrische Größen vorkommen, einen wichtigen hieher gehörigen Grundsatz, den man das Gesetz der Gleichartigkeit nennen könnte, und der also lautet: Wenn in einer Gleichung Linien durch Buchstaben a, b, c, ... dargestellt werden, und es ist keine besondere Linie als Einheit angenommen, so muß die Gleichung in Beziehung auf diese Buchstaben gleichartig, oder die Summe mehrerer gleichartiger Gleichungen sein. *

---

* Ein Ausdruck oder eine Gleichung heißt in Beziehung auf gewisse Buchstaben gleichartig (homogène), wenn alle Glieder in Beziehung auf diese Buchstaben von demselben Grade sind. So ist die Gleichung,

$$2ax + 3a\sqrt{bc} = bx - \frac{abc}{x}$$

in Beziehung auf a, b, c, x gleichartig, und der Grad der Gleichartigkeit ist 2, weil alle Glieder vom zweiten Grade sind.

Dieser Satz bewährt sich bei allen Gleichungen, die nach geometrischen Lehrsätzen gebildet sind, und offenbar muß er auch bei allen Gleichungen stattfinden, die von jenen durch algebraische Rechnungen abgeleitet werden. Folgendes möge hiezu als allgemeine Begründung dienen.

Zur anschaulichern Darstellung werde folgende besondere Formel genommen:

$$[1] \quad a^3 + b\sqrt{ac} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{cd} - \frac{2}{b} + \frac{d}{ac} = 0,$$

welche in Beziehung auf a, b, c, d nicht gleichartig ist. Man nehme an, diese Buchstaben stellen Linien vor, und es sei keine besondere Linie als Einheit gegeben, oder mit andern Worten, die Einheit sei unbestimmt geblieben.

Zu bemerken ist, daß in dieser Gleichung die angedeuteten Operationen lauter Rechnungen sind, somit kann diese Gleichung nur dann einen Sinn haben, wenn die Buchstaben a, b, c, d nicht die Linien selbst, sondern vielmehr die Zahlen oder Verhältnisse bezeichnen, die man durch Messung der Linien mit einer Längeneinheit erhalten würde. Auf diese Weise muß wirklich die Gleichung verstanden werden; um aber jede Unklarheit zu beseitigen, sollen für einen Augenblick die Linien selbst mit A, B, C, D bezeichnet, und a, b, c, d nur als einfache Verhältnisse betrachtet werden. Nach der Voraussetzung ist die Einheit unbestimmt geblieben; nehmen wir sie beliebig und bezeichnen sie mit λ; dann können die Buchstaben a, b, c, d in der Gleichung [1] als Verhältnisse der Linien A, B, C, D zur Linie λ betrachtet werden.

Ferner kann man, anstatt eine Linie P unmittelbar auf die Einheit λ zu beziehen, zuerst P und λ mittelst einer beliebigen Linie ϱ in Zahlen ausdrücken, dann gibt offenbar das Verhältniß dieser beiden Zahlen das Verhältniß von P zu λ.

Bezeichnet man nach dieser Bemerkung die Zahlen, durch welche die auf eine beliebige Einheit ϱ bezogenen Linien A, B, C, D, λ ausgedrückt werden, mit a', b', c', d', λ', so sind die Verhältnisse von A, B, C, D zu λ gleich $\frac{a'}{\lambda'}, \frac{b'}{\lambda'}, \frac{c'}{\lambda'}, \frac{d'}{\lambda'}$. Diese Verhältnisse sind aber in der Gleichung [1] mit a, b, c, d bezeichnet; man kann also diese Verhältnisse anstatt dieser Buchstaben setzen, dann erhält man

$$\frac{a'^2}{\lambda'^2} + \frac{b'}{\lambda'}\sqrt{\frac{a'c'}{\lambda'^2}} + \sqrt[3]{\frac{a'b'}{\lambda'^2}} - \sqrt[3]{\frac{c'd'}{\lambda'^2}} - \frac{2\lambda'}{b'} + \frac{d'\lambda'}{a'c'} = 0.$$

Man kann diese Gleichung zuerst so schreiben:

$$\frac{a'^2}{\lambda'^2} + \frac{b'\sqrt{a'c'}}{\lambda'^2} + \sqrt[3]{\frac{a'b'\lambda'^4}{\lambda'^6}} - \sqrt{\frac{c'd'\lambda'^4}{\lambda'^6}} - \frac{2\lambda'^3}{b'\lambda'^2} + \frac{d'\lambda'^3}{a'c'\lambda'^2} = 0,$$

und dann, indem man auf beiden Seiten mit $\lambda'^2$ multiplicirt, erhält man

$$[2] \quad a'^2 + b'\sqrt{a'c'} + \sqrt[3]{a'b'\lambda'^4} - \sqrt[3]{c'd'\lambda'^4} - \frac{2\lambda'^3}{b'} + \frac{d'\lambda'^3}{a'c'} = 0,$$

oder was dasselbe ist,

$$a'^2 + b'\sqrt{a'c'} + \left(\sqrt[3]{a'b'} - \sqrt[3]{c'd'}\right)\lambda'^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{d'}{a'c'} - \frac{2}{b'}\right)\lambda'^3 = 0.$$

Erinnern wir uns nun, daß die Einheit $\lambda$ beliebig genommen werden kann, und beachten, daß, welches auch diese Linie sein mag, die Verhältnisse a', b', c', d', der Linien A, B, C, D zur Einheit $\varrho$ sich nicht ändern dürfen, daß aber das Verhältniß $\lambda'$ von $\lambda$ zu $\varrho$ sich nothwendig ändern und selbst jeder beliebigen Zahl gleich werden kann. Daraus läßt sich folgern, daß die vorige Gleichung für alle Werthe von $\lambda'$ stattfinden muß; also müssen die Factoren der verschiedenen Potenzen von $\lambda'$ einzeln zu Null werden, was folgende Gleichungen gibt:

$$a'^2 + b'\sqrt{a'c'} = 0, \quad \sqrt[3]{a'b'} - \sqrt[3]{c'd'} = 0, \quad \frac{d'}{a'c'} - \frac{2}{b'} = 0.$$

Da a', b', c', d' die Verhältnisse der Linien A, B, C, D, zu einer beliebigen Einheit $\varrho$, die ganz ohne Rücksicht auf die betreffenden Linien genommen wird, darstellen, so ist die Bedeutung der accentirten Buchstaben a', b', c', d' durchaus dieselbe, wie die der Buchstaben a, b, c, d in der Gleichung [1]. Man kann also beliebig die vorigen Gleichungen beibehalten oder die Accente darin weglassen und schreiben

$$[3] \quad a^2 + b\sqrt{ac} = 0, \quad \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{cd} = 0, \quad \frac{d}{ac} - \frac{2}{b} = 0.$$

Diese lassen sich aber unmittelbar aus der Gleichung [1] ableiten, indem man je die Glieder desselben Grades mit einander verbindet, und jede Verbindung gleich Null setzt.

Somit ist das Gesetz der Gleichartigkeit bewiesen, und man sieht ferner, wie die einzelnen Gleichungen, in welche die gegebene Gleichung, wenn sie nicht gleichartig ist, zerfällt, erhalten werden.

Auch ist zu bemerken, daß der Grundsatz und sein Beweis noch gelten, wenn die Gleichung Flächen und Körper enthält, wobei nur darauf zu achten ist, daß die Buchstaben, welche Flächen darstellen, als zwei Factoren, und die, welche Körper darstellen, als drei Factoren gezählt werden.

**165.** Das Gesetz der Gleichartigkeit ist nicht mehr anwendbar, sobald eine gegebene Linie als Einheit angenommen wird; denn dann verschwinden die Factoren und Theiler, welche dieser Linie gleich sind. Es ist jedoch immer leicht, die Gleichartigkeit herzustellen, wenn man diese Factoren und Theiler wieder in die Gleichung setzt. Dieß zeigt die Vergleichung

der Gleichungen [1 und 2] auf's Deutlichste: in letzterer ist $\lambda'$ keine willkührliche Zahl mehr, da $\lambda$ keine unbestimmte Einheit, sondern eine gegebene als Einheit angenommene Linie ist; dabei ist die Hülfseinheit $\varrho$, auf welche die Linien A, B, C, D, $\lambda$ bezogen sind, ganz willkührlich. Somit stellen $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $\lambda'$ die Zahlen vor, die man erhält, wenn man die Linien der Aufgabe mit einer beliebigen Einheit, die unbestimmt bleibt, mißt. Zur Vereinfachung nehme man die Accente weg, so erhält man

$$[4] \quad a^2 + b\sqrt{ac} + \sqrt[3]{ab\lambda^4} - \sqrt[3]{cd\lambda^4} - \frac{2\lambda^3}{b} + \frac{d\lambda^3}{ac} = 0.$$

Die Buchstaben a, b, c, d haben jedoch nicht mehr dieselbe Bedeutung, wie in der Gleichung [1]: denn zuerst nahm man $\lambda = 1$ an, so daß diese Buchstaben die andern auf die als Einheit angenommene $\lambda$ bezogenen Linien bezeichneten, während jetzt die Einheit ganz unbestimmt bleibt; auch ist zu bemerken, daß die Linie $\lambda$ wieder so in die Gleichung eingeführt wurde, daß die Gleichartigkeit wieder hergestellt ist.

Da die Gleichung [2] von der Gleichung [1] abgeleitet wurde, indem man $\frac{a'}{\lambda'}, \frac{b'}{\lambda'} \ldots$ für a, b ... setzte, und die gleichartige Gleichung [4] von der Gleichung [2] herkommt, indem man überall die Accente wegläßt, so kann man offenbar zu dieser gleichartigen Gleichung gelangen, wenn man sogleich für a, b ... in der Gleichung [1] $\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda} \ldots$ setzt. Man wird so auf die vorgeschriebene Regel geführt, um in den trigonometrischen Formeln (Nro. 19) den Halbmesser wieder herzustellen.

## Construction algebraischer Ausdrücke.

**166.** Die Algebra ersetzt nicht nur das graphische Verfahren durch Rechnungsmethoden, welche jede beliebige Annäherung gewähren, sondern sie ist selbst auch das sicherste Mittel zur Auffindung der Constructionen, welche bei einer geometrischen Aufgabe in Anwendung kommen können. Dieß konnte man schon bei den in Nro. 145 und 157 angeführten Beispielen voraussehen und es soll in folgendem Abschnitt noch näher entwickelt werden.

**167.** Zuerst soll gezeigt werden, wie man eine unbekannte Linie x, die ohne Wurzelzeichen als Function der bekannten Linien a, b, c ... ausgedrückt ist, mit Lineal und Zirkel construiren kann. Es sollen nur gleichartige Gleichungen als Beispiele dienen, weil sich die andern auf solche zurückführen lassen (Nro. 165).

1) Es sei

$$x = \frac{ab}{c}.$$

Dieser Werth ist gleich dem vierten Gliede der Proportion

$$c : a = b : x;$$

man erhält also x, wenn man zu den drei Linien c, a, b eine vierte Proportionale construirt.

2) Es sei

$$x = \frac{2a^2bc}{d^2e}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich so zerlegen: $x = \frac{2a \cdot a}{d} \times \frac{bc}{de}$. Mittelst einer vierten Proportionale findet man eine Linie $\alpha$ gleich $\frac{2a \cdot a}{d}$, und man hat dann $x = \frac{\alpha bc}{de}$. Nun kann man schreiben $x = \frac{\alpha b}{d} \times \frac{c}{e}$, und indem man wieder eine vierte Proportionale $\beta$ zu $\frac{\alpha b}{d}$ sucht, hat man $x = \frac{\beta c}{e}$, welcher Ausdruck selbst mittelst einer vierten Proportionale construirt wird.

3) Hätte man

$$x = \frac{am^3}{n^3} + \frac{bm^2}{n^2} + \frac{cm}{n},$$

so wäre es offenbar genügend, wenn man die vierten Proportionalen suchen würde. In diesem Falle lassen sich aber die Constructionen auf folgende Weise ziemlich elegant an einander fügen.

Es sei (Fig. 42) $RM = m$ und $RN = n$; man beschreibe einen beliebigen Winkel RNS, ziehe MT parallel mit NS, mache $NA = a$, und ziehe RA, welche MT in F schneidet; nun hat man

$$RN : RM = NA : MF, \text{ oder } n : m = a : MF,$$

woraus

$$MF = \frac{am}{n}.$$

Zieht man FF′ parallel mit RN und setzt $F'B = b$, so hat man

$$NB = MF + F'B = \frac{am}{n} + b;$$

wenn man daher RB zieht, welche die MT in G trifft, so ist

$$RN : RM = NB : MG, \text{ oder } n : m = \frac{am}{n} + b : MG,$$

woraus

$$MG = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n}.$$

Es sei endlich GG′ auch parallel mit RN, und G′C = c; so hat man

$$NC = MG + G'C = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} + c;$$

folglich, wenn RC gezogen wird, welche MT in H schneidet, ergibt sich

$$n : m = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} + c : MH,$$

woraus

$$MH = \frac{am^3}{n^3} + \frac{bm^2}{n^2} + \frac{cm}{n};$$

also ist $x = MH$.

4) Es sei

$$x = \frac{abc - d^3}{mn + p^2}.$$

Indem man darauf Rücksicht nimmt, daß der Buchstabe d in diesem Ausdruck öfter als die andern vorkommt, mache man

$$abc = d^2\alpha, \quad mn = d\beta, \quad p^2 = d\gamma;$$

so erhält man

$$x = \frac{d^2(\alpha - d)}{d(\beta + \gamma)} = \frac{d(\alpha - d)}{\beta + \gamma}.$$

Man erhält also x, indem man zu den drei Linien $\beta + \gamma$, $\alpha - d$ und d eine vierte Proportionale sucht. Was die unbekannten Linien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ betrifft, so lassen sich diese aus den oben angenommenen Gleichungen bestimmen, woraus sich ergibt

$$\alpha = \frac{abc}{d^2}, \quad \beta = \frac{mn}{d}, \quad \gamma = \frac{p^2}{d},$$

welche eingliedrige Ausdrücke denen der vorhergehenden Beispiele ähnlich sind. Der ganze Kunstgriff besteht bei dieser Methode offenbar darin, den Zähler und Nenner in Producte aus Factoren des ersten Grades umzuformen.

5) Es sei noch

$$x = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc}.$$

Die Uebung im Rechnen läßt zuweilen bequeme Zerlegungen finden, was hier der Fall ist; denn bei einiger Aufmerksamkeit erkennt man, daß dieser Ausdruck sich in folgenden verwandeln läßt:

$$x = \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(a-b-c)}{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)}.$$

Dieser ist leicht zu construiren, da er nur Producte von bekannten Linien enthält.

**168.** Wir gehen nun zu Ausdrücken über, welche Wurzelwerthe des zweiten Grades enthalten. Die einfachsten sind folgende:

$$x = \sqrt{ab}, \quad x = \sqrt{a^2+b^2}, \quad x = \sqrt{a^2-b^2}.$$

Der erste, $x = \sqrt{ab}$ ist eine mittlere Proportionale zwischen den Linien a und b, und die Geometrie liefert zur Bestimmung derselben mehrere Constructionen. Der zweite, $x = \sqrt{a^2+b^2}$, ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Catheten a und b sind. Der dritte endlich, $x = \sqrt{a^2-b^2}$, ist die Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks, das a zur Hypotenuse, und b zur andern Cathete hat. Man kann auch $\sqrt{a^2-b^2}$ in $\sqrt{(a+b)\,(a-b)}$ zerlegen, dann ist x die mittlere Proportionale zwischen $a+b$ und $a-b$.

Um die in Nro. 154 gefundenen Werthe für y,

$$y = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}m^2 \pm a\sqrt{a^2+m^2}}$$

zu construiren, errichte man mit den Catheten a und m ein rechtwinkliges Dreieck, und ein anderes mit den Catheten a und $\frac{1}{2}$m; bezeichnet man ihre Hypotenusen mit $\alpha$ und $\beta$, so verwandeln sich die Werthe von y in folgende: $y = \sqrt{\beta^2 \pm a\alpha}$. Um für $a\alpha$ ein Quadrat zu erhalten, nehme man zwischen a und $\alpha$ die mittlere Proportionale $\gamma$, dann hat man $y = \sqrt{\beta^2 \pm \gamma^2}$, welche Werthe sich mittelst rechtwinkliger Dreiecke construiren lassen.

Betrachten wir jetzt einen Werth von beliebiger Zusammensetzung, zum Beispiel

$$x = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{a^2b^2 - abc^2 + c^4}{ac+b^2}}.$$

Man verwandle zuerst die Größe unter dem Wurzelzeichen in einen Bruch, dessen Zähler und Nenner, wie in Nro. 167, Producte aus Linien sind. Man setze deßhalb $a^2b^2 = c^3\alpha$, $abc^2 = c^3\beta$, $b^2 = c\gamma$; dann erhält man

$$x = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{c^3\,(\alpha-\beta+c)}{c\,(a+\gamma)}} = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{c^2\,(\alpha-\beta+c)}{a+\gamma}}.$$

Nun suche man zwei Linien $\delta$ und $\delta'$, die als vierte Proportionalen gleich $\frac{ac}{b}$ und $\frac{c(\alpha-\beta+c)}{a+\gamma}$ sind, so hat man $x = \delta + \sqrt{c\delta'}$; endlich sei $\varrho$ eine mittlere Proportionale zwischen c und $\delta'$, so ergibt sich $x = \delta + \varrho$, und man darf nur noch diese zwei Linien zusammen addiren.

Die durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dargestellten Linien findet man mittelst vierter Proportionalen; denn man hat

$$\alpha = \frac{a^2b^2}{c^3}, \quad \beta = \frac{ab}{c}, \quad \gamma = \frac{b^2}{c}.$$

**169.** Die Constructionen werden nicht schwieriger, wenn der Wurzelexponent des Radicanden eine Potenz von 2 ist. Es sei zum Beispiel:

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^7 - 3a^4b^3 + b^7}{a^3 + b^3}},$$

so läßt sich die Größe unter dem Wurzelzeichen leicht in ein Product aus vier einfachen Factoren umformen. Man setze deßhalb

$$b^3 = a^2\alpha, \quad b^7 = a^6\beta,$$

so erhält man

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^6(a - 3\alpha + \beta)}{a^2(a+\alpha)}} = \sqrt[4]{\frac{a^4(a - 3\alpha + \beta)}{a+\alpha}}.$$

Bezeichnet man die vierte Proportionale aus $\frac{a(a-3\alpha+\beta)}{a+\alpha}$ mit $\gamma$, und die mittlere Proportionale aus $\sqrt{a\gamma}$ mit $\delta$, so ergibt sich

$$x = \sqrt[4]{a^3\gamma} = \sqrt{\sqrt{a^5\gamma}} = \sqrt{a\sqrt{a\gamma}} = \sqrt{a\delta},$$

wo nur noch die mittlere Proportionale zwischen a und $\delta$ zu suchen ist.

**170.** Die Gleichungen vom zweiten Grade lassen sich auf die Form $x^2 + ax = q$ bringen. Bezeichnen a und x Linien, so erfordert die Gleichartigkeit, daß q, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen, eine Fläche oder ein Product aus zwei Linien vorstelle. Es sei $b^2$ ein dieser Fläche gleiches Quadrat, so erhält man, wenn man in der Gleichung alle mit den Vorzeichen ihrer Glieder möglichen Combinationen vornimmt, folgende vier Gleichungen:

[1] $x^2 - ax = -b^2$, [2] $x^2 + ax = -b^2$,

[3] $x^2 - ax = +b^2$, [4] $x^2 + ax = +b^2$.

Zieht man aus diesen Gleichungen die Werthe von x, so erhält man lauter Wurzelgrößen des zweiten Grads; dabei ist jedoch zu bemerken,

daß es nicht nöthig ist, dieselben aufzulösen, um die Wurzelwerthe zu construiren.

Die erste Gleichung, $x^2 - ax = -b^2$, wenn sie unter die Form

$$x(a - x) = b^2$$

gebracht wird, zeigt, daß x und a — x zwei Linien sind, deren Summe gleich einer gegebenen Länge a, und deren Rechteck gleich einem gegebenen Quadrate $b^2$ ist. Man beschreibe daher (Fig. 43) auf einem Durchmesser AB gleich a einen Halbkreis; errichte auf AB die Senkrechte BC gleich b, ziehe CF parallel mit AB, bis sie den Halbkreis in D schneidet, und fälle hierauf die Senkrechte DE auf AB; dann sind die Abschnitte BE und AE die Werthe der Unbekannten. Denn es sei x einer der Abschnitte, so ist der andere a—x; nun ist $BE \times AE = DE^2$, also $x(a - x) = b^2$, wodurch die Gleichung aufgelöst ist.

Ist $BC = \frac{1}{2}AB$ oder $b^2 = \frac{1}{4}a^2$, so wird die Linie CF zur Tangente, und die beiden Abschnitte AE, BE sind gleich $\frac{1}{2}a$: dieser Fall entspricht demjenigen, wo die Wurzeln der Gleichung einander gleich sind. Wenn aber BC größer wird als $\frac{1}{2}AB$, so trifft die CF den Kreis nicht mehr, welcher Umstand dem Falle der imaginären Wurzelgrößen entspricht.

Die Gleichung [2], $x^2 + ax = -b^2$, hat keine positiven Wurzeln. Verändert man in derselben x in —x, so wird daraus $x^2 - ax = -b^2$, welche Gleichung der ersten ähnlich ist; wenn man daher die Wurzeln von dieser gefunden hat, so muß man denselben für [2] das Vorzeichen — geben.

Nehmen wir jetzt die Gleichung [3] und schreiben sie auf folgende Weise:

$$x(x - a) = b^2.$$

Bei dieser Form sieht man, daß x und x — a zwei Linien sind, deren Differenz gleich a, und deren Rechteck gleich $b^2$ ist. Um sie zu finden, beschreibe man (Fig. 44) über dem Durchmesser AB = a einen Kreis, ziehe die Tangente BC = b, und von C aus durch den Mittelpunkt die Secante CDE: so sind die Werthe von x gleich CE und gleich — CD; denn wenn jeder derselben in die Gleichung $x(x - a) = b^2$ gesetzt wird, so gelangt man in beiden Fällen zu der Gleichung $CD \times CE = BC^2$, deren Richtigkeit in der Geometrie bewiesen wurde.

Die Gleichung [4] hat die Wurzeln der Gleichung [3] mit entgegengesetzten Vorzeichen; die Werthe von x sind folglich

$$x = CD \text{ und } x = -CE.$$

**171.** Die irrationalen Ausdrücke, die sich nicht auf Wurzelgrößen des zweiten Grades bringen lassen, werden hier nicht aufgeführt, *da es nicht möglich ist, solche mit der geraden Linie und dem Kreise, welche Linien in der Planimetrie blos vorkommen,*

zu construiren. Dieser Satz, dessen Beweis gewöhnlich übergangen wird, kann indessen auf eine sehr einfache Weise bewiesen werden.

Nehmen wir wirklich an, die betreffende Aufgabe lasse sich durch bloße Anwendung von Linien und Kreisen auflösen, man wisse aber nicht, wie diese Linien gezogen werden müssen; so ist wenigstens klar, wenn man die auf einander folgenden Constructionen aus den gegebenen Stücken (Geraden, Kreisen und Winkeln) zur Auffindung der unbekannten Linien aufmerksam verfolgt, daß es doch immer möglich ist, diese Gegebenen durch eine Verbindung von Dreiecken, die alle vollkommen bestimmt sind, mit der Unbekannten in Beziehung zu bringen. Nun hat man aber in der Trigonometrie gesehen, daß in allen Fällen, wo ein Dreieck bestimmt wird, die unbekannten Stücke entweder als Functionen der bekannten, oder durch rationale Formeln, oder durch Formeln, die nur Wurzelgrößen vom zweiten Grad enthalten, ausgedrückt werden; dasselbe muß also auch noch bei unbekannten Werthen, die durch die letzten Dreiecke gegeben sind, der Fall sein. Dabei ist wohl zu merken, daß für die Winkel immer ihre Sinus, Cosinus ꝛc. gesetzt werden.

Daraus folgt, wenn eine Aufgabe mit dem Lineal und dem Zirkel aufgelöst werden kann, so müssen die mittelst der Algebra gefundenen Unbekannten entweder rationale oder solche Größen sein, die sich auf Wurzelwerthe vom zweiten Grad bringen lassen. Wenn man folglich auf Ausdrücke kommt, welche auf keine dieser Formen gebracht werden können, so muß man daraus schließen, daß die Aufgabe nicht zur Classe derer gehört, die sich mittelst der Elementar-Geometrie auflösen lassen; was eben zu beweisen war.

**172.** Den Alten, welche die Algebra nicht kannten, fehlte es an Mitteln, um zu beurtheilen, ob eine Aufgabe mit der geraden Linie und dem Kreise aufgelöst werden könne, und da sie diese Art der Construction, die sie für einfacher und eleganter hielten, vor Allem suchten, so veranlaßte sie eben die Zwecklosigkeit ihrer Bemühungen, zu andern Linien ihre Zuflucht zu nehmen. Nebst dem Kreise zogen sie besonders die Kegelschnitte vor, welche wir später näher untersuchen werden; sie haben sogar gewisse Curven zu dem speciellen Zwecke erfunden, um einige besondere Aufgaben, z. B. den Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, oder die beiden mittleren geometrischen Proportionalen zu finden, aufzulösen. Da indessen die Analyse für diese Aufgaben die genauesten Auflösungen, die man nur wünschen kann, gibt, so legen die Mathematiker diesen Curven keinen Werth mehr bei.

Bis jetzt wurde erklärt, wie die Aufgaben in eine Gleichung gebracht, wie die negativen Werthe der Unbekannten behandelt, und wie die algebraischen Ausdrücke construirt werden; es soll jetzt noch die Auflösung einiger ausgewählten Aufgaben gezeigt werden.

## Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben.

**173. Erste Aufgabe.** Die drei Seiten eines Dreiecks seien gegeben, man soll den Flächeninhalt dieses Dreiecks, den Halbmesser des umschriebenen und des einbeschriebenen Kreises finden.

1) Flächeninhalt des Dreiecks (Fig. 45). Das Dreieck sei ABC, und in demselben $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; man fälle die Senkrechte AD. Da einer der Winkel B oder C nothwendigerweise ein spitziger sein muß, so nehme man an, es sei dieß der Winkel C: nun hat man nach einem bekannten Lehrsatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CD, \text{ woraus } CD = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a};$$

ferner gibt das rechtwinklige Dreieck ACD

$$AD = \sqrt{AC^2-CD^2} = \sqrt{b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}}{2a}.$$

Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{2}a \times AD$; man hat also, wenn man diesen Inhalt mit S bezeichnet

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}.$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen läßt sich in Factoren zerlegen, dann erhält der Werth für S eine bemerkenswerthe, besonders für die logarithmische Berechnung bequeme Form. Da nämlich dieser Ausdruck eine Differenz zweier Quadrate ist, so läßt er sich zuerst in zwei Factoren

$$(2ab + a^2 + b^2 - c^2) \times (2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

zerlegen; da ferner jeder dieser Factoren selbst eine Differenz von Quadraten ist, so zerfällt er wieder in zwei weitere Factoren: so daß man erhält

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}.$$

Es sei a die größte der drei Linien a, b, c. Damit nun das Dreieck möglich sei, muß $a < b + c$ sein; dann ist um so mehr $b < a + c$ und $c < a + b$: also sind alle Factoren unter dem Wurzelzeichen positiv, und somit der Werth von S reell, wie zu erwarten war. Ist aber das Dreieck unmöglich, so muß $a > b + c$ sein; folglich ist der letzte Factor negativ: die vorhergehenden sind indessen positiv, da a der Annahme nach größer ist als b oder c; somit ist der Werth von S imaginär.

Wird $a = b + c$ angenommen, so erhält man $S = 0$. Dieser Fall findet statt, wenn die Spitze A, nachdem sie der Grundlinie BC sehr

nahe gekommen ist, endlich auf die Grundlinie selbst fällt; dann wird offenbar die Fläche des Dreiecks zu Null.

Der Ausdruck für S läßt sich vereinfachen, indem man $a+b+c=2p$ setzt; dadurch erhält man

$$a+b-c=2(p-c),\quad a+c-b=2(p-b),\quad b+c-a=2(p-a):$$

somit ergibt sich

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2) Halbmesser des umschriebenen Kreises (Fig. 46). Man setze wieder $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Es sei AE der Durchmesser des umschriebenen Kreises; man fälle die Höhe AD und ziehe BE. Nun sind die Dreiecke ABE und ADC ähnlich; denn die Winkel ABE und ADC sind einander gleich als rechte, und die Winkel AEB und ACD sind als Peripheriewinkel auf gleichem Bogen einander gleich. Man hat also die Proportion $AE:AB=AC:AD$, oder $2R:c=b:AD$, wo R den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Diese Proportion gibt

$$R=\frac{bc}{2AD}=\frac{abc}{2a\times AD}=\frac{abc}{4S}.$$

Setzt man für S seinen oben gefundenen Werth, so erhält man für den gesuchten Halbmesser

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

3) Halbmesser des einbeschriebenen Kreises (Fig. 47). Es sei O der Mittelpunkt und r der Halbmesser des in das Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises. Zieht man die Linien OA, OB, OC, so wird das Dreieck in drei andere zerlegt, deren Flächeninhalt je gleich $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$ ist; also ist der Flächeninhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{2}r(a+b+c)$. Somit erhält man

$$\tfrac{1}{2}r(a+b+c)=S,\text{ woraus }r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{S}{p};$$

oder, indem man für S seinen Werth setzt,

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

**174. Zweite Aufgabe.** Die Diagonalen eines in den Kreis beschriebenen Vierecks zu finden, wenn die vier Seiten desselben gegeben sind.

Folgende, sehr bekannte Auflösung findet sich bei Viète:

Es sei ABCD (Fig. 48) ein in den Kreis beschriebenes, oder vielmehr einbeschreibbares Viereck; man setze

$$AB = a,\quad BC = b,\quad CD = c,\quad AD = d,\quad AC = x,\quad BD = y.$$

Um den Fall bestimmter aufzufassen, sei der Winkel ABC spitzig, dann ist der Winkel ADC stumpf und gleich dem Supplement des Winkels ABC; also muß, wenn man CD verlängert, der Winkel ADQ gleich ABC sein. Fällt man die Senkrechten CP, AQ, so sind die Dreiecke CBP und ADQ ähnlich, und geben BP : DQ = b : d, woraus

$$[1] \qquad d \times BP = b \times DQ.$$

Die Dreiecke ABC und ACD geben aber nach bekannten Lehrsätzen

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2a \times BP,\quad x^2 = c^2 + d^2 + 2c \times DQ;$$

woraus man erhält

$$BP = \frac{a^2+b^2-x^2}{2a},\qquad DQ = \frac{x^2-c^2-d^2}{2c},$$

und indem man diese Werthe in die Gleichung [1] setzt, ergibt sich

$$cd\,(a^2 + b^2 - x^2) = ab\,(x^2 - c^2 - d^2),$$

woraus

$$x = \sqrt{\frac{a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2}{ab+cd}}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist gleich dem Product

$$(ac + bd)\,(ad + bc);$$

also läßt sich der Werth für die Diagonale AC auch so schreiben:

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

Um die andere Diagonale BD oder y zu finden, sind die Berechnungen offenbar dieselben, wie vorhin, nur mit dem Unterschiede, daß man b, c, d, a für a, b, c, d erhält. Nimmt man daher diese Aenderung in der obigen Formel vor, so erhält man den Werth für y, nämlich

$$y = \sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Bemerkungen. 1) Mittelst der vorigen Werthe läßt sich das einbeschreibbare Viereck, dessen Seiten bekannt sind, leicht construiren. Denn man darf nur über AC als Grundlinie (Fig. 49), das Dreieck ACD mit den Seiten c und d, und unterhalb AC ein anderes Dreieck mit den Seiten a und b beschreiben. Man findet so zwei verschiedene Vierecke ABCD und AB'CD. Die Diagonale AC selbst ist leicht zu construiren;

denn man kann zuerst jedes Product aus zwei Linien in ein Quadrat, und dann jede Summe aus zwei Quadraten in ein einziges Quadrat verwandeln; auf diese Weise erhält der Werth von x die Form

$$x = \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta^2}{\gamma^2}} = \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

und man hat nur noch die vierte Proportionale zu $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zu suchen.

2) Multiplicirt man die beiden Diagonalen mit einander, so findet man

$$xy = \sqrt{\frac{(ac+bd)^2\,(ab+cd)\,(ad+bc)}{(ab+cd)\,(ad+bc)}} = ac + bd;$$

also ist in jedem einbeschriebenen Viereck das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der beiden Rechtecke aus den Gegenseiten.

3) Nimmt man das Verhältniß derselben Diagonalen, so erhält man

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}} = \frac{ad+bc}{ab+cd};$$

es verhalten sich daher die Diagonalen zu einander, wie die Summen der Rechtecke aus den je an den Endpunkten dieser Diagonalen zusammentreffenden Seiten.

**175. Dritte Aufgabe.** Die vier Seiten eines einbeschriebenen Vierecks seien gegeben, man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Man suche, wie im vorigen Fall, die Werthe für BP und AC (Fig. 48). Diese Werthe sind

$$BP = \frac{a^2+b^2-x^2}{2a}, \quad x = \sqrt{\frac{a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2}{ab+cd}}.$$

Setzt man in BP für x seinen Werth, so ergibt sich nach vorgenommener Reduction

$$BP = \frac{b\,(a^2+b^2-c^2-d^2)}{2\,(ab+cd)}.$$

Nun gibt das rechtwinklige Dreieck BCP

$$CP = \sqrt{BC^2 - BP^2} = \frac{b\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2\,(ab+cd)};$$

also ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$ABC = \frac{ab\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{4\,(ab+cd)}.$$

Auf ähnliche Weise findet man für das Dreieck

$$ADC = \frac{cd\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{4(ab+cd)}.$$

Nun ist $ABC + ADC = ABCD$; bezeichnet man also ABCD mit S, so erhält man

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}.$$

Diese Wurzelgröße läßt sich leicht in Factoren zerlegen, dann ergibt sich

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b+d-c)\,(a+c+d-b)\,(b+c+d-a)},$$

oder auch, indem $a + b + c + d = 2p$ gesetzt wird,

$$S = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,p-d)}.$$

Bemerkung. Der Halbmesser des Kreises, in welchen das Viereck beschrieben werden kann, läßt sich leicht finden. Man berechnet nämlich die Diagonale AC, dann sind die drei Seiten des Dreiecks ABC bekannt, und man erhält den gesuchten Halbmesser des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises aus der in Nro. 173 gesuchten Formel.

**176. Vierte Aufgabe.** Es sind drei Parallelen FG, HI, KL (Fig. 50) gegeben, man soll die Seiten eines Dreiecks mit gegebenen Winkeln finden, dessen Spitzen in diesen Parallelen liegen.

Es sei ABC das gesuchte Dreieck, von welchem die Winkel A, B, C gegeben, aber die Seiten unbekannt sind.

Man setze

$$BC = x, \quad AC = y, \quad AB = z,$$

fälle auf KL die Senkrechte AE, welche die HI in D schneidet, und mache

$$AD = a \text{ und } AE = b.$$

Nun geben die rechtwinkligen Dreiecke ABD und ACE

$$\cos BAD = \frac{a}{z}, \quad \cos CAE = \frac{b}{y};$$

somit erhält man

$$\sin BAD = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}, \quad \sin CAE = \frac{\sqrt{y^2-b^2}}{y}.$$

Es ist aber $CAE + BAD =$ Winkel A; also

$$\cos(CAE + BAD) = \cos A,$$

oder indem man diesen Ausdruck entwickelt,

$$\cos CAE \cos BAD - \sin CAE \sin BAD = \cos A.$$

Ersetzt man die Sinus und Cosinus durch ihre Werthe, schafft die Wurzelwerthe weg und führt die weitern Reductionen aus, so ergibt sich als erste Gleichung

$$y^2z^2 \sin^2 A - a^2y^2 - b^2z^2 + 2abyz \cos A = 0.$$

In jedem Dreieck verhalten sich aber die Seiten, wie die Sinus der Gegenwinkel; man hat daher im Dreieck ABC

$$y : x = \sin B : \sin A, \quad \text{woraus} \quad y = \frac{x \sin B}{\sin A},$$

$$z : x = \sin C : \sin A, \quad \text{woraus} \quad z = \frac{x \sin C}{\sin A}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung, so erhält man nach allen Reductionen, und nachdem man mit $x^2$ wegdividirt hat:

$$x^2 = \frac{a^2}{\sin^2 C} + \frac{b^2}{\sin^2 B} - \frac{2ab \cos A}{\sin C \sin B}.$$

Es ist nunmehr leicht, den Werth von x zu erhalten, und dann auch mittelst der vorhergehenden Relationen den von y und z; wodurch somit die Aufgabe aufgelöst ist.

Der Werth von x ist leicht zu construiren. Da FG, HI und KL gegebene Parallelen sind, so mache man die Winkel RBH und RCL beziehungsweise gleich den gegebenen Winkeln C und B und verbinde die Punkte B und C; dann ist BC die gesuchte mit x bezeichnete Seite. Um sich davon zu überzeugen, fälle man die Senkrechte RD'E', so geben die rechtwinkligen Dreiecke RBD' und RCE' (Nro. 63)

$$RB = \frac{a}{\sin C}, \qquad RC = \frac{b}{\sin B}.$$

Verlängert man jetzt RB, so ist der Winkel ROC = RBH = C; aber der Winkel RCO ist schon gleich B, also ist der dritte Winkel CRO des Dreiecks RCO gleich dem Winkel A; folglich gibt das Dreieck RBC (Nro. 66)

$$BC^2 = RB^2 + RC^2 - 2RB \times BC \times \cos A,$$

oder, indem man für RB und RC ihre Werthe setzt,

$$BC^2 = \frac{a^2}{\sin^2 C} + \frac{b^2}{\sin^2 B} - \frac{2ab \cos A}{\sin C \sin B}.$$

Dieser Ausdruck ist aber derselbe wie der für $x^2$; also ist BC die gesuchte Seite, die nach der Aufgabe zwischen den gegebenen Parallelen HI und KL liegt.

Um das Dreieck zu vollenden, beschreibe man durch die drei Punkte R, B und C einen Kreis, der die FG in einem zweiten Punkte A schneidet; dann ziehe man die Geraden AB und AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Will man diese Construction a posteriori beweisen, so beachte man, daß wegen der parallelen Secanten Bogen ASC = Bogen RBT ist; also ist der auf dem ersten Bogen stehende Winkel ABC gleich dem auf dem zweiten stehenden Winkel RCO. Aber nach der Construction ist der Winkel RCO gleich B; also ist auch Winkel ABC = B. Da nun das Dreieck ABC zwei Winkel CAB und ABC gleich A und B enthält, so muß auch der dritte gleich C sein.

Dieselben Constructionen kann man auch auf der andern Seite des Punktes B machen, und ein zweites Dreieck A'BC' beschreiben, das vom ersten nur durch seine Lage unterschieden ist. Ueberdieß ist klar, daß jeder Punkt der Parallele HI dazu dienen kann, zwei Dreiecke zu bestimmen, welche diesen gleich sind, und wodurch die Aufgabe auch aufgelöst wird.

Bemerkung. Die vorige Construction ist mit den gegebenen Größen selbst vorgenommen und die Linie BC in der Lage gefunden worden, welche die mit x bezeichnete unbekannte Seite haben muß, und darin besteht eben die Eleganz der auf algebraischem Wege gefundenen Constructionen. Indessen erfüllen sie diese Bedingungen selten und haben sogar gewöhnlich den Nachtheil, daß sie nicht so einfach sind, als die, welche mittelst rein geometrischer Behandlung abgeleitet werden. Die eben aufgelöste Aufgabe ist ein Beweis davon.

**177.** Zum Schlusse dieses Kapitels folgen noch einige Aufgaben zur Auflösung.

I. Ein Quadrat in ein Dreieck zu beschreiben.

II. Die Grundlinie eines Dreiecks, der Winkel an der Spitze und die Summe der beiden andern Seiten seien gegeben, man soll diese beiden Seiten finden.

III. Auf einer gegebenen Grundlinie ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Summe der beiden andern Seiten doppelt so groß sei als die Grundlinie, und dessen Spitze in einer der Lage nach gegebenen Geraden liege.

IV. Die Höhe eines Dreiecks, der Halbmesser des einbeschriebenen und der des umschriebenen Kreises seien gegeben; man soll die drei Seiten des Dreiecks finden.

V. Der Umfang eines Dreiecks, der Halbmesser des einbeschriebenen und der des umschriebenen Kreises seien gegeben; es sollen die Seiten desselben gefunden werden.

VI. Die vier Seiten eines Trapezes zu finden, wenn die Winkel, der Flächeninhalt und der Umfang desselben gegeben sind.

VII. Ein Trapez durch eine mit den parallelen Seiten parallele Linie zu halbiren.

VIII. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit zwei andern, der Lage nach gegebenen Geraden ein Dreieck einschließt, das einem Quadrat $k^2$ gleich ist.

IX. Es seien drei concentrische Kreise gegeben, man soll die Seite des gleichseitigen Dreiecks finden, dessen Spitzen in diese drei Kreislinien treffen.

X. Ein Dreieck zu finden, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, und das mit seinen Winkelspitzen in drei gegebene concentrische Kreislinien trifft.

XI. Auf einer Kugelfläche ist ein Kreis gegeben; man soll parallel mit diesem einen zweiten Kreis suchen, der einen Kugelabschnitt abschneidet, welcher zu dem Kegel, dessen Spitze in den Mittelpunkt des ersten Kreises trifft, und von welchem der zweite Kreis die Grundfläche ist, in einem gegebenen Verhältnisse steht.

XII. Es sei ein Kegelrumpf mit parallelen Grundflächen gegeben, es soll parallel mit den Grundflächen eine Ebene gelegt werden, welche diesen Rumpf nach einem gegebenen Verhältnisse in zwei Theile theilt.

# Zweites Kapitel.

## Von den geometrischen Oertern.

---

### Geometrische Oerter. Darstellung derselben durch Gleichungen.

**178.** Bei einer geometrischen Aufgabe, in welcher die Lage eines Punkts gesucht wird, kann der Fall vorkommen, daß alle Punkte einer Linie der gegebenen Bedingung entsprechen; die Aufgabe ist dann unbestimmt und diese Linie muß selbst durch algebraische Rechnung zu finden sein. Es soll z. B. ein Punkt bestimmt werden, der die Spitze eines Dreiecks bildet, dessen Grundlinie gegeben ist, und von welchem die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich dem Quadrat der Grundlinie ist. Es ist klar, daß alle Punkte der Kreislinie, welche auf der Grundlinie als Durchmesser beschrieben wird, die verlangte Eigenschaft haben. Will man diese sehr einfache Aufgabe algebraisch auflösen, so denke man sich von dem gesuchten Punkt M (Fig. 51) eine Senkrechte MP auf die gegebene Grundlinie AB gefällt; die Entfernungen AP und MP sind dann zwei Unbekannte, die zur Bestimmung des Punktes M gefunden werden müssen.

Man setze

$$AP = x,\ MP = y,\ AB = a;$$

nun geben die rechtwinkligen Dreiecke AMP und BMP:

$$AM^2 = MP^2 + AP^2 = y^2 + x^2$$
$$BM^2 = MP^2 + BP^2 = y^2 + (a-x)^2.$$

Die Aufgabe gibt aber als einzige Bedingung $AM^2 + BM^2 = AB^2$; setzt man daher anstatt dieser Linien ihre Werthe, so erhält man zur Bestimmung von x und y, die einzige Gleichung

$$y^2 + x^2 + y^2 + (a-x)^2 = a^2,$$

oder, indem man sie reducirt,

$$y^2 = ax - x^2.$$

Diese Gleichung ändert sich nicht, welche Lage auch der Punkt M, sei es oberhalb oder unterhalb AB, haben mag. Da sie zwei Unbekannte enthält, so kann man einer derselben, z. B. x, einen willkührlichen Werth AP geben; die andere Unbekannte y läßt sich dann aus der Gleichung berechnen, und man findet dafür die Höhe PM, welche der Entfernung AP entspricht. Legt man x alle stetig auf einander folgenden Werthe bei, so findet man alle Punkte der Kreislinie, durch welche die Aufgabe aufgelöst wird. Dabei ist zu bemerken, daß y zwei Werthe hat,

$$y = \pm\sqrt{ax - x^2},$$

und man es als ausgemacht betrachten kann, daß der negative Werth unterhalb AB auf PM′ angetragen wird.

Ohne weiter in das Einzelne einzugehen, zeigt das Angeführte hinreichend, wie unbestimmte Aufgaben zur Auffindung gewisser Linien führen, deren Punkte alle die nämliche in der Aufgabe verlangte Eigenschaft haben. Die so entstandenen, d. h. gleichsam aus Punkten, welchen dieselbe Eigenschaft zukommt, gebildeten Linien, heißen geometrische Oerter.

Die eleganteste Auflösung einer Aufgabe, in welcher ein unbekannter Punkt zu finden ist, besteht oft in der Bestimmung zweier geometrischen Oerter, deren Durchschnittspunkt der gesuchte Punkt ist. Es ist indessen hier nicht der Ort, um weitere Erörterungen über diesen Gegenstand zu geben.

Die Algebra läßt sich auf die vortheilhafteste Weise zur Auffindung der geometrischen Oerter und ihrer Eigenschaften anwenden, und der Hauptgegenstand dieses Werkes ist nunmehr die Entwicklung der für solche Untersuchungen geeigneten Methoden.

**179.** Um die Lage eines Punktes auf einer Geraden x′x (Fig. 52) zu bestimmen, gibt man den Abstand desselben von einem festen Punkte A auf dieser Linie an, und setzt vor den Abstand das Vorzeichen + oder —, je nachdem der Punkt auf Ax oder auf Ax′ liegt. Wird nach solcher Uebereinkunft der Abstand mit dem ihm zukommenden Vorzeichen allgemein mit x bezeichnet, so bestimmt die Gleichung $x = +2$ einen auf Ax liegenden Punkt, dessen Abstand AM von A zwei Längeneinheiten beträgt, während die Gleichung $x = -2$ einen auf der entgegengesetzten Seite, aber immer in derselben Entfernung liegenden Punkt M′ anzeigt.

Also dient das vor dem Werthe von x stehende Vorzeichen — nur dazu, um die Richtung, in welcher diese Entfernung anzutragen ist, anzugeben.

**180.** Um die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, zieht man in derselben zwei Geraden x′x und y′y (Fig. 53), die einen bekannten Winkel mit einander bilden, und zieht durch jenen Punkt parallel mit diesen Linien die Geraden MP und MQ, welche dieselben in bestimmten Punkten P und Q schneiden. Nun ist offenbar der Punkt M vollkommen bestimmt, wenn man die Punkte P und Q kennt; denn wenn man durch

diese Punkte PM parallel mit Ay und QM parallel mit Ax zieht, so müssen sich diese Parallelen in M schneiden. Der Punkt P ist aber bestimmt, wenn der Abstand AP gegeben und demselben das Zeichen + oder — vorgesetzt ist, je nach der Lage von P in Beziehung auf A; ebenso ist der Punkt Q mittelst des Abstandes AQ und des beigefügten Vorzeichens bestimmt: mit diesen Angaben ist der Punkt M vollkommen bestimmt.

Die Abstände, wie AP oder der ihm gleiche MQ, heißen Abscissen, und die Abstände, wie AQ oder der ihm gleiche MP, heißen Ordinaten. Die Linie x'x, auf welcher die Abscissen genommen werden, heißt Abscissen-Axe, und y'y die Ordinaten-Axe. Die Abscissen und Ordinaten führen auch den gemeinschaftlichen Namen Coordinaten; die Linien x'x und y'y sind dann die Coordinaten-Axen, und der Punkt A, wo sie sich schneiden, ist ihr Ursprung oder Anfangspunkt. Oft bezeichnet man auch die Abscissen allgemein mit x und die Ordinaten mit y, und man sagt dann der Kürze halber, x'x sei die Axe der x, und y'y die Axe der y.

Die Abscissen x und Ordinaten y sind als veränderliche Größen zu betrachten, die alle möglichen, positive und negative Werthe erhalten können. Die Richtung der negativen Abscissen ist zwar ganz willkührlich und ebenso die der negativen Ordinaten; in der Folge werden wir jedoch die positiven Abscissen immer auf der rechten Seite, d. h. auf Ax, und die negativen Abscissen auf der linken, die positiven Ordinaten über dem Ursprung auf Ay, und die negativen Ordinaten unterhalb desselben annehmen.

Nach dieser Uebereinkunft ist

x und y positiv im Winkel yAx,

x negativ und y positiv im Winkel yAx',

x und y negativ im Winkel y'Ax',

x positiv und y negativ im Winkel y'Ax;

gibt man nun x und y besondere Werthe, so erkennt man sogleich den Winkel, in welchem der durch diese Coordinaten bestimmte Punkt liegt.

Es sei z. B.

$$x = -2,\ y = -3,$$

so liegt der Punkt im Winkel y'Ax'.

Soll die Lage desselben bestimmt werden, so nimmt man auf Ax' die AP' = 2, und auf Ay' die AQ' = 3, zieht P'M' und Q'M' parallel mit den beiden Axen, dann ist M', wo diese Parallelen sich schneiden, der verlangte Punkt.

Für alle Punkte der Axe x'x ist die Ordinate Null; folglich würden die Werthe

$$x = -2 \text{ und } y = 0$$

den Punkt P' bestimmen.

Da ebenso für alle Punkte der Axe y'y die Abscisse Null ist, so würden die Werthe

$$x = 0 \text{ und } y = -3$$

den Punkt Q' bestimmen.

Der Ursprung A selbst wäre durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$ gegeben.

**181.** Nachdem wir nun die Lage eines Punktes bestimmen können, denken wir uns eine in einer Ebene gezogene krumme Linie (ebene Curve), von welcher alle Punkte auf zwei der Lage nach bekannte Axen bezogen sind, und es finde zwischen der Abscisse und Ordinate jedes Punktes eine constante Relation, d. h. eine gegenseitige Beziehung oder Abhängigkeit statt, die sich nicht ändert, wenn man von einem Punkte der Curve zu einem andern übergeht. In sehr vielen Fällen ist diese Relation so beschaffen, daß sie durch eine Gleichung zwischen der Abscisse und Ordinate ausgedrückt werden kann. Ist diese Gleichung einmal bekannt, so läßt sich eine beliebige dieser Größen mittelst der andern finden, so daß, wenn z. B. für die Abscisse willkührliche Werthe gesetzt werden, die entsprechenden Werthe der Ordinate sich aus der Gleichung ableiten lassen, und man erhält dadurch so viele Punkte der Curve, als man nur will.

Handelt es sich um eine gerade Linie, wie AB (Fig. 54), welche den Coordinaten-Winkel xAy in zwei gleiche Theile theilt, so ist zu beachten, daß für jeden Punkt dieser Linie die Ordinate gleich der Abscisse ist; also läßt sich die Relation dieser zwei Coordinaten durch die Gleichung

$$y = x$$

ausdrücken. Mittelst dieser Gleichung lassen sich, indem man für x besondere Werthe setzt, beliebig viele Punkte der Geraden finden. Setzt man für x positive Werthe, so ergeben sich auch für y positive, wodurch die Punkte der Geraden im Winkel yAx bestimmt werden. Gibt man x negative Werthe, so ist auch y negativ, und man erhält damit Punkte im Winkel x'Ay', und jeder Punkt der verlängerten BA im Winkel x'Ay' hat offenbar eine negative Abscisse und Ordinate, die je einander gleich sind.

*Die Gleichung, welche die constante Relation der Abscisse und Ordinate einer Linie allgemein ausdrückt, heißt die Gleichung dieser Linie, und diese Linie heißt hinwiederum der Ort der Gleichung.*

Somit ist $y=x$ die Gleichung der Geraden, welche den Coordinaten-Winkel in zwei gleiche Theile theilt; und umgekehrt ist die Linie, welche den Coordinaten-Winkel in zwei gleiche Theile theilt, der Ort der Gleichung $y = x$.

**182.** Eine gegebene Linie kann nur insofern eine Gleichung haben, als man die Definition, oder die Erzeugung, oder auch eine Eigenschaft

derselben kennt; somit läßt sich der Federzug eines Schreibenden durch keine Gleichung darstellen, weil man das Gesetz seiner Erzeugung gar nicht kennt; von der Kreislinie erhält man aber leicht eine Gleichung, indem man von ihrer Definition ausgeht, daß nämlich alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind. Was den Ort einer Gleichung betrifft, so läßt sich dieser leicht bestimmen, oder wenigstens ist hier keine weitere Schwierigkeit, als die Auflösung der Gleichung selbst.

### Beispiele von geometrischen Oertern.

**183.** Es sollen zuerst einige Beispiele gegeben werden, in welchen geometrische Oerter nach gegebenen Gleichungen zu construiren sind.

**Erstes Beispiel** (Fig. 55). Es sei gegeben die Gleichung

$$ay = x^2,$$

in welcher a eine gegebene Länge, x und y die Coordinaten der zu construirenden Linie vorstellen. Da die Gleichung gleichartig ist (Nro. 164), so ist die Maßeinheit gleichgültig, und man kann $a = 1$ setzen, so daß man hat

$$y = x^2.$$

Um die Curve zu finden, setze man für x verschiedene positive und negative Werthe, und ziehe aus der Gleichung die entsprechenden Werthe für y, welche alle reell sind, so wird jede Auflösung der Gleichung einen Punkt der gesuchten Linie bestimmen. Aus $x=2$ ergibt sich somit $y=4$; nimmt man nun auf Ax die $AP = 2$, und zieht auf der positiven Seite der y die PM parallel mit Ay, bis $PM = 4$ ist, so gehört der Punkt M zum geometrischen Ort der Gleichung. Auf diese Weise erhält man beliebig viele Punkte, und zwar in um so kleinern Abständen, je näher die Werthe von x selbst einander sind.

Setzt man $x = 0$, so ist auch $y = 0$; also geht die durch die Gleichung dargestellte Linie durch den Ursprung.

Setzt man

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ u. s. w.}$$

so ergibt sich

$$y = 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36 \text{ u. s. w.},$$

welche Werthe sämmtlich Punkte im Winkel yAx bestimmen.

Macht man

$$x = -1, -2, -3, -4 \text{ u. s. w.},$$

so ist wieder

$$y = 1, 4, 9, 16 \text{ u. s. w.},$$

und diese Coordinaten bestimmen Punkte im Winkel yAx'.

Man sieht, daß die Ordinate von $x = 1$ an viel schneller wächst, als die Abscisse, was die Gleichung unmittelbar zeigt. Denn sie gibt

$$\frac{y}{x} = x,$$

woraus erhellt, daß dieses Verhältniß von $x = 1$ an die Einheit übertrifft und mit x zugleich wächst; also ist die Abscisse in der Ordinate so viel mal mehr enthalten, als die Abscisse selbst größer ist.

Um sich in der Form der Curve in der Nähe des Anfangspunktes nicht zu irren, muß man in dieser Gegend ziemlich nahe liegende Punkte haben, deßhalb berechnet man auch die den gebrochenen Abscissen 0,1, 0,2, 0,3, ... entsprechenden Ordinaten. So erhält man folgende Reihen

$$x = 0{,}10,\ 0{,}20,\ 0{,}30,\ 0{,}40,\ 0{,}50 \text{ u. s. w.},$$
$$y = 0{,}01,\ 0{,}04,\ 0{,}09,\ 0{,}16,\ 0{,}25 \text{ u. s. w.},$$

woraus man ersieht, daß die Ordinate schneller abnimmt als die Abscisse, wenn die Curve ihrem Ursprung sehr nahe kommt, und wirklich ist dann auch das Verhältniß $\frac{y}{x} = x$ sehr klein.

Hat man eine gewisse Anzahl Punkte gefunden, so verbindet man sie durch eine fortlaufende Linie, und man erhält den Ort der gegebenen Gleichung um so genauer, je größer die Anzahl dieser Punkte ist. Auf diese Weise ist die in der Figur dargestellte Curve gebildet worden.

Zwar ist es unmöglich, wie man wohl einsieht, alle Punkte, deren Coordinaten der Gleichung $y = x^2$ genügen, in Wirklichkeit zu erhalten; denn es ist unmöglich, für x wirklich stetige Werthe zu setzen: es ist aber leicht begreiflich, daß, wenn man x in stetiger Weise wachsen läßt, auch y in stetiger Weise wachsen muß, woraus folgt, daß die Stetigkeit in der Aufeinanderfolge aller Punkte liegt, welche die Gleichung bestimmt. Wäre in dieser Beziehung noch irgend ein Zweifel übrig, so ließe er sich durch die Bemerkung beseitigen, daß eine Unterbrechung in der stetigen Aufeinanderfolge nur statt haben könnte, wenn es Abscissen ohne entsprechende Ordinaten geben würde, was aber nicht vorkommt, da jeder reelle Werth von x auch einen reellen Werth von y hat.

**Zweites Beispiel** (Fig. 56). Es sei die Gleichung gegeben

$$y^2 = \frac{x^3}{a}.$$

Man erhält daraus

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a}}.$$

Das doppelte Vorzeichen zeigt an, daß man für jede Abscisse AP über und unter der Axe x'x gleiche Ordinaten antragen muß. Daraus folgt, wenn die Axen rechtwinklig sind, und man den untern Theil der Curve um x'x dreht, daß dieser Theil mit dem obern zusammenfällt und also demselben gleich ist.

Macht man x negativ, so ist y imaginär; also hat die Curve keinen Punkt auf der Seite von Ax'.

Setzt man $x = 0$, so ist auch $y = 0$; also geht die Curve durch den Anfangspunkt.

Wenn x in positiver Richtung wächst, so ist y reell und wird immer größer, und die beiden Coordinaten haben selbst keine Grenze; denn wenn x unendlich ist, so ist es auch y. Daraus folgt, daß die Curve vom Ursprung aus sich in zwei Aeste theilt, die sich auf der Seite der positiven Abscissen, der eine über, der andere unter der Abscissen-Axe, von den beiden Axen unendlich weit entfernen.

Bis jetzt hat man nur einen allgemeinen Begriff von der Form der Curve. Um sie genauer zu kennen, muß man sie nach Punkten, wie im vorigen Beispiel construiren. Da die Gleichung gleichartig ist, so ist die Einheit willkührlich, und man kann $a = 1$ annehmen; dann erhält man

$$y = \pm \sqrt{x^3}.$$

Setzt man für x ganze Werthe und berechnet darnach die Werthe von y, so erhält man folgende Zahlenreihen

$x = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$ u. s. f.

$y = 0, \pm 1, \pm 2{,}82, \pm 5{,}19, \pm 8, \pm 11{,}18, \pm 14{,}69$ u. s. f.

Setzt man für x gebrochene Werthe, so ergeben sich folgende weitere Reihen

$x = 0{,}10,\ 0{,}20,\ 0{,}30,\ 0{,}40,\ 0{,}50,\ 0{,}60,\ 0{,}70,\ 0{,}80,\ 0{,}90;$

$y = \pm 0{,}03, \pm 0{,}09, \pm 0{,}16, \pm 0{,}25, \pm 0{,}35, \pm 0{,}46, \pm 0{,}58, \pm 071, \pm 0{,}85.$

Die Gleichung gibt

$$\frac{y}{x} = \sqrt{x};$$

also ist dieses Verhältniß sehr groß, wenn x sehr groß ist, und es ist sehr klein, wenn x sehr klein ist, was die in der Figur der Curve gegebene Form rechtfertigt.

**Drittes Beispiel** (Fig. 57). Es sei noch die Gleichung gegeben

$$y^3 - 3axy + a^3 = 0.$$

Bis jetzt ließ man die Abscisse in arithmetischer Progression wachsen, man kann aber auch irgend ein anderes Gesetz des Fortgangs annehmen; es kann sogar von Vortheil sein, eine dritte unbestimmte Größe einzuführen, deren Verhältniß zu x und y nicht so verwickelt ist, als das, welches zwischen diesen zwei Veränderlichen stattfindet. So läßt sich in dem gegebenen Beispiel, um die Auflösung einer Gleichung des dritten Grads zu vermeiden, $y = tx$ setzen; nach dieser Substitution kann man mit $x^2$ wegdividiren und es ergibt sich

$$t^3x - 3at + x = 0.$$

Aus dieser erhält man x in t ausgedrückt; dann läßt sich auch y in t ausdrücken, und man erhält

$$x = \frac{3at}{t^3+1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3+1}.$$

Nun legt man t alle stetig auf einander folgende Werthe bei und berechnet die entsprechenden Werthe von x und y, dann construirt man die Curve mittelst der erhaltenen Punkte.

Wird $t = 0$ gesetzt, so ist auch $x = 0$ und $y = 0$, wodurch der Ursprung A bestimmt ist. Läßt man t positiv wachsen, so sind die Werthe von x positiv und fangen auch an zu wachsen; doch können sie eine gewisse Grenze nicht überschreiten, denn wenn t sehr klein ist, so ist, wegen $t^3$ im Nenner, x sehr groß. Wenn wir auch keine Methode zur Bestimmung dieser Grenze haben, so muß sie doch stattfinden, und sie läßt sich überdieß durch Annäherung bestimmen, wenn man berechnet, was aus x bei sehr nahe liegenden Werthen wird. Ebenso wächst die Ordinate y bis zu einer gewissen Grenze, worauf sie wieder abnimmt. Bei $t = \infty$ ergibt sich endlich $x = 0$ und $y = 0$, welche Werthe wieder zum Anfangspunkt zurückführen. Auf diese Weise erhält man das Blatt ACDEA; dabei ist zu bemerken, da die gegebene Gleichung in x und y symmetrisch ist, so muß die Gerade AD, welche den Winkel yAx halbirt, auch die Curve in gleiche Theile theilen.

Nun muß man für x auch negative Werthe setzen; zu diesem Behuf verwandle man t in $-t$, dann erhält man

$$x = -\frac{3at}{1-t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1-t^3};$$

worauf man t als positiv annehmen kann. Läßt man t von 0 bis 1 wachsen, so wachsen die Veränderlichen x und y von Null bis ins Unendliche, die eine negativ, die andere positiv: so entsteht der Ast AF. Dasselbe geschieht, wenn man t vom Unendlichen bis auf 1 abnehmen läßt, blos mit dem Unterschied, daß x dann positiv ist, während y negativ wird; daraus entsteht der Ast AG, der die gesuchte Curve, die unter dem Namen Cartesisches Blatt (Folium Cartesii) bekannt ist, vollendet.

Nehmen wir jetzt einige Aufgaben vor, in welchen es sich um die Auffindung der Gleichungen für einige geometrischen Oerter handelt.

**Erste Aufgabe** (Fig. 58). Es sei ALB ein gegebener Kreis und BC eine am Endpunkt des Durchmessers AB errichtete Senkrechte; von A aus ziehe man unendlich viele Linien, wie AD, welche BC in D und die Kreislinie in L schneidet; auf jeder dieser Linien mache man AM = LD: so ist der geometrische Ort der so bestimmten Punkte M eine Curve, deren Gleichung verlangt wird. Diese Linie ist die von Diocles gefundene Cissoide.

Man nehme den Durchmesser AB als Abscissen-Axe und die Senkrechte Ay als Ordinaten-Axe; fälle auf AB die Senkrechten MP, LQ, und auf BC die Senkrechte LR. Es sei nun AP = x, MP = y und AB = a. Um eine Gleichung zwischen diesen Größen zu erhalten, beachte man zuerst, daß die Dreiecke AMP und LDR congruent sind; also ist

$$QB = LR = AP = x, \text{ und } AQ = a - x,$$

und da LQ die mittlere Proportionale zwischen AQ und QB ist, so ist

$$LQ = \sqrt{x\,(a-x)};$$

endlich geben die ähnlichen Dreiecke APM und ALQ die Proportion

$$MP : AP = LQ : AQ \text{ oder } y : x = \sqrt{x\,(a-x)} : a - x,$$

woraus man nach vorgenommener Reduction erhält

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Dieser Werth gibt nur den obern Theil der Curve; um die ganze Curve zu erhalten, muß man diesen Werth mit dem doppelten Vorzeichen $\pm$ nehmen, oder was auf dasselbe hinauskommt, die beiden Glieder der Gleichung ins Quadrat erheben. So erhält man als Gleichung der Cissoide

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}.$$

Man könnte die Form dieser Curve finden, wenn man den in den vorhergehenden Nummern eingeschlagenen Gang befolgen wollte; es ist jedoch einfacher, sie nach der Aufgabe selbst zu construiren.

**Zweite Aufgabe** (Fig. 59). Es seien XX′ und YY′ zwei sich unter rechten Winkeln schneidende Gerade, und O ein auf XX′ gegebener Punkt; bewegt man einen rechten Winkel KEH so, daß sein beliebig langer Schenkel EK immer durch den Punkt O geht, und der andere

Schenkel EH, der gleich OA sein soll, mit seinem Endpunkt H immer auf die Linie YY' trifft, so beschreibt der in der Mitte von EH liegende Punkt M eine Curve, deren Gleichung verlangt wird.

Man nehme XX' und YY' als Coordinaten-Axen. Es sei M ein Punkt der Curve, der irgend einer solchen Lage des rechten Winkels KEH entspricht; man ziehe auf AX die Senkrechten MP und ER, und EQ parallel mit AX, und setze

$$AP = x, \quad MP = y, \quad EH = AO = 2a.$$

Da der Punkt M in der Mitte von EH liegt, so hat man

$$ME = a, \quad \text{und} \quad QE = PR = AP = x;$$

also gibt das Dreieck MQE

$$MQ = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken OER und MQE erhält man

$$ER : OR = QE : MQ, \quad \text{oder} \quad ER : 2a + 2x = x : \sqrt{a^2 - x^2};$$

also ist

$$ER = \frac{2x\,(a+x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Da aber MP oder $y = ER + MQ$, so ist

$$y = \frac{2x\,(a+x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wird dieser Ausdruck reducirt und dann ins Quadrat erhoben, so ergibt sich als die gesuchte Gleichung

$$y^2 = \frac{(a+x)^3}{a - x}.$$

Macht man $x = 0$, so ist $y = \pm a$; also muß, wenn man $AB' = AB = a$ macht, die Curve durch die Punkte B und B' gehen. Macht man $y = 0$, so ist $x = -a$; nimmt man also auf der negativen Abscisse $AC = a$, so muß auch der Punkt C zur Curve gehören. Durch die Fortsetzung dieser Discussion erhält man die ganze Curve.

Sie scheint der Cissoide in der ersten Aufgabe ähnlich, und es läßt sich auch darthun, daß die Gleichungen der beiden Curven sich nur dadurch unterscheiden, daß in einer derselben die Abscissen vom Punkte A, in der andern vom Punkte C ausgehen. Denn wenn man CP anstatt AP zur Abscisse nimmt, und CP mit x' bezeichnet, so hat man offenbar $x = x' - a$, und setzt man diesen Werth in die Gleichung der Curve, so ergibt sich

$$y^2 = \frac{x'^3}{2a - x'},$$

welches die Gleichung einer auf die Axen CX, Cy bezogenen Cissoide ist, die mit einem Kreise, dessen Durchmesser gleich 2a ist, construirt wird.

**Dritte Aufgabe** (Fig. 60). Auf einer gegebenen Grundlinie AB ein Dreieck AMB zu beschreiben, so daß, wenn auf AM und BM die Senkrechten BC und AD, die sich in N schneiden, gefällt werden, die Summe der Dreiecke AMB und ANB einem gegebenen Quadrat $k^2$ gleich sei.

Hier handelt es sich darum, den Punkt M zu finden. Man fälle nun die Senkrechte MP, die nach einem bekannten Satze durch den Punkt N gehen muß. Man setze AP = x, MP = y, NP = y', AB = a. Der Flächeninhalt der Dreiecke AMB und ANB ist $\frac{1}{2}ay$ und $\frac{1}{2}ay'$; also ist ihre Summe $\frac{1}{2}a(y + y')$, und diese Summe muß gleich $k^2$ sein; man hat daher die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}a(y + y') = k^2.$$

Nun muß y' durch die Coordinaten x und y des Punktes M ausgedrückt werden. Da die Dreiecke AMP und BNP dem Dreieck ACB, also auch unter sich ähnlich sind, so ist NP : BP = AP : MP, oder

$$y' : a - x = x : y, \quad \text{woraus } y' = \frac{x(a-x)}{y}.$$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}a\left[y + \frac{x(a-x)}{y}\right] = k^2,$$

oder, indem man $\frac{k^2}{a} = b$ setzt und reducirt,

$$y^2 - 2by - x^2 + ax = 0.$$

Dieß ist die Gleichung für den geometrischen Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche der Aufgabe Genüge leisten. Wir überlassen es dem Leser, die Form der Curve näher zu untersuchen.

**185.** Es wäre überflüssig, hier die Zahl der Beispiele zu vermehren; später werden wir weitere Aufgaben geben, auf welche die eben entwickelten Theorien und Rechnungsmethoden ebenfalls Anwendung finden.

# Drittes Kapitel.

## Transformation der Coordinaten.

---

### Zweck dieser Transformation.

**186.** Die Gleichung einer Curve bleibt nicht dieselbe, wenn man die zugehörigen Axen verändert. Wir hatten davon schon in der zweiten Aufgabe des Nro. 184 ein Beispiel, wo der Unterschied zwischen der daselbst abgeleiteten Gleichung und der für die Cissoide blos von der Lage des Anfangspunktes der Abscissen herkam. Der Kreis bietet hinzu noch ein auffallendes Beispiel. Nimmt man zwei rechtwinklige Durchmesser (Fig. 61) als Axen, und bezeichnet den Halbmesser mit R, so erhält man für jeden Punkt der Kreislinie die Gleichung

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

denn diese Gleichung besagt, wie die Figur zeigt, daß der Abstand des Ursprungs von jedem Punkt der Curve gleich R ist.

Nehmen wir nun an, die rechtwinkligen Axen, auf welche die Curve bezogen wird, gehen nicht durch den Mittelpunkt, und bezeichnen die Coordinaten dieses Mittelpunktes mit $\alpha$ und $\beta$. Es sei O (Fig. 62) der Mittelpunkt und M ein beliebiger Punkt der Kreislinie; man ziehe die Senkrechten OB und MP auf die Axe Ax, und OQ auf MP, so ist in dem Dreieck OMQ, $OQ^2 + MQ^2 = OM^2$. Aber

$$OQ = AP - AB = x - \alpha, \quad MQ = MP - OB = y - \beta, \quad \text{und } OM = R;$$

also erhält man für die Gleichung des Kreises

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

oder, indem man die Quadrate entwickelt,

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Diese Gleichung ist, wie man sieht, bei Weitem nicht so einfach, als die erste; sie würde es noch weniger sein, wenn die Axen nicht rechtwinklig wären.

**187.** Da die Gleichung einer Linie nach den Axen, auf welche sie bezogen wird, mehr oder minder einfach werden kann, so folgt daraus, daß man bei Aufsuchung der Gleichung für eine Curve, von welcher die Erzeugung oder irgend eine Eigenschaft gegeben ist, vornämlich auf die Wahl eines Axensystems Rücksicht nehmen muß, das auf keine verwickelten Rechnungen führt, und aus dem sich die zur Darstellung der Form und der Eigenschaften der Curve geeignetste Gleichung ableiten läßt.

Auf der andern Seite kann es vorkommen, daß man die Gleichung einer auf ein gewisses Axensystem bezogenen Linie schon kennt, und es ist nicht minder wichtig, die Gleichung finden zu können, welche dieselbe Linie auf andere Axen bezogen, darstellt. Diese Aufgabe ist gelöst, wenn die Werthe der frühern Coordinaten für irgend einen Punkt als Functionen der neuen ausgedrückt sind; denn wenn man diese Werthe in der gegebenen Gleichung substituirt, so erhält man eine Gleichung zwischen den neuen Coordinaten für jeden Punkt der betreffenden Curve, und darin besteht die Transformation der Coordinaten.

## Formeln für die Transformation der Coordinaten.

**188.** Nach dem Vorhergehenden ist die aufzulösende Aufgabe folgende: Die ursprünglichen Coordinaten eines beliebigen Punktes als Functionen der neuen auszudrücken.

Nehmen wir zuerst an, die Richtung der Axen bleibe dieselbe, und es ändere sich nur der Ursprung. Es sei (Fig. 63) A′ der neue Ursprung, und A′x′, A′y′ die neuen Axen, auf welche nun die Punkte, welche vorher auf die ihnen parallelen Axen Ax, Ay bezogen wurden, zu beziehen sind. Nimmt man einen beliebigen Punkt M in dem Winkel y′A′x′, und zieht die Ordinate MP, welche die A′x′ in P′ schneidet, so hat man offenbar

$$AP = AB + BP, \quad MP = A'B + MP'.$$

AB und A′B sind die Coordinaten des neuen Ursprungs, und sie bestimmen die Lage desselben in Bezug auf die alten Axen. Setzt man nun $AB = a$, $A'B = b$, und bezeichnet die frühere Coordinaten des Punktes M mit x, y, und die neuen mit x′, y′, so erhält man

$$[1] \qquad x = a + x', \quad y = b + y'.$$

Diese Formeln dienen dazu, um zwei beliebige Axen in andere umzuformen, die mit ihnen parallel sind.

**189.** Gehen wir nun zu dem allgemeinen Fall über, bei welchem sowohl der Ursprung als auch die Richtung der Axen verändert wird.

Es seien (Fig. 64) Ax und Ay die ursprünglichen Axen, die mit einander den Winkel $yAx = \theta$ bilden, und A'x', A'y' seien die neuen Axen. Man ziehe A'E mit Ax, und A'F mit Ay parallel. Um die letztern Axen zu bestimmen, braucht man nur die Coordinaten AB, A'B des Ursprungs A', und die Winkel x'A'E, y'A'E, welche diese Axen mit der Geraden A'E bilden, zu kennen. Man bezeichne diese beiden Coordinaten mit a und b, und diese beiden Winkel mit $\alpha$ und $\alpha'$.

Nun sei M ein beliebiger Punkt: man ziehe MP mit Ay und MQ mit A'y' parallel. Die alten Coordinaten des Punktes M sind

$$AP = x, \quad PM = y;$$

die neuen sind

$$A'Q = x', \quad MQ = y'.$$

Durch den Punkt Q ziehe man QR parallel Ay und QT parallel Ax, so erhält man

$$x = AP = a + A'S + QT,$$
$$y = PM = b + QS + MT.$$

Das Dreieck A'QS gibt nach einem bekannten Satze (Nro. 65)

$$\frac{A'S}{\sin A'QS} = \frac{QS}{\sin QA'S} = \frac{A'Q}{\sin A'SQ}.$$

Es ist aber

$$A'Q = x',$$
$$\sin A'QS = \sin FA'x' = \sin(\theta - \alpha),$$
$$\sin QA'S = \sin \alpha$$
$$\sin A'SQ = \sin(180^0 - \theta) = \sin \theta;$$

also ist

$$\frac{A'S}{\sin(\theta-\alpha)} = \frac{QS}{\sin \alpha} = \frac{x'}{\sin \theta};$$

woraus

$$A'S = \frac{x' \sin(\theta-\alpha)}{\sin \theta}, \quad QS = \frac{x' \sin \alpha}{\sin \theta}.$$

Ebenso gibt das Dreieck MQT

$$\frac{QT}{\sin QMT} = \frac{MT}{\sin MQT} = \frac{MQ}{\sin MTQ}.$$

Nun ist aber

$$MQ = y',$$
$$\sin QMT = \sin y'A'F = \sin(\theta - \alpha'),$$
$$\sin MQT = \sin y'A'E = \sin \alpha',$$
$$\sin MTQ = \sin(180^0 - \theta) = \sin \theta,$$

also

$$\frac{QT}{\sin(\theta - \alpha')} = \frac{MT}{\sin \alpha'} = \frac{y'}{\sin \theta'}$$

woraus

$$QT = \frac{y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin \theta}, \quad MT = \frac{y' \sin \alpha'}{\sin \theta}.$$

Man darf jetzt nur noch für A'S, QT, QS, MT ihre Werthe setzen, um die gesuchten Formeln zu erhalten, nämlich:

$$[2] \quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin \theta}, \\ y = b + \dfrac{x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'}{\sin \theta}. \end{cases}$$

Sie werden jedoch selten in ihrer vollen Allgemeinheit gebraucht; wir wollen daher die gebräuchlichsten derselben als besondere Fälle davon ableiten.

**190.** Um von einem rechtwinkligen Coordinaten-System zu einem schiefwinkligen zu gelangen, setze man in diesen Formeln $\theta = 90^0$, so reduciren sie sich auf folgende:

$$[3] \quad \begin{cases} x = a + x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'. \end{cases}$$

**191.** Um von einem rechtwinkligen Coordinaten-System zu neuen rechtwinkligen Coordinaten überzugehen, setze man noch ferner in den letzten Formeln $\alpha' = 90^0 + \alpha$, und beachte, daß

$$\sin \alpha' = \sin(90^0 + \alpha) = \sin(90^0 - \alpha) \quad = \cos \alpha,$$
$$\cos \alpha' = \cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha) = -\sin \alpha,$$

so ergibt sich

$$[4] \quad \begin{cases} x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

**192.** Will man endlich von einem System schiefwinkliger Coordinaten auf rechtwinklige übergehen, so mache man in den allgemeinen Formeln $\alpha' = 90^0 + \alpha$; dann erhält man

$\sin \alpha' = \sin (90^0 + \alpha) = \sin (90^0 - \alpha) = \cos \alpha,$

$\sin(\theta - \alpha') = \sin(\theta - 90^0 - \alpha) = -\sin[90^0 - (\theta - \alpha)] = -\cos(\theta - \alpha);$

und es ergeben sich hieraus folgende Formeln:

$$[5] \quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin \theta}, \\ y = b + \dfrac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \theta}. \end{cases}$$

**193.** Außer den Coordinaten, die mit Axen, welche sich schneiden, parallel laufen, gebrauchen die Mathematiker auch noch andere, Polar-Coordinaten genannt, die wir später kennen lernen werden.

## Bemerkungen über die Transformationsformeln.

**194.** Um diese Formeln in ihrer größt möglichen Allgemeinheit zu geben, müssen die verschiedenen Coordinaten die ihrer Lage zukommenden Vorzeichen, und die Winkel die nöthige Ausdehnung erhalten, damit die neuen Axen in Beziehung auf die ursprünglichen alle möglichen Richtungen annehmen können.

Handelt es sich um die Formeln [1], die aus der Figur 63 abgeleitet wurden, so muß man dabei x und x′ in der Richtung Ax und A′x′ positiv, und in der entgegengesetzten Richtung negativ annehmen; ebenso y und y′ in der Richtung Ay und A′y′ positiv, und abwärts negativ. Für einen Punkt z. B. von der Lage des Punktes N muß

$$x = AQ, \quad x' = -A'Q', \quad y = -QN, \quad y' = -Q'N$$

genommen werden. Diese Werthe leisten wirklich den Formeln [1] Genüge, denn wenn man sie substituirt, so ergibt sich

$$AQ = a - A'Q' = AB - BQ = AQ,$$
$$-QN = b - Q'N = A'B - Q'N = Q'Q - Q'N = -QN.$$

Ließe man den Punkt N alle möglichen Lagen einnehmen, so würden sich immer ähnliche Bestätigungen der Formeln ergeben, wenn man nur darauf Rücksicht nimmt, daß die Vorzeichen auf die vorgeschriebene Weise gesetzt werden.

Auch ist zu bemerken, daß in der Figur der neue Ursprung A′ im Winkel yAx angenommen ist; will man denselben in einen andern Winkel, z. B. in x, Ay, versetzen, so darf man nur die Coordinaten a und b in den Formeln [1] mit negativen Werthen annehmen. Dieß bestätigt sich, wenn man für die neue Lage des Ursprungs A′ die Werthe für x und y direct sucht.

Bei der Anwendung der Formeln [2] oder der davon abgeleiteten hat man genau darauf Rücksicht zu nehmen:

1) Daß $\theta$ den Winkel xAy bezeichnet, den die alten Axen, auf welchen die positiven Coordinaten angetragen sind, einschließen; man kann diesen Winkel immer kleiner als $180^0$ annehmen.

2) Daß $\alpha$ und $\alpha'$ die von den Theilen A'x' und A'y' der neuen Axen auf der positiven Seite der x gebildeten Winkel sind, auf welchen Axen die positiven x' und y' sich befinden; diese Winkel können bis $360^0$ wachsen. Zur leichtern Berechnung derselben ziehe man durch den Ursprung A' in der Richtung der positiven x und y parallel mit diesen Coordinaten die Geraden A'E und A'F; nun nehme man an, A'x' und A'y' liegen zuerst auf der Linie A'E, und entfernen sich hierauf von derselben, indem sie sich der A'F nähern, um in ihre wirklichen Lagen zu kommen; dann sind es die durch einen Punkt dieser Linien beschriebenen Bögen, die man als Maß der Winkel $\alpha$ und $\alpha'$ annehmen muß.

Um das Gesagte durch ein Beispiel zu erklären, nehmen wir an, die beiden Axen-Systeme befinden sich in der Lage der Figur 65, und man habe AB=3, A'B=2, den Bogen $\lambda\mu=87^0$, $\lambda\mu\nu=240^0$, $\lambda\mu\nu\varrho=315^0$ gefunden.

Man setze a=3, b=—2, $\theta=87^0$, $\alpha=240^0$, $\alpha'=315^0$;

so werden die allgemeinen Formeln zuerst zu folgenden:

$$x = 3 + \frac{x' \sin (87^0 - 240^0) + y' \sin (87^0 - 315^0)}{\sin 87^0},$$

$$y = -2 + \frac{x' \sin 240^0 + y' \sin 315^0}{\sin 87^0}.$$

Aber nach der Trigonometrie ist

$$\sin 240^0 = -\sin (240^0 - 180^0) = -\sin 60^0,$$

$$\sin 315^0 = -\sin (360^0 - 315^0) = -\sin 45^0,$$

$$\sin (87^0 - 240^0) = \sin(-153^0) = -\sin(180^0 - 153^0) = -\sin 27^0,$$

$$\sin (87^0 - 315^0) = \sin(-228^0) = -\sin(180^0 - 228^0) = +\sin 48^0;$$

also erhält man nach diesen Reductionen

$$x = 3 + \frac{-x' \sin 27^0 + y' \sin 48^0}{\sin 87^0},$$

$$y = -2 - \frac{x' \sin 60^0 + y' \sin 45^0}{\sin 87^0}.$$

## Viertes Kapitel.

### Eintheilung der Linien überhaupt.

---

**195.** Die alten Mathematiker mußten die krummen Linien gerade in der Ordnung studiren, wie sich dieselben bei ihren Untersuchungen ergaben; sie ließen jedoch diejenigen bald bei Seite, deren Entdeckung gewissermaßen eine zufällige war, um denjenigen eine besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden, die sich aus allgemeinen Betrachtungen finden lassen. Es war wirklich ein einfacher und fruchtbarer Gedanke, die Flächen durch Ebenen zu schneiden, und dann die Eigenschaften der aus diesen Durchschnitten sich ergebenden Linien zu untersuchen; deßhalb befolgten sie zuerst auch diesen Gang, und da die in der Elementar-Geometrie bekannten krummen Flächen die Oberflächen der Kugel, des Cylinders und des Kegels sind, so erhielten sie durch den Durchschnitt dieser Körper mittelst Ebenen die Linien, welche sie zum Gegenstand ihrer Betrachtungen machten. Der Durchschnitt der Kugel ist aber ein Kreis; und der des Cylinders findet sich auch bei denen des Kegels; so daß diese neuen Linien sich blos auf die Kegelschnitte beschränken, die bekannten Curven, über welche Apollonius von Perga eine schöne und gelehrte Abhandlung hinterlassen hat.

Heutzutage muß man einen andern Weg einschlagen, und da die Linien sich durch Gleichungen darstellen lassen, so muß man sie auch aus Gleichungen entwickeln, wo dann der bei dem Studium der Linien zu befolgende Gang sich von selbst ergibt.

**196.** Alle Gleichungen zwischen den Coordinaten x und y, welche auf die Form

$$Ay^m + (Bx + C)\,y^{m-1} + (Dx^2 + Ex + F)\,y^{m-2} + \text{&c.} \ldots = 0$$

gebracht werden können, heißen algebraische; alle andern sind transcendente Gleichungen. Daraus ergibt sich die Unterscheidung der algebraischen und transcendenten Linien, je nachdem ihre Gleichungen selbst algebraisch oder transcendent sind.

Die algebraischen Linien werden nun nach dem Grade ihrer Gleichungen in Beziehung auf die Coordinaten x und y eingetheilt, und die Ordnung der Linie wird durch den Exponenten dieses Grads angezeigt.

Die gerade Linie, welche den Coordinaten-Winkel in zwei gleiche Theile theilt (Nro. 181), und deren Gleichung $y = x$ ist, heißt eine Linie der ersten Ordnung, weil ihre Gleichung vom ersten Grade ist. Die Curve in Nro. 183, Beisp. I, welche $ay = x^2$ zur Gleichung hat, gehört zur zweiten Ordnung; die in Beisp. II zur dritten Ordnung.

Als Newton bemerkte, daß die erste Ordnung nur gerade Linien enthält, wie wir sogleich sehen werden, so nannte er die Linien, welche aus Gleichungen des zweiten Grades hervorgehen, Curven der ersten Art, und die mit Gleichungen des dritten Grades Curven der zweiten Art und so fort. Diese Benennungen kamen jedoch nicht in Anwendung, und man sagt des leichtern Ausdrucks halber ebenso gut Linie oder Curve der zweiten Ordnung, der dritten Ordnung u. s. w.

**197.** Die Eintheilung der Linien in verschiedene Ordnungen, nach dem Grade der Gleichungen wäre fehlerhaft, wenn der Fall vorkommen könnte, daß mit der Aenderung der Coordinaten-Axen auch der Grad der Gleichung sich ändern würde; was jedoch nicht der Fall ist. Denn wenn die Gleichung einer auf gewisse Axen bezogenen Linie zwischen x und y gegeben ist so muß man, um die Gleichung der nämlichen auf neue Axen bezogenen Linie zu erhalten, x und y in der gegebenen Gleichung durch die in Nro. 189 gefundenen Werthe ersetzen: diese Werthe sind aber vom ersten Grade zwischen $x'$ und $y'$; der Grad der Gleichung kann also durch diese Substitution nicht erhöht werden, und eben deßwegen, weil er nicht höher werden kann, kann er auch nicht niedriger werden; denn wenn dieß möglich wäre, so müßte, wenn man von den neuen Axen zu den alten zurückkehren wollte, der Grad erhöht werden.

**198.** Die allgemeine Gleichung von einem gewissen Grade begreift nicht blos die Linien in sich, deren Ordnung durch diesen Grad angezeigt ist, sondern auch alle die von einer niedrigern Ordnung. Hat man z. B. die Gleichung des zweiten Grads,

$$(y - ax - b)(y - a'x - b') = 0,$$

so wird ihr offenbar Genüge geleistet, indem man entweder $y = ax + b$, oder $y = a'x + b'$ setzt. Diese beiden Gleichungen stellen zwei Linien der ersten Ordnung vor: also stellt die gegebene Gleichung eigentlich keine Linie der zweiten, sondern zwei Linien der ersten Ordnung vor, und sie würde sogar nur eine darstellen, wenn $a' = a$ und $b' = b$ wäre.

Ebenso stellt die Gleichung des dritten Grades

$$(y - ax - b)(cy - x^2) = 0$$

eine Linie der ersten Ordnung, welche durch die Gleichung $y = ax + b$, und eine Linie der zweiten Ordnung vor, welche durch die Gleichung $cy = x^2$ gegeben ist.

**199.** Eine Gerade kann eine Linie von der mten Ordnung in nicht mehr als m Punkten schneiden. Denn angenommen, diese Gerade sei die Axe der x, und $U = 0$ sei dann die Gleichung der betreffenden Linie: so muß man, um zu wissen, in wie viel Punkten sie von der Geraden geschnitten wird, $y = 0$ in der Gleichung $U = 0$ setzen, und die entsprechenden Werthe von x sind dann die Abscissen der gesuchten Punkte. Da aber die Gleichung $U = 0$ vom mten Grade ist, so kann diejenige, welche x gibt, höchstens vom mten Grade sein, somit x nicht mehr als m Werthe haben; also können auch nicht mehr als m Durchschnittspunkte vorkommen. Die Anzahl dieser Punkte kann aber noch kleiner sein; denn es kann der Fall sein, daß die Gleichung nach x von einem geringern Grad als dem mten ist; oder wenn selbst diese Gleichung vom mten Grade ist, und sie hat gleiche oder imaginäre Wurzeln, so ist die Anzahl der Durchschnittspunkte auch wieder kleiner als m.

**200.** Die Linien der ersten Ordnung können also von einer Geraden nie in mehr als einem Punkte geschnitten werden; und da offenbar keine krumme Linie diese Eigenschaft hat, so folgt daraus sogleich, daß die Linien der ersten Ordnung gerade sind.

**201.** Es kann der Fall sein, daß y in allen Gliedern der Gleichung $U = 0$ als Factor vorkommt; dann wird derselben Genüge geleistet, wenn man $y = 0$ setzt, wie groß auch x sein mag, und alle Punkte der Abscissen-Axe werden somit als Durchschnittspunkte angedeutet. Setzt man nun den gemeinschaftlichen Factor heraus, so kann die Gleichung so geschrieben werden

$$Vy = 0;$$

und offenbar ist derselben Genüge geleistet, wenn man entweder $V = 0$, oder $y = 0$ setzt. Diese letzte Gleichung stellt die Axe der x vor; aber die andere, $V = 0$, welche nur noch vom m—1ten Grade ist, kann keine Linie vom mten Grade vorstellen.

Wenn die gegebene Gerade nicht mehr als Abscissen-Axe genommen, und irgend andere Axen gebraucht werden sollen, so muß man in der Gleichung $Vy = 0$ die in Nro. 189 gefundenen Werthe für x und y setzen. Man erhält dann eine Gleichung von der Form:

$$V'(a + bx' + cy') = 0,$$

in welcher V' für x' und y' vom m—1ten Grade ist.

Aus dem Vorigen läßt sich nun folgender Schluß ziehen: Wenn sich auf einer Geraden mehr als m Punkte befinden, deren Coordinaten einer Gleichung vom mten Grade genügen, so müssen die Coordinaten der andern Punkte derselben ebenfalls Genüge leisten, und diese Gleichung läßt sich in zwei andere, die eine vom ersten Grad, die andere vom m — 1ten Grade, zerlegen.

**202.** Man beschränkt sich indessen nicht darauf, die algebraischen Curven nach dem Grade ihrer Gleichungen in Ordnungen einzutheilen; sondern man sucht auch die verschiedenen Arten von Linien, welche dieselbe Ordnung in sich begreift, und selbst, wo dieß der Fall ist, die verschiedenenen Unterarten jeder Art. Diese Linien werden hierauf sämmtlich nach gewissen leicht erkennbaren Merkmalen, wodurch sie sich vollständig von einander unterscheiden, geordnet, und es bleibt dann noch die Aufgabe, die Form und die Eigenschaften jeder derselben zu bestimmen. Dieß werden wir bei den beiden ersten Geraden thun; bei dem ersten gibt es, wie schon bemerkt wurde, nur gerade Linien; der zweite Grad gibt drei Arten von genau unterschiedenen Curven.

Die Linien der dritten Ordnung sind zuerst von Newton, welcher deren zwei und siebenzig Arten in vierzehn Gattungen gefunden hatte, aufgezählt worden; Stirling hat jedoch diese Zahl durch vier weitere Arten, welche von ersterem Mathematiker ausgelassen wurden, ergänzt, und Cramer hat sogar noch zwei weitere Arten hinzugefügt, so daß es im Ganzen achtundsiebenzig Arten sind. Indessen hat Cramer die vierzehn Hauptgattungen beibehalten; nur führt er sie in anderer Ordnung auf. Siehe Newton, Enumeratio linearum tertii ordinis; Stirling, Lineae tertii ordinis Newtonianae; Cramer, Einleitung in die Analyse der algebraischen Curven.

# Fünftes Kapitel.

## Linien der ersten Ordnung.

---

### Construction der Gleichungen des ersten Grades.

**203.** Wir wissen bereits, daß die Gleichung des ersten Grades nur gerade Linien geben kann (Nro. 200). Dieser Satz soll hier ohne Beihülfe einer Transformation der Coordinaten bewiesen werden.

Alle Gleichungen des ersten Grades sind enthalten in der allgemeinen Form:

$$Ay + Bx = C:$$

nehmen wir zuerst die einfachere Gleichung vor

$$y = ax,$$

in welcher a als eine positive Größe angenommen ist.

Gibt man x positive Werthe, so wird y positiv, und gibt man x negative Werthe, so wird y negativ; also liegen alle durch die Gleichung $y = ax$ bestimmten Punkte im Winkel yAx (Fig. 66) und in dessen Scheitelwinkel y'Ax'.

Diese Gleichung gibt

$$\frac{y}{x} = a,$$

somit ist für alle diese Punkte das Verhältniß der Ordinate zur Abscisse gleich der constanten Größe a; sind daher M und M' zwei dieser Punkte, und man zieht die Ordinaten MP und M'P', so sind die Dreiecke MPA und M'P'A, die man erhält, wenn man die Geraden MA und M'A zieht, einander ähnlich: also sind die Winkel MAP und M'AP' einander gleich, und folglich fallen die Geraden AM und AM', sowie alle die, welche vom Punkte

A an die verschiedenen durch die Gleichung $y = ax$ bestimmten Punkte gezogen werden, in eine gerade Linie zusammen; oder mit andern Worten, alle diese Punkte liegen auf einer geraden Linie DAD', die durch den Ursprung und durch irgend einen Punkt derselben gezogen wird.

Umgekehrt können alle Punkte dieser Geraden betrachtet werden, als seien sie durch die Gleichung $y = ax$ bestimmt. Denn es sei M ein mittelst dieser Gleichung bestimmter Punkt, durch welchen die Gerade DAD' gezogen wurde, und M' ein beliebiger Punkt dieser Geraden; fällt man nun die Ordinaten MP und M'P', so sind die Dreiecke AMP und AM'P' ähnlich, und man hat

$$\frac{M'P'}{AP'} = \frac{MP}{AP}.$$

Da aber der Punkt M durch die Gleichung $y = ax$ bestimmt ist, so ist $\frac{MP}{AP} = a$, also auch $\frac{M'P'}{AP'} = a$; folglich hat man, wenn x und y die Coordinaten des Punktes M' bezeichnen, $y = ax$. Daraus folgt, daß jeder Punkt der Geraden DAD' durch die Gleichung $y = ax$ bestimmt ist.

Ist a eine negative Größe $= -a'$, so ist die zu construirende Gleichung

$$y = -a'x;$$

die positiven Werthe von x entsprechen dann negativen Werthen von y, und die negativen Werthe von x positiven Werthen von y; also liegen alle durch diese Gleichung bestimmten Punkte in den Winkeln yAx' und y'Ax. Im Uebrigen lassen sich dieselben Folgerungen ziehen, wie vorhin, und man gelangt zu denselben Resultaten, d. h. die Gleichung $y = -a'x$ stellt ebenfalls eine gerade Linie, wie dAd' (Fig. 66) vor.

Es mag also a einen beliebigen Werth haben, so stellt die Gleichung $y = ax$ immer eine gerade Linie vor, die durch den Ursprung geht.

Um einen zweiten Punkt dieser Linie zu erhalten, mache man $x = 1$, so ist $y = a$. Man nimmt daher auf Ax eine Abscisse AF als Einheit, zieht KFK' parallel mit den Ordinaten, und trägt oberhalb und unterhalb des Punktes F, je nach dem Vorzeichen von a, eine Länge $FG = a$ an, so ist die durch den Ursprung und den Punkt G gezogene Gerade DD' die Linie der Gleichung $y = ax$.

**204.** Construiren wir nun die Gleichung

$$y = ax + b,$$

in welcher a und b der bestimmtern Auffassung wegen, positiv sein sollen. Setzt man in dieser Gleichung für x dieselben Werthe wie in der Gleichung $y = ax$, so ist offenbar der Unterschied der entsprechenden Werthe von y

constant und gleich b; also ist der Ort der neuen Gleichung eine Parallele mit der durch die Gleichung $y = ax$ bestimmten Geraden DD′ (Fig. 67), und dieselbe läßt sich construiren, indem man AB = b auf Ay nimmt, und BE parallel mit AD zieht.

Etwaige Zweifel in dieser Beziehung lassen sich beseitigen, indem man auf der Geraden in jedem der drei Winkel, durch welche sie geht, Punkte annimmt, und dann beweist, daß für alle diese Punkte $y = ax + b$ ist. Betrachtet man z. B. einen Punkt M derselben im Winkel yAx′, zieht MP parallel mit Ay, und verlängert sie bis zum Punkte N, wo sie DD′ trifft, so ist

$$MP = MN - PN = b - PN.$$

Die Abscisse der Punkte M und N ist aber gleich — AP; also ist die Ordinate, welche dem auf der Linie DD′ liegenden Punkte entspricht, gleich $-a \times AP$. Dieser Werth ist negativ, weil der Punkt N unterhalb x′x liegt; nimmt man nur den absoluten Werth, so erhält man $PN = a \times AP$, und somit

$$MP = b - a \times AP,$$

welcher Werth dem aus der Gleichung $y = ax + b$ abgeleiteten gleich ist, indem man darin — AP für x setzt.

Die Gleichung $y = ax + b$ wurde hier unter der Voraussetzung construirt, daß a und b positive Größen seien; diese Gleichung enthält aber in Beziehung auf die Vorzeichen dieser Constanten noch drei andere Fälle, nämlich:

$$y = ax - b, \quad y = -ax + b, \quad y = -ax - b.$$

Bei jeder dieser Gleichungen lassen sich ähnliche Folgerungen ziehen, wie die, welche für die Gleichung $y = ax + b$ gemacht wurden, und man findet immer eine gerade Linie, deren Lage aber nicht die nämliche ist. Die Constructionen, auf welche man in jedem der drei Fälle kommt, sind folgende:

Ist die Gleichung $y = ax - b$ gegeben, so construirt man, wie in dem ersten Fall, die durch die Gleichung $y = ax$ ausgedrückte Gerade AD (Fig. 68), trägt dann wieder auf der Axe der Ay, aber auf der entgegengesetzten Seite Ay′, den Abstand AB = b an, und zieht wieder BE parallel mit AD.

Hat man die Gleichung $y = -ax + b$, so construirt man die durch die Gleichung $y = -ax$ gegebene Gerade dA (Fig. 69), nimmt auf Ay die AB = b, und zieht wieder BE parallel Ad.

Handelt es sich endlich um die Gleichung $y = -ax - b$, so besteht der Unterschied mit dem vorigen Fall blos darin, daß man AB = b (Fig. 70) unterhalb des Ursprungs auf Ay′ anträgt.

**205.** Ist A nicht Null, so läßt sich die Gleichung $Ay + Bx = C$ auf die Form $y = ax + b$ bringen, und diese letzte Gleichung stellt immer,

wie eben bewiesen wurde, eine gerade Linie vor. Ist aber $A = 0$, so reducirt sich die Gleichung auf

$$Bx = C, \quad \text{oder } x = \frac{C}{B};$$

der geometrische Ort dieser Gleichung ist somit eine Linie CF (Fig. 71), die mit der Axe der y parallel lauft, und die Axe der x in einer Entfernung $\frac{C}{B} = AC$ vom Ursprung auf Ax oder Ax' trifft, je nachdem die Größe positiv oder negativ ist.

**206.** Wir können nun den Schluß ziehen, daß die Gleichung des ersten Grades in allen Fällen eine gerade Linie zum geometrischen Ort hat.

**207.** Nach dem Vorigen müßte man, um eine Gleichung des ersten Grades zu construiren, sie zuerst unter die Form $y = ax + b$ bringen, dann die in der Gleichung $y = ax$ gegebene Gerade construiren, hierauf auf der Axe der y über oder unter dem Anfangspunkte eine Linie gleich b antragen, und endlich mit dieser Geraden eine Parallele ziehen. Es ist jedoch einfacher, die beiden Punkte zu finden, wo die gesuchte Gerade die Axen schneidet, was dadurch geschieht, daß man in der Gleichung dieser Geraden nach einander $x = 0$ und $y = 0$ setzt.

Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$3y - 2x + 5 = 0.$$

Um den Punkt zu finden, wo die dadurch bestimmte Gerade die Ordinaten-Axe schneidet, beachte man, daß die Abscisse für diesen Punkt Null ist; deßhalb setze man in der Gleichung $x = 0$, so ist die entsprechende Ordinate $y = -\frac{5}{3}$. Nimmt man also (Fig. 72) auf der Seite der negativen y den Abstand AB gleich $\frac{5}{3}$ der Längeneinheit, so gehört der Punkt B zur gesuchten Linie. Da ebenso der auf der Abscissenlinie liegende Punkt dieser Geraden eine Ordinate gleich Null hat, so setze man $y = 0$, und erhält dann die entsprechende Abscisse $x = \frac{5}{2}$; nimmt man also in der Richtung der positiven x die $AC = \frac{5}{2}$, so gehört der Punkt C wieder zu der gesuchten Linie, wodurch die Gerade bestimmt ist.

**208.** Bis jetzt wurde blos bewiesen, daß die Gleichung des ersten Grads immer eine gerade Linie vorstellt. Es soll nun auch gezeigt werden, daß es keine gerade Linie gibt, welche nicht durch eine Gleichung des ersten Grades ausgedrückt werden kann.

1) In Nro. 203 haben wir gesehen, daß man, um die Gerade aus der Gleichung $y = ax$ zu construiren, $x = 1$ setzt, woraus sich $y = a$ ergibt; dann nimmt man auf Ax (Fig. 66) in der Richtung der positiven

Abscissen zur Darstellung der Einheit, die hier ganz willkührlich ist, eine Linie AF, zieht KFK′ parallel mit der Axe der y, nimmt sodann auf dieser Parallele in der durch das Vorzeichen der Größe a angezeigten Richtung FG = a, und zieht endlich durch den Punkt G und den Anfangspunkt A die Gerade DD′, so ist diese Gerade die verlangte Linie. Nach dieser Construction müssen offenbar, wenn man a verschiedene Werthe beilegt, der Punkt G und somit auch die Gerade DD′ ihre Lage ändern; da ferner der Größe a jede Größe beigelegt werden kann, so muß auch der Punkt G alle möglichen Lagen auf KK′ haben können, und folglich kann auch die Gerade DD′ alle möglichen Lagen um den Anfangspunkt A herum einnehmen. Also sind alle durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linien durch eine Gleichung von der Form y = ax gegeben.

2) Ferner wurde (Nro. 204) gezeigt, daß man, nachdem die durch die Gleichung y = ax gegebene Gerade DD′ (Fig. 67) construirt ist, um die der Gleichung y = ax + b zu erhalten, auf der Axe Ay über oder unter dem Anfangspunkte, je nach dem Vorzeichen von b, eine Ordinate AB = b antragen, dann BE parallel mit DD′ ziehen muß. Nach dieser Construction muß offenbar der Punkt B, wenn man für b alle positiven und negativen Größen setzt, alle möglichen Lagen auf der Axe yy′ einnehmen können; überdieß kann, wenn der Coefficient a verändert wird, die Gerade DD′, mit welcher BE parallel ist, alle möglichen Neigungen zu Ax haben: also können alle Geraden, welche die Ordinaten-Axe schneiden, durch eine Gleichung von der Form

$$y = ax + b$$

ausgedrückt werden.

3) Endlich läßt sich jede mit der Axe Ay parallele Gerade CF (Fig. 71) durch eine Gleichung wie x = c darstellen, da die Abscisse für alle Punkte dieser Geraden constant ist: Die Gleichung x = c ist aber ein besonderer Fall der Gleichung y = ax + b; folglich kann jede gerade Linie, welches auch ihre Lage sein mag, durch eine Gleichung des ersten Grades ausgedrückt werden.

## Aufgaben über die gerade Linie.

**209. Erste Aufgabe** (Fig. 73). Der Winkel ECx, den eine Gerade CE mit der Abscissen-Axe bildet, und die Ordinate AB am Ursprunge seien gegeben, man soll die Gleichung jener Geraden finden.

Da die Gerade die Axe Ay schneiden muß, so wird sie durch eine Gleichung von der Form

$$y = ax + b$$

ausgedrückt.

In dieser Gleichung ist b die Ordinate des Punktes B, wo die Gerade die Axe Ay schneidet: diese Ordinate ist nach der Lage dieses Punktes positiv oder negativ und sie heißt Ordinate am Ursprung; also ist diese Größe unmittelbar durch die Aufgabe selbst gegeben.

Was den Coefficienten a betrifft, so hängt er von dem Winkel ab, den die Gerade mit der Axe der x macht. Man ziehe durch den Ursprung AD parallel CE, so ist die Gleichung dieser Parallele $y = ax$ (Nro. 204), und wenn MP die Ordinate eines beliebigen Punktes dieser Linie ist, so ist

$$\frac{MP}{AP} = a.$$

Das Dreieck AMP gibt aber (Nro. 65)

$$a = \frac{MP}{AP} = \frac{\sin DAx}{\sin AMP},$$

und indem man den Winkel ECx mit $\alpha$, und den Coordinaten-Winkel yAx mit $\theta$ bezeichnet, so ist

$$DAx = \alpha, \quad AMP = DAy = \theta - \alpha;$$

für a erhält man also den Werth

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)},$$

und folglich ist die Gleichung der Geraden CE

$$[1] \qquad y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} x + b.$$

**210.** Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, daß der gegebene Winkel ECx kleiner sei als yAx; die erhaltene Gleichung paßt aber eben so wohl für den Fall, wo ECx größer ist als yAx. Denn in diesem Fall hat die Parallele AD die in Figur 74 dargestellte Richtung, und das Dreieck MAP gibt

$$\frac{MP}{AP} = \frac{\sin MAP}{\sin AMP} = \frac{\sin DAx}{\sin DAy} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)}.$$

Aber in der Gleichung $y = ax$ drückt a immer das Verhältniß der Ordinate zur Abscisse aus, und die Abscisse des Punktes M ist hier $-AP$; also $a = \frac{MP}{-AP}$; folglich, indem man darauf Rücksicht nimmt, daß

$$\sin (\alpha - \theta) = -\sin (\theta - \alpha) \text{ ist, ergibt sich}$$

$$a = -\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)}.$$

Somit ist die Gleichung [1] immer die der Geraden CE.

**211.** Um bei der Anwendung dieser Gleichung auf besondere Fälle keinen Fehler zu machen, beachte man, 1) daß b eine positive oder negative Größe ist, je nachdem die Gerade die Ordinaten-Axe oberhalb oder unterhalb des Ursprungs schneidet; 2) daß $\theta$ der Winkel yAx der positiven Ordinaten und nicht sein Nebenwinkel yAx′ ist; 3) daß $\alpha$ der Winkel ECx ist, der auf der positiven Seite der Abscissen durch das obere Stück der Geraden, d. h. durch das auf der Seite der positiven Ordinaten liegende Stück gebildet ist.

**212.** Ist der Coordinaten-Winkel ein rechter, so ist $\theta = 90^0$, $\sin(\theta - \alpha) = \cos\alpha$; also $a = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$; somit stellt a die Tangente des Winkels vor, den die gegebene Gerade mit der Axe der x macht.

**213. Zweite Aufgabe.** *Es sei gegeben die Gleichung einer Geraden*

$$y = ax + b,$$

*man soll den Winkel finden, den diese Gerade mit der Axe der x macht.*

Es sei AD (Fig. 73) die Gerade der Gleichung $y = ax$, mit welcher die Gerade der gegebenen Gleichung parallel ist (Nro. 204); zieht man die Ordinate MP, und bezeichnet den gesuchten Winkel ECx mit $\alpha$, und den Winkel yAx mit $\theta$, so findet sich wie oben mittelst des Dreiecks AMP

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = a.$$

Um aus dieser Gleichung $\alpha$ abzuleiten, schafft man den Nenner weg, und setzt für $\sin(\theta - \alpha)$ seinen Werth $\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$, so erhält man

$$\sin\alpha = a\sin\theta\cos\alpha - a\sin\alpha\cos\theta,$$

oder

$$(1 + a\cos\theta)\sin\alpha = a\sin\theta\cos\alpha;$$

woraus sich, da

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ergibt

[2] $$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta}.$$

Da somit die tang $\alpha$ bekannt ist, so ist der Winkel $\alpha$ selbst als bekannt anzusehen.

**214. Dritte Aufgabe.** Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Die Coordinaten dieser Punkte seien $x'$, $y'$ und $x''$, $y''$. Da die gesuchte Linie gerade sein muß, so ist ihre Gleichung, unter der Voraussetzung, daß die Linie mit der Axe der y nicht parallel ist, von der Form

$$y = ax + b,$$

wo a und b noch unbekannt sind.

Damit sie durch den Punkt gehe, dessen Coordinaten $x'$ und $y'$ sind, muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man $x'$ für x, und $y'$ für y setzt, so daß man

$$y' = ax' + b$$

erhält. Mittelst dieser Gleichung läßt sich bereits eine der beiden Unbekannten eliminiren; denn wenn man sie von der Gleichung $y = ax + b$ abzieht, so fällt b weg, und man erhält

$$y - y' = a\,(x - x'). \qquad 3)$$

Dieß ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt, dessen Coordinaten $x'$ und $y'$ sind, gehen muß; aber a ist noch unbestimmt, weil man durch einen Punkt unendlich viele Gerade ziehen kann.

Damit die Gerade auch durch den zweiten Punkt gehe, muß der Gleichung genügt werden, indem man x durch $x''$ und y durch $y''$ ersetzt; dieß gibt

$$y'' - y' = a\,(x'' - x'),$$

woraus man erhält

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Setzt man diesen Werth für a, so ist

$$[3] \qquad y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x')$$

die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden gegebenen Punkte geht. Uebrigens kann man sich leicht überzeugen, daß die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, denn

$x = x'$ gibt $y = y'$, und $x = x''$ gibt $y = y''$.

**215.** Diese Gleichung enthält alle besondern Lagen, die eine Gerade einnehmen kann, da die Coordinaten $x'$, $y'$, $x''$, $y''$ ganz willkührlich sind. Man wird sogar sehen, daß sie die mit der Axe der y parallelen Geraden gibt, obgleich man von der Gleichung $y = ax + b$, welche für diese Geraden nicht paßt, ausgegangen ist.

Ist $y'' = y'$, so reducirt sich die Gleichung [3] auf $y = y'$, d. h. die Gerade ist dann parallel mit der Axe der x. Dieß muß wirklich der Fall

sein, da sie durch die Endpunkte der beiden gleichen Ordinaten MP und M'P' (Fig. 75) geht.

Ist $x'' = x'$, so wird der Factor von $x - x'$ auf der zweiten Seite der Gleichung unendlich groß; löst man aber die Gleichung in Beziehung auf $x - x'$ auf, so erhält man

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{y'' - y'}(y - y'),$$

und wird nun $x'' = x'$ angenommen, so ergibt sich $x = x'$; welches zeigt, daß die Gerade mit der Axe der y parallel lauft, was nothwendig der Fall sein muß, da sie durch die Endpunkte der beiden gleichen Abscissen MQ und M'Q' (Fig. 76) geht.

Nimmt man zugleich $x'' = x'$ und $y'' = y'$ an, so wird die Gleichung [3]

$$y - y' = \frac{0}{0}(x - x');$$

da nun der Coefficient von $x - x'$ unbestimmt ist, so kann die Gerade alle möglichen Lagen um den Punkt, dessen Coordinaten $x'$ und $y'$ sind, herum einnehmen. Dieß muß auch der Fall sein; denn die zwei gegebenen Punkte bilden nur noch einen einzigen, und durch einen Punkt lassen sich unendlich viele gerade Linien ziehen.

**216. Vierte Aufgabe.** Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht, und mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Die Gleichung der gegebenen Geraden sei

$$y = ax + b,$$

wo a und b bekannt sind, und die der gesuchten mit ihr parallelen Linie sei

$$y = a'x + b',$$

wo a' und b' unbekannt sind.

Damit die Geraden einander parallel seien, muß

$$a' = a$$

sein. Denn die eine ist parallel mit einer durch den Ursprung gehenden Geraden, deren Gleichung $y = ax$ (Nro. 204) ist, und die andere ist parallel mit einer Geraden von der Gleichung $y = a'x$. Da nun die beiden letztern Linien durch den Ursprung gehen, und die beiden ersten parallel sind, so müssen die beiden letzten in einander fallen; also ist $a' = a$. Daher erhält man als Gleichung für die mit der gegebenen Geraden parallelen Linie

$$y = ax + b',$$

wo b′ noch unbestimmt bleibt, weil es unendlich viele Geraden gibt, die mit einer gegebenen Linie parallel sind. Soll aber diese Parallele durch einen gegebenen Punkt gehen, dessen Coordinaten x′ und y′ sind, so muß

$$y' = ax' + b'$$

die Gleichung sein, aus welcher b′ gefunden wird. Zieht man diese von der vorigen ab, so erhält man als Gleichung der gesuchten Parallele

$$y - y' = a(x - x').$$

**217. Fünfte Aufgabe.** Den Durchschnittspunkt zweier Geraden zu finden, deren Gleichungen gegeben sind.

Die Gleichungen der beiden Geraden seien

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'.$$

In dem Punkte, wo sie sich schneiden, haben sie gleiche Coordinaten, und umgekehrt sind die Coordinaten dieser Linien nur in dem Punkte, wo sie sich treffen, einander gleich; also hat man für diesen einzigen Punkt

$$ax + b = a'x + b',$$

woraus sich ergibt

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}.$$

Setzt man diesen Werth in der Gleichung einer dieser Geraden anstatt x, so erhält man

$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

**218.** Ist $a' = a$, so werden diese Werthe unendlich groß; also findet dann kein Durchschnitt mehr statt, und wir wissen bereits (Nro. 216), daß wirklich die Geraden parallel sind, wenn $a' = a$.

Ist sowohl $a' = a$, als auch $b' = b$, so werden die Werthe von x und y zu $\frac{0}{0}$, d. h. sie sind unbestimmt; also läßt sich schließen, daß alle Punkte der einen Geraden der andern gemeinschaftlich sind. Dieß ist wirklich der Fall, denn da die Gleichungen der Geraden dann identisch werden, so bilden die beiden Geraden nur eine einzige.

**219. Sechste Aufgabe.** Die Entfernung zweier Punkte zu finden, deren Coordinaten gegeben sind.

Nehmen wir zuerst an, die Axen seien rechtwinklig (Fig. 77), und die betreffenden Punkte M und N. Zieht man die Ordinaten MP, NQ

und mit der Axe der x die Parallele NR, so gibt das in R rechtwinklige Dreieck MNR

$$MN = \sqrt{NR^2 + MR^2}.$$

Es seien nun x, y die Coordinaten des Punktes M, und x′, y′ die des Punktes N, so ist NR gleich $x - x'$, und MR gleich $y - y'$. Drückt man daher die gesuchte Entfernung mit $\delta$ aus, so erhält man

$$\delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Bringt man die Punkte M und N nach einander in alle verschiedenen Lagen, wo die Construction des Dreiecks MNR irgend eine Aenderung erfahren könnte, und beachtet dabei die in Betreff der Vorzeichen der Coordinaten festgestellte Uebereinkunft, so wird man finden, daß diese Formel keine Ausnahme erleidet.

Ist z. B. der Punkt N im Anfangspunkte (Fig. 78), so hat man $x' = 0$, $y' = 0$, und daher

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dieß ist der Ausdruck für die Entfernung irgend eines Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, wovon man sich leicht überzeugen kann; denn das rechtwinklige Dreieck AMP gibt

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nehmen wir als zweites Beispiel den Fall, wo die Punkte M und N die in Figur 79 dargestellte Lage haben. Dann sind die Abscissen dieser Punkte $= AP$ und $= AQ$, also $x = AP$, und $x' = AQ$. Die Ordinate des Punktes M ist wieder MP, aber die des Punktes N ist $= QN$, also $y = MP$ und $y' = QN$. Setzen wir für x, y, x′, y′ diese Werthe in die allgemeine Formel, so erhält man

$$\begin{aligned}\delta &= \sqrt{(AP + AQ)^2 + (PM + QN)^2} \\ &= \sqrt{(AP - AQ)^2 + (PM + PR)^2} \\ &= \sqrt{NR^2 + MR^2};\end{aligned}$$

welches Resultat dem gleich ist, das man unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreieck MNR erhält.

**220.** Nehmen wir nun schiefe Axen an (Fig. 80), und ziehen noch parallel mit der Axe der x die Linie NR, bis sie die Ordinaten MP und NQ trifft. Das Dreieck MNR ist dann nicht mehr rechtwinklig, aber eine bekannte Formel (Nro. 66) gibt

$$MN = \sqrt{NR^2 + MR^2 - 2NR \times MR \times \cos MRN}.$$

Der Winkel MRN ist das Supplement zum Winkel yAx; bezeichnet man also diesen letztern mit $\theta$, und behält dieselben Bezeichnungen wie im vorigen Numero bei, so erhält man

$$\delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\theta}.$$

Wird $\theta = 90^0$ angenommen, so ist $\cos\theta = 0$, und somit

$$\delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2};$$

welches die oben für rechtwinklige Axen gefundene Formel ist.

**221. Siebente Aufgabe.** Die Gleichungen zweier Linien sind gegeben, man soll den von ihnen gebildeten Winkel finden.

Es seien

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

die Gleichungen der beiden Geraden. Man ziehe durch den Ursprung, (Fig. 81) parallel mit diesen Geraden die Linien AD und AD'; dann ist der Winkel DAD' gleich dem gesuchten Winkel, den wir mit V bezeichnen wollen. Die Winkel DAx und D'Ax sind gleich denen, welche die gegebenen Geraden mit der Axe Ax bilden; sie seien mit $\alpha$ und $\alpha'$ bezeichnet. Nun hat man offenbar $V = \alpha' - \alpha$; also

$$\text{tang } V = \text{tang } (\alpha'-\alpha) = \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \alpha}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha'}.$$

Nehmen wir zuerst an, die Coordinaten-Axen seien rechtwinklig; dann ist (Nro. 212) $\text{tang } \alpha = a$, $\text{tang } \alpha' = a'$, also

$$\text{tang } V = \frac{a' - a}{1 + a a'}.$$

Mit dieser Formel ist die Aufgabe gelöst, da die Tangente des gesuchten Winkels durch dieselbe gegeben ist.

Sind die Geraden parallel, so ist der Winkel V Null, also ist auch $\text{tang } V = 0$; daher $a' = a$, wie wir schon (Nro. 216) gesehen haben.

Bilden sie einen rechten Winkel, so ist tang V unendlich groß, und deßwegen muß

$$aa' + 1 = 0 \text{ sein, woraus } a' = -\frac{1}{a}.$$

Dieß ist die Bedingung, unter welcher zwei Geraden senkrecht auf einander stehen. Steht die erste Gerade senkrecht auf den Abscissen, so ist a unendlich groß, und man findet $a' = 0$; also ist die zweite Gerade parallel mit den Abscissen, wie es auch sein muß. Ebenso, wenn die erste parallel mit den Abscissen ist, so ist a Null, und man erhält $a' = \infty$, was anzeigt, daß die andere Gerade parallel mit den Ordinaten ist.

**222.** Zweitens werde angenommen, die Coordinaten-Axen seien schief, und bilden mit einander den Winkel $\theta$; nun hat man (Nro. 213) $\text{tang } \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}$, $\text{tang } \alpha' = \frac{a' \sin \theta}{1 + a' \cos \theta}$; setzt man daher diese Werthe für tang $\alpha$ und tang $\alpha'$, so ergibt sich nach geschehener Reduction

$$\text{tang } V = \frac{(a' - a) \sin \theta}{1 + a a' + (a + a') \cos \theta}.$$

Um auszudrücken, daß die beiden gegebenen Geraden senkrecht auf einander stehen, muß man den Nenner gleich Null setzen, nämlich

$$1 + aa' + (a + a') \cos \theta = 0, \quad \text{woraus } a' = \frac{-1 - a \cos \theta}{a + \cos \theta}.$$

Ist $\theta = 90^0$, so reducirt sich diese Formel wieder auf die oben gefundene, $a' = -\frac{1}{a}$.

**223. Achte Aufgabe.** *Durch einen gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen, und die Länge dieser Senkrechten zwischen dem gegebenen Punkte und der Geraden zu finden.*

Die Gleichung der gegebenen Geraden sei

$$y = ax + b,$$

und $x'$, $y'$ die Coordinaten des gegebenen Punktes. Da die gesuchte Gerade durch diesen Punkt gehen muß (Nro. 214), so ist ihre Gleichung von der Form

$$y - y' = a' (x - x'),$$

wo $a'$ noch unbekannt ist. Aber wegen der Bedingung, daß sie auf der gegebenen Geraden senkrecht stehe, muß bei rechtwinkligen Axen (Nro. 221) $a' = -\frac{1}{a}$ sein; also ist die Gleichung der Senkrechten

$$y - y' = -\frac{1}{a} (x - x').$$

Um die Coordinaten des Durchschnittspunktes der gegebenen Geraden und der Senkrechten zu erhalten, ziehe man aus den Gleichungen dieser Linien die Werthe für $x$ und $y$ (Nro. 217). Zur leichtern Elimination bringe man die erste, $y = ax + b$, unter die Form

$$y - y' = a (x - x') + b + ax' - y'.$$

Indem man diese mit der für die Senkrechte verbindet, und die Differenzen $y - y'$ und $x - x'$ als Unbekannte annimmt, findet man

$$x - x' = \frac{a\,(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \quad y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2},$$

aus welchen Werthen die Coordinaten x und y für den Fußpunkt der Senkrechten leicht abzuleiten sind.

Bezeichnet man nun die Länge der Senkrechten zwischen dem gegebenen Punkt und der Geraden mit p, so läßt sich dieser Abstand ausdrücken durch

$$p = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

und setzt man für $x - x'$ und $y - y'$ ihre Werthe, so ergibt sich

$$p = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Da der Werth von p nothwendig positiv sein muß, so nimmt man das obere Vorzeichen, wenn der Zähler $y' - ax' - b$ positiv, und das untere, wenn dieser Zähler negativ ist.

Liegt der gegebene Punkt im Ursprung, so muß $x' = 0$ und $y' = 0$ gesetzt werden, dann reducirt sich der Werth von p auf folgenden:

$$p = \frac{\pm b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Liegt der Punkt auf der gegebenen Geraden, so müssen die Coordinaten $x'$ und $y'$ der Gleichung dieser Geraden genügen. Es ist daher $y' = ax' + b$; folglich wird der Werth von p zu Null, wie dieß der Fall sein muß.

**224.** Wenn die Axen schief sind, so ist $a'$ nicht mehr gleich $-\frac{1}{a}$, sondern es ist $a' = \frac{-1 - a\cos\theta}{a + \cos\theta}$ (Nro. 222), und die Gleichung der Senkrechten ist

$$y - y' = \frac{-1 - a\cos\theta}{a + \cos\theta}\,(x - x').$$

Verbindet man diese mit der Gleichung der gegebenen Geraden, letztere unter der Form

$$y - y' = a\,(x - x') + b + ax' - y',$$

so erhält man

$$x - x' = \frac{(a + \cos\theta)\,(y' - ax' - b)}{1 + a^2 + 2a\cos\theta},$$

$$y - y' = \frac{-(1 + a\cos\theta)\,(y' - ax' - b)}{1 + a^2 + 2a\cos\theta},$$

und um die Länge p der Senkrechten zu erhalten, muß man die Formel anwenden:

$$\delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')\,(y-y')\cos\theta},$$

die Nro. 220 gefunden wurde, und darin für $x - x'$ und $y - y'$ ihre Werthe setzen; dann ergibt sich nach allen Reductionen

$$p = \pm\frac{(y'-ax'-b)\sin\theta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}.$$

Mögen die Axen rechtwinklig oder schief sein, so ist der allgemeine Ausdruck für die Senkrechte p immer vom ersten Grad in Beziehung auf die Coordinaten $x'$ und $y'$ des Punktes, von wo aus sie gefällt wird.

**225. Uebungsbeispiele.** Da es von großer Wichtigkeit ist, sich mit den Anwendungen der Gleichung für die gerade Linie und der eben behandelten Aufgaben vertraut zu machen, so mögen hier zur Uebung noch einige Aufgaben und Lehrsätze folgen.—

I. **Aufgabe.** Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche den Winkel halbirt, den zwei auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Geraden, deren Gleichungen gegeben sind, mit einander bilden.

II. **Lehrsatz.** Es soll bewiesen werden, daß die Geraden, welche die drei Winkel eines Dreiecks halbiren, sich in Einem Punkte scheiden (Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises).

III. **Lehrsatz.** Die auf der Mitte der drei Seiten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden sich in Einem Punkte (Mittelpunkte des umschriebenen Kreises).

IV. **Lehrsatz.** Die von den Scheiteln eines Dreiecks auf die Mitte der Gegenseiten gezogenen Geraden schneiden sich in Einem Punkte (Schwerpunkt).

V. **Lehrsatz.** Die von den Scheiteln eines Dreiecks auf die Gegenseiten gefällten Senkrechten schneiden sich in Einem Punkte.

VI. **Lehrsatz.** In jedem geradlinigen Dreieck liegen der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der Schwerpunkt und der Durchschnittspunkt der drei Höhen immer in gerader Linie, und die Entfernung der beiden letzten Punkte ist doppelt so groß als die der beiden ersten.

VII. **Lehrsatz.** Zieht man mit der Grundlinie eines Dreiecks eine beliebige Parallele, und von den Punkten, wo diese Parallele die beiden andern Seiten schneidet, Linien nach den Scheiteln der Gegenwinkel, so schneiden sich dieselben immer in einem Punkte derjenigen Geraden, welche den Mittelpunkt der Grundlinie mit der Spitze des Dreiecks verbindet.

VIII. **Aufgabe.** In der Ebene des Winkels yOx (Fig. 82) sei ein Punkt A gegeben; man ziehe durch diesen Punkt zwei beliebige Gerade CF, ED; ferner die Gerade CD durch C und D, wo CF die Oy und ED die Ox treffen: ebenso ziehe man die Gerade EF durch die Punkte, wo dieselben Linien CF und ED die Ox und Oy treffen; dann verlängere man CD und EF bis zu ihrem Durchschnittspunkt B, und ziehe von diesem Punkt zwei beliebige Geraden, welche die Schenkel des Winkels in G, H, I, K schneiden, wodurch das Viereck IGHK entsteht: nun ist zu beweisen, daß der Punkt M, in welchem die Diagonalen GK und IH dieses Vierecks sich schneiden, auf der Geraden OA liegt, welche den gegebenen Punkt A mit dem Scheitel des gegebenen Winkels verbindet.

IX. **Aufgabe.** Es sei ein Punkt A (Fig. 83) und eine Gerade BC gegeben; man ziehe von diesem Punkte an BC eine beliebige Gerade AP, mache den Winkel PAM gleich einem gegebenen Winkel, und schneide auf AM ein Stück ab, so daß AM zu AP in einem gegebenen Verhältnisse steht: nun ist der Ort der so bestimmten Punkte M eine gerade Linie, die gefunden werden soll.

# Sechstes Kapitel.

## Linien der zweiten Ordnung.

### Eintheilung der Linien der zweiten Ordnung in drei Arten.

**226.** Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen x und y ist folgende:

$$[A] \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Ist der Coefficient A nicht Null, so gibt sie, nach y aufgelöst:

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF};$$

setzt man zur Abkürzung $a = \frac{-B}{2A}$, $b = \frac{-D}{2A}$, $n = B^2 - 4AC$, $p = BD - 2AE$, $q = D^2 - 4AF$, so hat man in einfacherer Form:

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}.$$

Die beiden Werthe von y haben einen gemeinschaftlichen rationalen Theil, der durch $ax + b$ ausgedrückt ist. Aber $ax + b$ ist die Ordinate einer geraden Linie, deren Gleichung $y = ax + b$ ist: wir wollen annehmen, diese Linie sei in HH' (Fig. 84) construirt. Will man die Punkte erhalten, welche die Gleichung [A] für irgend eine Abscisse AP gibt, so ziehe man zuerst die Ordinate PQ bis zur Geraden HH', und trage dann in der Richtung von PQ sowohl oberhalb als unterhalb HH' Stücke wie QM, QN an, die dem entsprechenden Werthe des irrationalen Theils

$$\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q}$$

gleich sind. Durch diese Construction erhält man offenbar

$$PM = PQ + QM = ax + b + \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q},$$

$$PN = PQ - QN = ax + b - \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}.$$

Denkt man sich diese Construction für alle Werthe von x, welche aus dem Wurzelwerthe reelle Werthe ergeben, wiederholt, so erhält man alle Punkte der durch die Gleichung [A] dargestellten Linie.

**227.** Die durch die Gleichung $y = ax + b$ gegebene Gerade HH' hat die Eigenschaft, daß sie die zwischen zwei Punkten der Curve parallel mit der Axe der y gezogenen Linien halbirt: man heißt sie deßhalb den Durchmesser.

Zur Abkürzung werde die Größe, die man oberhalb und unterhalb von HH' antragen muß, und die mit Y bezeichnet werden soll, die vom Durchmesser aus genommene Ordinate genannt: so daß man immer hat:

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}.$$

**228.** Um die Ausdehnung und die Grenzen der Curve kennen zu lernen, muß man die Ausdehnung und die Grenzen der Werthe von x suchen, welche die vom Durchmesser aus genommene Ordinate reell, oder zu Null, oder imaginär machen, d. h. welche die unter dem Wurzelzeichen enthaltene Größe positiv, oder zu Null, oder negativ machen. Nun wird aber in der Algebra bewiesen, daß man in irgend einem Polynom wie

$$fx^m + gx^{m-1} + hx^{m-2} + u. \text{ s. w.}$$

für x immer einen positiven und einen negativen Werth finden kann, so daß alle größeren positiven und negativen Werthe für dieses Polynom Werthe von demselben Vorzeichen wie das erste Glied ergeben; auch läßt sich beweisen, daß, wenn man x bis ins Unendliche wachsen läßt, auch die Werthe des Polynoms selbst bis ins Unendliche wachsen. Für die Größe $nx^2 + 2px + q$ ergeben sich also, von gewissen positiven und negativen Werthen von x an, bis ins Unendliche wachsende Werthe mit demselben Vorzeichen wie $nx^2$, und da das Quadrat $x^2$ stets an und für sich positiv ist, so muß dieses Vorzeichen das von n, d. h. von $B^2 - 4AC$ sein. Hieraus lassen sich nun zwei wichtige Folgerungen ableiten.

Ist nämlich $B^2 - 4AC$ negativ, so gibt es Werthe für x, über welche hinaus die Ordinate Y immer imaginär ist, man mag x positiv oder negativ nehmen. Außerdem kann diese Ordinate für diejenigen Werthe von x, innerhalb welcher Y reell bleibt, nicht unendlich groß werden; also ist die Curve, welche die Gleichung [A] dann vorstellen kann, in der Richtung der positiven und negativen Abscissen, sowohl oberhalb als unterhalb des Durchmessers, begrenzt. Diese Curve führt den Namen Ellipse.

Ist $B^2 - 4AC$ positiv, so gibt es positive und negative Werthe von x, über welche hinaus die Ordinate Y immer reell ist. Ueberdieß kann diese Ordinate bis ins Unendliche wachsen; also ist die durch die Gleichung [A] vorgestellte Curve in der Richtung der positiven und negativen x sowohl oberhalb als unterhalb des Durchmessers unendlich, oder mit andern Worten, sie erstreckt sich nach vier verschiedenen Regionen ins Unendliche; sie heißt Hyperbel.

**229.** Ist $B^2 - 4AC = 0$, so verliert der Wurzelwerth sein erstes Glied, und man hat blos

$$y = \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q}.$$

Ist nun p eine positive Größe, so kann man x positiv so groß nehmen als man will, und Y wird reell bleiben und bis ins Unendliche wachsen; nimmt man aber x negativ, so ist Y imaginär oder wird es werden, sobald x eine gewisse Größe überschritten hat: die Curve ist daher auf der Seite der negativen x begrenzt. Das Gegentheil wird stattfinden, wenn p eine negative Größe ist. Also ist die Curve in diesen beiden Fällen oberhalb und unterhalb des Durchmessers unendlich; aber sie ist auf einer Seite des Ursprungs begrenzt, so daß sie sich nur in zwei Richtungen ins Unendliche erstreckt: man heißt sie Parabel.

Für den Augenblick wollen wir den Fall übergehen, wo p zugleich mit $B^2 - 4AC$ Null ist, weil dann Y constant ist und die gegebene Gleichung keine krumme Linie mehr darstellen kann; wir werden indeß auf diesen besondern Fall zurückkommen.

**230.** Die vorangegangenen Erörterungen führen auf drei Arten von Curven der zweiten Ordnung. Diese Eintheilung scheint zwar zu erfordern, daß die Gleichung in Beziehung auf y vom zweiten Grade sei; wir wollen indessen zeigen, daß sie auch die andern Fälle in sich begreift.

**231.** Wenn der Coefficient A Null ist und C nicht, so ist die Gleichung doch in Beziehung auf x vom zweiten Grade; löst man sie nach dieser Veränderlichen auf, so ist

$$x = -\frac{B}{2C}y - \frac{E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{B^2y^2 + 2(BE - 2CD)y + E^2 - 4CF}.$$

Ist B nicht Null, so ist $B^2y^2$ positiv, und bei ähnlichen Folgerungen wie oben (Nro. 228), wobei man überall y anstatt x setzt, ersieht man, daß die Curve vier unendliche Aeste haben muß, und man sie deßhalb zu der Art der Hyperbeln zählen darf, zu welcher sie auch ihrer analytischen Natur nach gehört: denn die Größe $B^2 - 4AC$, die sich hier auf $B^2$ reducirt, ist nothwendig positiv.

Ist $B = 0$, so ist y nur noch im ersten Grad unter dem Wurzelzeichen, und man ersieht leicht, daß die durch die Gleichung gegebene Curve zu den Parabeln gerechnet werden muß, wohin sie auch ihr analytischer Charakter verweist: denn $B^2 - 4AC$ ist gleich Null wegen der Voraussetzung $A = 0$ und $B = 0$.

**232.** Es kann der Fall vorkommen, daß C zugleich mit A Null ist; dann heißt die Gleichung [A]

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0,$$

welche nur noch als Gleichung des ersten Grads aufgelöst werden kann. Man erhält daraus

$$y = \frac{-Ex - F}{Bx + D} = \frac{-E - \frac{F}{x}}{B + \frac{D}{x}},$$

und

$$x = \frac{-Dy - F}{By + E} = \frac{-D - \frac{F}{y}}{B + \frac{E}{y}}.$$

Der Werth von y zeigt, daß, wenn man $x = \pm\infty$ setzt, $y = \frac{-E}{B}$ wird; nimmt man also (Fig. 85) auf der Axe der y in der entsprechenden Richtung ein Stück AB gleich dieser Größe, und zieht durch den Punkt B mit Ax die Parallele HH', so trifft die Linie der zweiten Ordnung diese Parallele sowohl auf der Seite von BH als BH' in unendlicher Entfernung vom Punkte B; also erstreckt sich diese Linie in beiden Richtungen in unbestimmter Weite. Der Werth von x ergibt, wenn man $y = \pm\infty$ macht, $x = \frac{-D}{B}$; nimmt man also auf der entsprechenden Seite vom Ursprung die Abscisse AC gleich dieser Größe, und zieht durch den Punkt C die KK' parallel mit Ay, so trifft die Curve diese Parallele sowohl oberhalb als unterhalb in unendlicher Entfernung; also erstreckt sie sich auf der Seite von CK und CK' ins Unendliche. Die Curve hat daher vier unbestimmte Aeste, und gehört somit zu den Hyperbeln. Dabei ist zu bemerken, daß die Größe $B^2 - 4AC$ noch positiv ist, da sie sich auf $B^2$ reducirt und B nicht Null ist, sonst wäre die gegebene Gleichung nicht mehr vom zweiten Grad.

**233.** Es läßt sich nun leicht einsehen, daß man nur drei Arten von Curven der zweiten Ordnung unterscheiden kann:

1) Die Ellipsen, welche nach allen Richtungen begrenzte Curven sind, und für die $B^2 - 4AC < 0$ ist;

2) die Hyperbeln, welche Curven aus vier unendlichen Aesten bestehen, und für welche $B^2 - 4AC > 0$ ist;

3) die Parabeln, welche aus zwei unendlichen Aesten bestehende Curven sind, und für die $B^2 - 4AC = 0$ ist.

Da die Bedingung $B^2 - 4AC = 0$ stattfinden muß, damit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2$$

ein Quadrat sei, so kann man sagen: in allen Fällen, wo die Gleichung des zweiten Grades eine Parabel vorstellt, bilden die drei Glieder des zweiten Grades ein Quadrat; auch der umgekehrte Satz ist richtig.

Es soll nun jede der drei Arten von Curven besonders untersucht werden.

## Discussion der Ellipse. $B^2 - 4AC < 0$.

**234.** Bei der Auflösung der Gleichung [A] ergab sich (Nro. 226)

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + px + q},$$

in welchen Werthen n anstatt $B^2 - 4AC$ gesetzt ist. In dem vorliegenden Falle ist diese Größe negativ; deßhalb wollen wir $-\delta^2$ anstatt n setzen, dann lassen sich die Werthe von y auf folgende Weise schreiben:

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{-\left(x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}\right)}.$$

Angenommen, HH′ (Fig. 86) sei der Durchmesser, dessen Gleichung $y = ax + b$ ist, und es seien die Punkte zu suchen, in welchen die Curve denselben trifft. Für diese Punkte ist die vom Durchmesser aus genommene Ordinate Null; also sind die Abscissen dieser Punkte durch die Gleichung gegeben

$$[1] \qquad x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2} = 0.$$

Die Wurzeln derselben seien x′ und x″, und da diese beiden Wurzeln entweder reell und ungleich, oder reell und gleich, oder imaginär sein können, so wollen wir diese drei Fälle nach einander untersuchen.

**235. Erster Fall.** Sind x′ und x″ reelle und ungleiche Größen, so folgt daraus, daß die Curve wirklich zwei auf dem Durchmesser

liegenden Punkte hat. Nehmen wir zu leichterer Veranschaulichung $x'$ und $x''$ positiv und $x'$ kleiner als $x''$ an: will man nun die auf dem Durchmesser liegenden Punkte construiren, so setze man $AB = x'$, $AB' = x''$, ziehe durch B und B' die Geraden CD und C'D' parallel mit der Axe der y, dann bestimmen die Durchschnittspunkte dieser Linien mit HH' die Punkte H und H', in welchen der Durchmesser die Curve trifft.

Drückt man, wie schon (Nro. 227) angenommen, die vom Durchmesser aus genommene Ordinate durch Y aus, so ist

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{-\left(x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}\right)}.$$

Um dem Gang dieser Ordinate leichter zu folgen, wenn man x alle möglichen Werthe beilegt, zerlege man das Polynom unter dem Wurzelzeichen in Factoren. Da $x'$ und $x''$ Wurzeln der Gleichung [1] sind, so folgt daraus, daß das Polynom $x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}$ das Product aus den Factoren $x - x'$, $x - x''$ ist: folglich hat man

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-x')\,(x''-x)}.$$

Nun ist klar, daß von A nach B die Abscisse x kleiner ist als $x'$ und $x''$; also ist der Factor $x-x'$ negativ, während der Factor $x'' - x$ positiv ist; folglich ist Y imaginär; es gibt somit keinen Punkt der Curve zwischen der Axe Ay und der durch den Punkt B gezogenen Parallele CD.

Von B nach B' ist x größer als $x'$ und kleiner als $x''$; dann sind die Factoren $x - x'$ und $x'' - x$ positiv und folglich Y reell; es entsprechen also jeder zwischen diesen Grenzen befindlichen Abscisse AP zwei Punkte der Ellipse.

Ueber B' hinaus bis ins Unendliche ist x größer als $x'$ und als $x''$; also ist der Factor $x - x'$ positiv, aber der Factor $x'' - x$ negativ, daher Y imaginär; folglich hat die Ellipse über die durch B' parallel mit Ay gezogene Linie C'D' hinaus keinen Punkt mehr.

Auf der Seite Ax' ist die Abscisse x negativ; der Factor $x - x'$ ist daher negativ, während der Factor $x''-x$ positiv ist; Y ist also imaginär und die Ellipse hat keinen Punkt auf der Seite der negativen x.

Die Ellipse liegt somit ganz zwischen den Parallelen CD und C'D', und da die Werthe von x, für welche Y reell ist, zwischen $x'$ und $x''$ liegen, und überdieß Y für keinen dieser Werthe unendlich werden kann, so folgt daraus, daß die Ellipse nach allen Richtungen begrenzt ist, was wir schon aus Nro. 228 wußten.

Die Grenzen der Ellipse lassen sich indessen auch parallel mit dem Durchmesser genau bestimmen. Die beiden Factoren unter dem Wurzelzeichen geben, wenn sie zusammen addirt werden, die Summe $x'' - x'$, die sich mit x nicht ändert; folglich wird das Product $(x-x')\,(x''-x)$

am größten, wenn jeder Factor gleich der Hälfte dieser Summe, d. h. gleich $\frac{1}{2}(x'' - x')$ ist. Man setze also

$x - x' = \frac{1}{2}(x'' - x')$, woraus $x = x' + \frac{1}{2}(x'' - x') = \frac{1}{2}(x'' + x')$,

und für diesen Abscissenwerth von x ist Y ein Maximum. Derselbe entspricht offenbar der Mitte E von BB'; denn es ist

$$AE = AB + BE = x' + \tfrac{1}{2}(x'' - x').$$

Der Werth dieses Maximums ist

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\tfrac{1}{2}(x'' - x') \times \tfrac{1}{2}(x'' - x')} = \frac{\delta(x'' - x')}{4A}.$$

Um die entsprechenden Punkte der Curve zu finden, ziehe man EO parallel mit den Ordinaten, und schneide auf dieser Linie auf jeder Seite des Durchmessers $OG = OG' = \frac{\delta(x'' - x')}{4A}$ ab: so sind G und G' die Punkte, wo sich die Ellipse am weitesten von HH' entfernt. Zieht man GK und G'K' parallel mit HH', so dienen diese Linien als Grenzen der Curve, so daß die vier Geraden CD, C'D', GK, G'K' ein Parallelogram bilden, das die Curve einschließt, und dessen Seiten in ihrer Mitte die Curve selbst * berühren.

---

* Man kann auch Y unter folgende Form bringen:

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(\frac{p^2}{\delta^4} + \frac{q}{\delta^2}\right) - \left(x - \frac{p}{\delta^2}\right)^2};$$

dann sieht man sogleich, daß sein größter Werth $x = \frac{p}{\delta^2}$ ist. Dieser Werth von x ist derselbe wie $\frac{1}{2}(x'' + x')$: denn bekanntlich ist in der Gleichung [1] die Summe der Wurzeln gleich dem Coefficienten des zweiten Glieds mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

Es sei nun $EP = EP' = \varrho$, so ist $AP = \frac{p}{\delta^2} - \varrho$, $AP' = \frac{p}{\delta^2} + \varrho$. Setzt man diese Abscissen anstatt x, so erhält man jedesmal für Y den gleichen Werth, also sind für diese Abscissen die vom Durchmesser aus genommene Ordinaten QM, QN, Q'M', Q'N' gleich groß. Daraus folgt, daß die Dreiecke OQM und OQ'N' congruent sind, also ist MON' eine in O halbirte gerade Linie, d. h. der Punkt O ist der Mittelpunkt aller durch diesen Punkt in der Ellipse gezogenen Geraden. Wegen dieser Eigenschaft wird der Punkt O Mittelpunkt genannt.

Aus der Congruenz derselben Dreiecke geht hervor, daß die mit HH' parallele Sehne MM' durch die Linie GG' halbirt wird, und da dieß bei allen mit HH' parallelen Sehnen der Fall ist, so folgt daraus, daß GG' ein Durchmesser ist. Die beiden Durchmesser HH' und GG' haben also eine solche Lage, daß jeder derselben die mit dem andern Durchmesser parallelen Sehnen halbirt: man heißt sie deßhalb conjugirte (zusammengehörige) Durchmesser.

Gibt man dem Durchmesser eine besondere, bestimmte Lage, setzt für $\delta$, A, $x'$ und $x''$ numerische Werthe, und construirt die Curve nach hinreichend naheliegenden Punkten, so erhält man die in Fig. 86 angezeigte Form. Dabei ist es außer Zweifel, daß sie gegen den Durchmesser überall hohl sein muß: denn wollte man annehmen, sie hätte eine andere Form, wie etwa in Fig. 87, so könnte man eine gerade Linie, wie RS ziehen, welche sie in mehr als zwei Punkten treffen würde, was bei einer Linie der zweiten Ordnung (Nro. 199) nicht der Fall sein kann.

**236. Zweiter Fall.** Sind die Wurzeln $x'$ und $x''$ reell und gleich, so erhält man für die Ordinate Y

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{-(x-x')^2} = \frac{\delta\,(x-x')}{2A}\sqrt{-1}.$$

Die einzige Abscisse, welche Y reell macht, ist $x = x'$; also reducirt sich die Ellipse auf den einzigen Punkt, der $x = x'$, $y = ax + b$ zu Coordinaten hat.

**237. Dritter Fall.** Sind endlich die Wurzeln $x'$ und $x''$ imaginär, so kann das Polynom $nx^2 + 2px + q$ unter dem Wurzelzeichen sein Vorzeichen bekanntlich nie ändern, welchen Werth auch x haben mag. Ferner ist bewiesen, daß bei hinlänglich großen Werthen für x dieses Polynom Werthe von demselben Vorzeichen wie das erste Glied erhalten muß. Da nun das erste Glied immer negativ ist, so muß es auch das Polynom sein; also ist Y imaginär, und folglich ist kein Punkt vorhanden, dessen Coordinaten der Gleichung [A] genügen können. Man sagt dann, die Gleichung sei *unmöglich*, oder auch sie stelle eine *imaginäre Ellipse* vor.

**238.** Der Kreis ist ein besonderer Fall der Ellipse. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur beachten, daß die Gleichung der Kreislinie vom zweiten Grade ist (Nro. 186), und daß die Ellipsen die einzigen Curven der zweiten Ordnung sind, die nach allen Richtungen begrenzt sind. Zwar setzt die Gleichung in Nro. 186 rechtwinklige Coordinaten voraus; wir haben aber (Nro. 197) gesehen, daß der Grad einer Gleichung zwischen x und y durch die Veränderung der Axen nicht geändert wird.

### Discussion der Hyperbel. $B^2 - 4AC > 0$.

**239.** Da die Größe n oder $B^2 - 4AC$ für den Fall der Hyperbeln positiv ist, so setze man $\delta^2$ für n; dann sind die allgemeinen Werthe von y (Nro. 226) folgende:

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{x^2 + \frac{2p}{\delta^2}x + \frac{q}{\delta^2}}.$$

Wir wollen nun

$$x^2 + \frac{2p}{\delta^2} x + \frac{q}{\delta^2} = 0$$

setzen, und ihre beiden Wurzeln mit $x'$ und $x''$ bezeichnen; dann lassen sich, wie vorhin, drei Fälle unterscheiden, je nachdem sie reell und ungleich, oder reell und gleich, oder endlich imaginär sind.

**240. Erster Fall.** Sind die Wurzeln $x'$ und $x''$ reell und ungleich, so trifft die Curve den durch die Gleichung $y = ax + b$ gegebenen Durchmesser in zwei Punkten H und H′ (Fig. 88), die den Abscissen $AB = x'$ und $AB' = x''$ entsprechen; wobei $x'$ und $x''$ positiv und $x' < x''$ angenommen wird.

Zerlegen wir das unter dem Wurzelzeichen befindliche Trinom in Factoren, so ergibt sich für die vom Durchmesser aus genommene Ordinate

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-x')\,(x-x'')}.$$

Von A nach B ist x positiv und kleiner als jede der Wurzeln $x'$ und $x''$; die Factoren $x - x'$ und $x - x''$ sind also beide negativ und Y ist reell. Um zu finden, ob Y wächst oder abnimmt, wenn x wächst, mache man diese Factoren positiv und schreibe

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x'-x)\,(x''-x)}.$$

Nun fällt in die Augen, daß, wenn x von 0 bis $x'$ wächst, der Werth von Y von $\frac{\delta}{2A}\sqrt{x'x''}$ bis 0 abnimmt.

Es sei daher

$$IF = IF' = \frac{\delta}{2A}\sqrt{x'x''},$$

so ist der zwischen Ay und BH liegende Theil der Hyperbel durch die Punkte F und F′ begrenzt, und hat ungefähr die Form FHF′.

Von B nach B′ ist $x > x'$ und $x < x''$; also ist Y imaginär, und somit liegt zwischen den Parallelen BH und B′H′ nichts von der Curve.

Ueber B′ hinaus ist x größer als $x'$ und $x''$; also ist Y reell. Ferner ist klar, wenn man x wachsen läßt, so wachsen auch die beiden Factoren, und haben keine andere Grenze als das Unendliche. Dadurch wird ein Ast der Curve SH′S′ bestimmt, der sich oberhalb und unterhalb des Durchmessers in der Richtung der positiven x bis ins Unendliche erstreckt.

Vom Anfangspunkt A aus auf der Seite Ax', wo x negativ ist, setze man $x = -z$, so erhält man

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(z+x')\ (z+x'')}.$$

Jeder positive Werth von z bestimmt hier einen reellen Werth von Y, und wenn z unendlich groß wird, so wächst auch diese Ordinate bis ins Unendliche.

Man erhält so zwei Bögen der Hyperbel, FR und F'R', die sich auf der Seite der negativen x bis ins Unendliche erstrecken, und zugleich vom Durchmesser sich immer mehr entfernen.

Gibt man dem Durchmesser eine bestimmte Lage und setzt für $\delta$, A, x' und x'' numerische Werthe, so läßt sich die Curve nach Punkten construiren, so daß sie die in der Figur angegebene Form hat.

**241. Zweiter Fall.** Sind die Wurzeln x' und x'' einander gleich, so sind die Werthe von y folgende:

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\ (x - x').$$

Sie bestimmen zwei Geraden FO und F'O (Fig. 89), die sich auf dem Durchmesser im Punkte O, dessen Abscisse x' ist, schneiden; denn setzt man $x = x'$, so reduciren sich die Ordinaten der beiden Geraden auf

$$y = ax' + b.$$

**242. Dritter Fall.** Wenn x' und x'' imaginär sind, so trifft die Hyperbel den Durchmesser nicht. Da aber das Trinom $\delta^2x^2+2px+q$ immer positiv bleiben muß, so gibt jeder Werth von x einen reellen Werth für Y, also zwei Punkte der Hyperbel, von denen der eine oberhalb, der andere unterhalb des Durchmessers liegt. Die Curve besteht daher wieder aus zwei unendlichen Aesten, die aber durch den Durchmesser getrennt sind; jeder dieser Aeste ist gegen den Durchmesser conver, und hat die in Fig. 90 dargestellte Form.

Will man die Punkte bestimmen, wo die Hyperbel ihrem Durchmesser am nächsten kommt, so bringe man den Werth von Y zuerst unter folgende Form:

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(x + \frac{p}{\delta^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{\delta^2} - \frac{p^2}{\delta^4}\right)}.$$

Ferner beachte man, daß die Größe $\left(\frac{q}{\delta^2} - \frac{p^2}{\delta^4}\right)$ positiv sein muß; denn sonst würden sich, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich Null gesetzt würde, für x reelle Werthe ergeben, was gegen die Voraussetzung

ist. Nach dieser Bemerkung muß Y ein Minimum sein, wenn das Quadrat $\left(x + \frac{p}{\delta^2}\right)^2$ zu Null wird, was blos der Fall ist, wenn

$$x = -\frac{p}{\delta}$$

gesetzt wird.

Der Minimumswerth von Y ist dann

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{q - \frac{p^2}{\delta^2}}.$$

Man nehme daher die Abscisse AE gleich dem Werthe von x, ziehe EO parallel mit den Ordinaten, trage dann auf jeder Seite des Durchmessers die Abstände OG und OG′ gleich dem Werthe von Y an; so sind G und G′ die Punkte, wo die Aeste der Hyperbel dem Durchmesser am nächsten kommen. *

**243.** Wir haben (Nro. 231) gesehen, daß, wenn A Null ist, aber B und C nicht, die Gleichung [A] Curven gibt, welche unter die Hyperbeln zu rechnen sind. Nach dem, was dort bemerkt wurde, kann man die Gleichung nach x auflösen, und eine der vorigen ähnliche Discussion einschlagen, ohne etwas zu ändern, als x in y und y in x. Da aber das Quadrat von y fehlt, so ist die Gleichung [A] in Beziehung auf y nur noch vom ersten Grad, und es scheint natürlich, sie nach dieser Veränderlichen aufzulösen. Wir wollen nun diesen neuen Weg einschlagen.

Die zu construirende Gleichung ist dann

[B] $$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

oder

$$(Bx + D)y + Cx^2 + Ex + F = 0,$$

woraus

$$y = \frac{-Cx^2 - Ex - F}{Bx + D}.$$

Führt man die Division aus, und bezeichnet die beiden ersten Glieder des Quotienten mit rx und s, und den Rest der Division, der die Veränderliche x nicht enthält, mit t, so ergibt sich für vorigen Werth

$$y = rx + s + \frac{t}{Bx + D}.$$

---

* Mittelst ähnlicher Folgerungen wie in der Anm. Seite 179 läßt sich beweisen, daß in den Fig. 88 und 90 der Punkt O ein Mittelpunkt, die Linie GG′ ein Durchmesser ist, und HH′ und GG′ zwei conjugirte Durchmesser sind.

Construiren wir zuerst die Gerade, deren Gleichung $y = rx + s$ ist, und nehmen an, es sei diese HH' (Fig. 91). Nun muß man offenbar, um die Punkte der Curve zu erhalten, die durch $\frac{t}{Bx + D}$ dargestellten Abstände in der Richtung der Ordinaten dieser Geraden antragen, aber nicht ober- und unterhalb HH', sondern blos oberhalb, wenn diese Größe positiv, und unterhalb HH', wenn sie negativ ist. Denn es ist klar, daß man im ersten Fall diese Größe der Ordinate der Geraden hinzufügen, und im zweiten dieselbe von ihr wegnehmen muß.

Setzen wir der Abkürzung wegen

$$V = \frac{t}{Bx + D},$$

wobei B, D und t als positive Größen angenommen seien, und untersuchen, welchen Gang die Werthe von V nehmen, wenn man x alle mögliche Werthe beilegt.

Ist $x = 0$, so ist $V = \frac{t}{D}$; nimmt man also auf Ay über HH' ein Stück GC gleich diesem Werthe, so ist C ein Punkt der Curve. Läßt man x positiv bis ins Unendliche wachsen, so bleibt V positiv, nimmt aber bis auf Null ab. Dieß zeigt an, daß die Curve vom Punkte C an sich der Geraden HH' immer mehr nähert, ohne daß sich für diese Annäherung eine Grenze angeben läßt, und man erhält so einen unendlichen Bogen wie CR.

Um die Substitution negativer Werthe auf die der positiven zurückzuführen, setze man $x = -z$, so ist

$$V = \frac{t}{D - Bz}.$$

Hier wird der Nenner $D - Bz$ Null und V unendlich groß, wenn man $z = \frac{D}{B}$ macht; trägt man also diesen Werth auf der Seite der negativen x von A nach K an, und zieht LKL' parallel mit Ay, so trifft die Gerade LKL' mit der Curve nicht zusammen, oder wenigstens erst in unendlicher Weite. Legt man z Werthe bei, die von 0 bis AK wachsen, so bleibt V immer positiv und wächst von CG bis ins Unendliche: dadurch wird ein neuer hyperbolischer Bogen CR' bestimmt, der gleichsam die Verlängerung des Bogens CR ist, und der sich der Linie KL in dem Maße beständig nähert, als er sich von der Geraden HH' entfernt, ohne daß sich für diese Annäherung eine Grenze bestimmen ließe.

Gibt man z einen Werth $AE > AK$, so wird V negativ; also liegt der Punkt F, der dieser Abscisse entspricht, unterhalb der Linie HH'. Läßt man z von AE bis AK abnehmen, so wächst V negativ von DF an bis ins Unendliche, und läßt man z von AE bis ins Unendliche wachsen, so nimmt V bis auf Null ab, wobei es immer negativ bleibt.

Also gibt es auf jeder Seite des Punktes F zwei unbegrenzte hyperbolische Bögen, FS′ und FS, von denen sich der eine in unbestimmte Weite der Geraden KL′, der andere der Geraden GH′ nähert.

Die Geraden HH′ und LL′, welche durch die beiden Gleichungen

$$y = rx + s \text{ und } x = -\frac{D}{B}$$

gegeben sind, kommen der Hyperbel unendlich nahe, ohne je mit ihr zusammen zu treffen: wegen dieser merkwürdigen Eigenschaft haben sie den Namen Asymptoten erhalten.

Der Schenkel OH ist Asymptote des Bogens CR, und OH′ Asymptote des Bogens FS; ebenso sind die Linien OL und OL′ Asymptoten der Bögen CR′ und FS′.

Es wurde im Vorigen angenommen, daß, wenn man die angezeigte Division in dem aus der Gleichung [B] abgeleiteten Werthe von y vornimmt, der Rest t nicht Null sei. Nehmen wir nun $t = 0$ an, so ist

$$-Cx^2 - Ex - F = (rx + s)(Bx + D).$$

Folglich läßt sich die Gleichung [B] auch so schreiben:

$$(Bx + D)y - (rx + s)(Bx + D) = 0,$$

oder auch auf folgende Weise:

$$(Bx + D)(y - rx - s) = 0;$$

dieser Gleichung wird offenbar genügt, indem man entweder

$$Bx + D = 0 \text{ setzt, woraus } x = -\frac{D}{B},$$

oder auch

$$y - rx - s = 0, \text{ woraus } y = rx + s.$$

Daraus folgt, daß die Gleichung [B] im vorliegenden Fall zwei Gerade vorstellt, von denen die eine mit der Axe der y parallel ist.

Aus der eben geführten Discussion geht hervor, daß für den Fall, wo in der Gleichung das Quadrat $y^2$, aber nicht das Rechteck xy fehlt, dieselbe entweder eine Hyperbel vorstellt, welche zwei Asymptoten hat, von denen die eine mit der Axe der y parallel ist, oder zwei Gerade, von denen die eine mit dieser Axe parallel lauft.

**244.** Würde in der Gleichung $x^2$, und nicht $y^2$ fehlen, so müßte sie offenbar entweder eine Hyperbel ergeben, die eine mit der Axe der x parallele Asymptote hätte, oder auch zwei Gerade, von denen eine mit dieser Axe parallel wäre.

**245.** Wenn die beiden Quadrate zugleich fehlen, so muß die Gleichung des zweiten Grads eine Hyperbel, die zwei beziehungsweise mit den beiden Axen parallele Asymptoten hat, oder auch zwei mit diesen Axen parallele Geraden ergeben. Dieß läßt sich wirklich aus der Gleichung

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0$$

ableiten, indem man die Folgerungen in Nro. 243 darauf anwendet.

## Asymptoten der Hyperbel überhaupt.

**246.** Wenn ein Curvenast unendlich ist, so heißt eine Gerade, die demselben unendlich nahe kommt, ohne ihn je zu treffen, Asymptote. Nach dieser Erklärung lassen sich die Asymptoten leicht bestimmen. Cauchy hat diese Untersuchung in seinen Leçons d'Analyse auf folgende Weise geführt.

Es sei CR (Fig. 92) ein Curvenast, und GH seine Asymptote, die hier mit der Axe Ay nicht parallel sei, und MP, NP seien beliebige, der nämlichen Abscisse AP entsprechende Ordinaten dieser Linien. Nun muß die Entfernung MN für sehr große Werthe von x sehr klein, und sogar zu Null werden, wenn x unendlich groß wird; ist also die Gleichung der Asymptote

$$y = cx + d,$$

so muß sich aus der Gleichung der Curve ein Werth für y ableiten lassen, dessen Differenz mit $cx + d$ zu Null wird, wenn x unendlich groß ist. Dieser Werth läßt sich daher unter die Form

$$y = cx + d + V$$

bringen, wo V eine Function von x ist, die für

$$x = +\infty \quad \text{oder} \quad x = -\infty$$

zu Null wird, je nachdem der betreffende Curvenast auf der Seite der positiven oder negativen x liegt. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d+V}{x}, \quad d = y - cx - V.$$

Ist x unendlich groß, so werden die Größen V und $\frac{d+V}{x}$ zu Null; man erhält also c, wenn man sucht, was alsdann aus dem Verhältniß $\frac{y}{x}$ der Ordinate der Curve zu ihrer Abscisse wird, und nachdem man c bestimmt hat, ergibt sich d, wenn man sucht, was aus der Größe $y - cx$ bei einem

ebenfalls unendlich großen Werth von x wird. Ist nun c und d bekannt, so ist die Gleichung der Asymptote $y = cx + d$.

Lassen sich auf diese Weise mehrere Systeme von reellen und endlichen Werthen für c und d bestimmen, so muß auch die Curve mehrere unendliche Aeste enthalten, die Asymptoten haben, welche mit den Ordinaten nicht parallel sind. Für $x = +\infty$ erhält man Asymptoten für unendliche Aeste auf der Seite der positiven x, und für $x = -\infty$ erhält man die für unendliche Aeste in der Richtung der negativen x.

**247.** Um keine Asymptote zu übergehen, muß man auch noch die mit den Ordinaten parallel laufenden suchen, und hiebei ist nur zu beachten, daß sie sich aus endlichen Werthen von x, welche die Ordinate der Curve unendlich machen, ergeben.

Würde man übrigens in dem eben Vorgekommenen überall x in y und y in x verwandeln, so würde man alle mit den Abscissen nicht parallelen Asymptoten erhalten; so daß sich daraus alle schon bekannten, nebst den mit den Ordinaten parallelen Asymptoten, die allein noch zu finden sind, ergeben würden.

**248.** Wenden wir die vorigen Regeln auf die Hyperbel an. Für diese Curve sind die allgemeinen Werthe von y (Nro. 239)

$$y = ax + b + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2x^2 + 2px + q},$$

$$y = ax + b - \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2x^2 + 2px + q}.$$

Angenommen, es handle sich von der in Fig. 88 dargestellten Hyperbel; je nachdem man x bis $+\infty$ oder bis $-\infty$ wachsen läßt, bestimmt der erste Werth von y den Bogen H'S oder HR, und der zweite Werth von y den Bogen H'S' oder HR'.

Um die Asymptote des ersten Bogens H'S zu erhalten, muß man zuerst das Verhältniß von y zu x nehmen, und den Werth dieses Verhältnisses für $x = +\infty$ suchen. Nun ist

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 + \frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}},$$

und wenn $x = +\infty$ gemacht wird, so ergibt sich

$$c\ \left(\text{als Grenze von } \frac{y}{x}\right) = a + \frac{\delta}{2A}.$$

Nachdem c gefunden, muß man, um d zu erhalten, die Grenze von $y - cx$ suchen; man hat nun

$$y - cx = ax + b + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2x^2 + 2px + q} - \left(a + \frac{\delta}{2A}\right)x$$

$$= b + \frac{1}{2A}\left(\sqrt{\delta^2x^2 + 2px + q} - dx\right);$$

es ist jedoch nicht abzusehen, was aus dieser Größe wird, wenn x positiv bis ins Unendliche wächst; denn die in den Klammern befindlichen positiven und negativen Glieder werden zugleich unendlich. Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, nehme man zu einer bekannten Umformung Zuflucht, aus welcher sich ergibt

$$y - cx = b + \frac{\left(\sqrt{\delta^2x^2+2px+q} - \delta x\right)\left(\sqrt{\delta^2x^2+2px+q} + \delta x\right)}{2A\left(\sqrt{\delta^2x^2+2px+q} + \delta x\right)}$$

$$= b + \frac{2px + q}{2A\left(\sqrt{\delta^2x^2+2px+q} + \delta x\right)}$$

$$= b + \frac{2p + \frac{q}{x}}{2A\left(\sqrt{\delta^2 + \frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}} + \frac{\delta}{x}\right)}.$$

Unter dieser Form sieht man leicht, daß, wenn $x = +\infty$ gesetzt wird, man

$$d \text{ (als Grenze von } y - cx) = b + \frac{p}{2A\delta}$$

erhält.

Setzt man nun in der Gleichung $y = cx + d$ für c und d ihre Werthe, so erhält man für die Asymptote des Bogens H'S

$$[1] \qquad y = \left(a + \frac{\delta}{2A}\right)x + b + \frac{p}{2A\delta}.$$

Um die Asymptote des Bogens HR' zu finden, beachte man, daß dieser Bogen durch den zweiten Werth von y gegeben ist, indem man hier x bis $-\infty$ wachsen läßt; für diesen Fall ist

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} - \frac{1}{2Ax}\sqrt{\delta^2x^2+2px+q}.$$

Man verwandle x in $-z$, und setze dann $z = +\infty$, so ergibt sich

$$\frac{y}{x} = a - \frac{b}{z} + \frac{1}{2Az}\sqrt{\delta^2z^2-2pz+q}$$

$$= a - \frac{b}{z} + \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2 - \frac{2p}{z} + \frac{q}{z^2}};$$

für $z = \infty$ hat also c denselben Werth, wie im vorigen Fall, nämlich

$$c\left(\text{als Grenze von } \frac{y}{z}\right) = a + \frac{\delta}{2A}.$$

Ebenso findet man

$$y - cx = ax + b - \frac{1}{2A}\sqrt{\delta^2x^2+2px+q} - \left(a + \frac{\delta}{2A}\right)x$$

$$= b - \frac{1}{2A}\left(\sqrt{\delta^2x^2+2px+q} + \delta x\right)$$

$$= b - \frac{1}{2A}\left(\sqrt{\delta^2z^2-2pz+q} - \delta z\right);$$

und indem man dieselbe Umformung wie vorhin vornimmt, und wieder $z = +\infty$ macht, erhält man auch denselben Werth für d, wie für den ersten Bogen, nämlich

$$d\ (\text{als Grenze von } y - cx) = b + \frac{p}{2A\delta}.$$

Daraus folgt, daß die Asymptoten der beiden Bögen auf derselben geraden Linie liegen, welche durch die Gleichung [1] gegeben ist.

Durch ganz ähnliche Folgerungen findet man, daß die Asymptoten der beiden andern Bögen ebenfalls auf einer geraden Linie liegen, deren Gleichung folgende ist:

$$[2] \qquad y = \left(a - \frac{\delta}{2A}\right)x + b - \frac{p}{2A\delta}.$$

Die Gleichungen [1] und [2] lassen sich auch so schreiben:

$$y = ax + b + \frac{1}{2A}\left(\delta x + \frac{p}{\delta}\right)$$

$$y = ax + b - \frac{1}{2A}\left(\delta x + \frac{p}{\delta}\right),$$

oder auch, wenn man sie in einer einzigen darstellt, auf folgende Weise:

$$[3] \qquad y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\left(\delta x + \frac{p}{\delta}\right),$$

welche Form noch deutlicher zeigt, wie die Asymptoten unmittelbar aus den allgemeinen, die Ordinate der Hyperbel ausdrückenden Werthen sich ableiten lassen. Denn wenn man in diesen Werthen nur die veränderlichen Glieder $\delta^2x^2+2px$ beibehält, das Quadrat zu $\delta^2x^2+2px+\frac{p^2}{\delta^2}$ ergänzt, und die Wurzel dieses Quadrats auszieht, so bekommt man genau die Gleichung [3].

**249.** Die beiden Asymptoten schneiden sich auf dem Durchmesser der Hyperbel: denn die Ordinaten dieser drei Geraden werden gleich, wenn man

$$\delta x + \frac{p}{\delta} = 0 \text{ setzt, woraus } x = -\frac{p}{\delta^2}.$$

Dieser Werth ist derselbe, welcher Y (Nro. 242) bei Fig. 90 zum Minimum macht; die Asymptoten gehen also durch den Punkt O. Geht man zu Nro. 240 zurück, worauf sich Fig. 88 bezieht, und zieht aus der Mitte von HH' die Ordinate OE, so ist

$$AE = AB + \tfrac{1}{2}BB' = x' + \tfrac{1}{2}(x'' - x') = \tfrac{1}{2}(x' + x'');$$

x' und x'' sind aber die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + \frac{2p}{\delta^2}x + \frac{q}{\delta^2} = 0;$$

also ist die Summe $x' + x''$ gleich dem Coefficienten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen; somit

$$AE = \tfrac{1}{2}(x' + x'') = -\frac{p}{\delta^2}.$$

Dieser Werth beweist, daß für den Fall in Nro. 240 die Asymptoten der Hyperbel durch die Mitte O von HH' gehen.

Nachdem so der Punkt, wo die Asymptoten den Durchmesser schneiden, bekannt ist, setze man zur völligen Bestimmung derselben in ihren Gleichungen $x = 0$, dann ist

$$y = b \pm \frac{p}{2A\delta}.$$

Man trage daher auf der Axe der y (Fig. 88 und 90) oberhalb und unterhalb des Durchmessers die Abstände IT und IT' gleich $\frac{p}{2A\delta}$ an, und ziehe die Geraden OT, OT', so sind diese die Asymptoten.

**250.** Wenn in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grads der Coefficent von $y^2$ nicht Null ist, so enthalten die Werthe von y auch kein x als Divisor: sie können also nur durch einen unendlichen Werth von x unendlich werden; folglich gibt es dann keine mit den Ordinaten parallele Asymptote (Nro. 247).

Ist $A = 0$, so ist die Gleichung

$$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

woraus man, wie in Nro. 243, einen Werth für y erhält von der Form

$$y = rx + s + \frac{t}{Bx + D}.$$

Mittelst der allgemeinen Methode ließe sich wohl eine den y nicht parallele Asymptote, die durch die Gleichung $y = rx + s$ dargestellt ist, finden; es gibt aber eine andere Asymptote, die den y parallel ist, und die man nach dem in Nro. 247 Bemerkten erhält, wenn ein endlicher Werth von x vorhanden ist, der y unendlich macht. Nun hat der endliche Werth $x = -\frac{D}{B}$ diese Eigenschaft; es gibt also eine den y parallele Asymptote, welche eben diesen Werth zur Abscisse hat. Diese Resultate stimmen mit denen in Nro. 243 überein.

Man hätte die letzte Asymptote auch auf dem allgemeinen Wege mittelst der Verwandlung von x in y und y in x erhalten können. Näherer Erklärungen wird es hiebei wohl nicht bedürfen.

### Discussion der Parabel. $B^2 - 4AC = 0$.

**251.** Ist $B^2 - 4AC = 0$, so erhält man für die vom Durchmesser aus genommene Ordinate

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q}.$$

Sind nun p und q positiv, so gibt jeder positive Werth von x einen reellen Werth für Y, und wenn x von Null ins Unendliche wächst, so wächst Y von $\frac{\sqrt{q}}{2A}$ bis ins Unendliche. Daraus folgt, daß, wenn man auf der Axe Ay (Fig. 93) $IF = IF' = \frac{\sqrt{q}}{2A}$ oberhalb und unterhalb des Durchmessers anträgt, so muß die Parabel durch die Punkte F und F' gehen, und sie hat auf der Seite der positiven x zwei unendliche Bögen, wie FS und F'S'. Um die auf der Seite der negativen x liegenden Punkte zu erhalten, mache man $x = -z$, so ergibt sich

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{q - 2pz} = \frac{1}{2A}\sqrt{2p\left(\frac{q}{2p} - z\right)}.$$

Nun muß offenbar, wenn z von 0 bis $\frac{q}{2p}$ wächst, Y reell sein und bis auf Null abnehmen; wenn aber z größer wird, so ist Y imaginär. Man trage also $AB = \frac{q}{2p}$ auf der Seite Ax' an, und ziehe parallel mit Ay die Gerade BC, welche den Durchmesser in C trifft, so endigt sich die Parabel auf der Seite der negativen x in einem Bogen wie FCF'. Die Parabel hat somit nur einen einzigen aus zwei Schenkeln bestehenden Ast SCS', welche sich in der Richtung der positiven Abscissen ins Unendliche erstrecken, indem sie sich immer mehr vom Durchmesser entfernen, und dabei

gegen den Durchmesser hohl sind, da eine Gerade die Curve in nicht mehr als zwei Punkten (Nro. 199) treffen kann.

Ist p positiv und q Null, so hat die Parabel die Lage RIR'; und wenn p positiv und q negativ ist, so hat sie die Lage TDT'.

**252.** Ist p negativ, so nimmt die Curve eine umgekehrte Lage an, d. h. sie erstreckt sich in der Richtung der negativen x ins Unendliche. Die Figur 94 zeigt die Lage derselben, je nachdem q positiv, oder Null, oder negativ ist.

**253.** Wenn endlich $p = 0$ ist, so ist

$$Y = \frac{\sqrt{q}}{2A},$$

was zwei mit dem Durchmesser parallele und von demselben gleich entfernte Geraden ergibt, vorausgesetzt jedoch, daß q positiv ist. Diese Geraden fallen mit dem Durchmesser zusammen, wenn $q = 0$ ist. Sie sind imaginär, oder mit andern Worten, die Gleichung ist unmöglich, wenn q negativ ist.

**254.** Ist A Null, und B ebenfalls Null, so erhält man aus der allgemeinen Gleichung [A] folgende:

$$Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

welche auch noch zu dem Fall der Parabeln gehört (Nro. 231). Löst man sie nach x auf, so ist

$$x = -\frac{E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{-4CDy + E^2 - 4CF}.$$

Nimmt man nur den rationellen Theil $x = -\frac{E}{2C}$, so erhält man die Gleichung eines mit der Axe der y parallelen Durchmessers. Im Uebrigen lassen sich die vorhergehenden Folgerungen auch hier anwenden, wenn man nur überall x für y und y für x setzt.

Die Gleichung läßt sich auch nach y auflösen; dann ergibt sich

$$y = -\frac{C}{D}\left(x^2 + \frac{E}{C}x + \frac{F}{C}\right),$$

welcher Werth leicht zu discutiren ist.

**255.** Da sich die Parabel ins Unendliche erstreckt, so entsteht die Frage, ob sie Asymptoten habe. Fürs erste hat sie keine, die mit den Ordinaten parallel ist; denn für diese Curve ist

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q},$$

und es fällt in die Augen, daß kein endlicher Werth von x diese Werthe von y unendlich machen kann, was der Fall sein müßte, wenn sie mit den Ordinaten parallele Asymptoten hätte (Nro. 147).

Um zweitens zu finden, ob sie Asymptoten habe, die mit den Ordinaten nicht parallel sind, wenden wir die allgemeine Methode von Nro. 246 an. Nun ist

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}},$$

und wenn $x = +\infty$ gemacht wird, so ergibt sich die Grenze von $\frac{y}{x} = a$. Dieser Werth muß in der Gleichung der Asymptote der Coefficient von x sein, und er zeigt, daß, wenn die Parabel wirklich Asymptoten hat, sie mit dem Durchmesser parallel sind.

Nun hat man

$$y - ax = b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2px+q};$$

also ist die Grenze von $y - ax = \pm\infty$. Diese Grenze ist die Ordinate des Punktes, wo die Asymptote die Axe der y trifft. Um daher die Asymptoten der Parabel zu erhalten, müßte man mit dem Durchmesser Parallelen ziehen, die vom Anfangspunkt unendlich weit entfernt sind, was so viel heißt, als diese Curve habe gar keine Asymptoten.

## Anwendung der vorhergehenden Discussionen auf Zahlenbeispiele.

**256.** Beispiele, in welchen $B^2 - 4AC < 0$ ist.

Beispiel I (Fig. 95). $y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - 4y + 4x - 6 = 0$.

Vergleichen wir diese Gleichung mit der allgemeinen [A], so findet sich $B^2 - 4AC = -4$; wenn sie also eine Curve vorstellt, so kann diese nur eine Ellipse sein (Nro. 233). Es könnte jedoch der Fall sein, daß sie nur einen Punkt darstellte (Nro. 236), oder selbst, daß sie unmöglich wäre (Nro. 237). Um zu wissen, welcher von diesen drei Fällen stattfindet, löse man sie nach y auf, so erhält man

$$y = \tfrac{1}{4}x + 2 \pm \sqrt{-x^2 - 3x + 10};$$

dann setze man $-x^2 - 3x = 10$, woraus $x = 2$ und $x = -5$.

Da diese Wurzeln reell und ungleich sind, so folgt (Nro. 2[illegible] daß die Curve wirklich eine Ellipse ist, die zum Durchmesser die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 2$ hat, und diesen Durchmesser in zwei Punkten

schneidet, deren Abscissen + 2 und — 5 sind. Macht man in der Gleichung des Durchmessers $x = 0$, so ist $y = 2$, und setzt man $y = 0$, so ist $x = -8$. Man trage daher auf den Coordinaten-Axen

$$AI = 2 \text{ und } AI' = 8$$

an, und ziehe durch I und I' eine Gerade, so ist diese der Durchmesser. Ferner trage man $AB = 2$ und $AB' = 5$ auf der Abscissenaxe an, und ziehe durch B und B' Parallelen mit Ay, welche diesen Durchmesser in H und H' schneiden; so sind dieß die Punkte, wo die Curve den Durchmesser selbst schneidet.

Die Größe unter dem Wurzelzeichen läßt sich in $-(x-2)(x+5)$ oder in $(2-x)(x+5)$ zerlegen; indem wir nun unter Y wieder die vom Durchmesser aus genommene Ordinate verstehen, ist

$$Y = \sqrt{(2-x)(x+5)}.$$

Von A bis B ist die Abscisse x positiv und kleiner als 2; also ist Y reell. Die Abscisse $x = 0$ gibt $Y = \sqrt{10}$, und für $x = 2$ ist $Y = 0$. Nimmt man also $IF = IF' = \sqrt{10}$, so hat man einen Bogen der Ellipse, FHF'. Ueber den Punkt B hinaus ist die Abscisse x größer als 2 und Y wird imaginär; folglich erstreckt sich die Ellipse nicht über die Linie BH.

Um die auf der negativen Abscissenaxe liegenden Punkte zu erhalten, mache man $x = -z$; dann ist

$$Y = \sqrt{(2+z)(5-z)};$$

und es fällt in die Augen, daß innerhalb AB', wo z kleiner als 5, Y reell ist; aber über B' hinaus, wo z größer als 5 ist, wird Y imaginär. Daraus ergibt sich ein zweiter Bogen FH'F', der sich nicht über die Gerade B'H' erstreckt, und die Curve vollendet.

Wollte man die Punkte bestimmen, wo sie die Axe Ax schneidet, so würde man in der gegebenen Gleichung $y = 0$ setzen; dann hätte man $\frac{17}{16}x^2 + 4x - 6 = 0$, woraus sich die Abscissen der gesuchten Punkte ergeben.

Um die Grenze der Ellipse parallel mit dem Durchmesser HH' zu finden, beachte man (Nro. 235), daß die Summe der in dem Ausdrucke von Y enthaltenen Factoren gleich 7 ist, also ist das Maximum dieses Ausdrucks

$$Y = \sqrt{\tfrac{7}{2} \times \tfrac{7}{2}} = \tfrac{7}{2},$$

und der entsprechende Werth für x ergibt sich, wenn

$$2 - x = \tfrac{7}{2} \text{ gesetzt wird, woraus } x = -\tfrac{3}{2}.$$

Dieß ist die Abscisse der Mitte E von BB'; somit erhält man die gesuchten Grenzen, wenn man auf der mit den Ordinaten parallelen EO oberhalb und unterhalb des Durchmessers die Entfernungen $OG = OG' = \frac{7}{2}$ anträgt, und dann GK und G'K' parallel mit dem Durchmesser zieht. Löst

man die Gleichung der Curve nach x auf, so findet man einen andern Durchmesser und andere Grenzen.

Beispiel II (Fig. 96). $y^2 + 2xy + 5x^2 - 4x = 0$.

Aus dieser Gleichung erhält man

$$y = -x \pm 2\sqrt{x - x^2} = -x \pm 2\sqrt{x(1-x)}.$$

Unter dem Wurzelzeichen hat $x^2$ das Vorzeichen —, und setzt man $x - x^2 = 0$, so findet man $x = 0$, und $x = 1$; also stellt die Gleichung eine Ellipse vor.

Die Gleichung des Durchmessers ist $y = -x$; somit theilt er den Winkel xAy' in zwei gleiche Theile. Die Abscissen $x = 0$ und $AB = 1$ bestimmen die Punkte A und H, wo die Ellipse den Durchmesser schneidet.

Von $x = 0$ bis $x = 1$ ist der Wurzelwerth reell; über den Punkt B hinaus ist er imaginär; für die negativen Abscissen ist er auch imaginär. Also liegt die Ellipse zwischen den Parallelen Ay und BH.

Wird in der Gleichung $y=0$ gesetzt, so findet sich $x=0$ und $x=\frac{4}{5}$, welche Werthe die Punkte ergeben, wo die Curve die Axe der x trifft.

Der Werth von x, welcher den Wurzelwerth zum Maximum macht, ist $x = \frac{1}{2}$; dieses Maximum ist daher $2\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 1$, wodurch die Grenzen auf jeder Seite des Durchmessers bestimmt werden.

Beispiel III (Fig. 97). $y^2 - 2xy + 6x^2 - 2y - 28x + 46 = 0$.

Hieraus erhält man

$$y = x + 1 \pm \sqrt{-5x^2 + 30x - 45};$$

und indem man $-5x^2 + 30x - 45 = 0$ setzt, findet man beide Wurzeln gleich 3. Da indessen der Coefficient von $x^2$ negativ ist, so folgt daraus, daß die gegebene Gleichung blos einen Punkt darstellt (Nro. 236); denn die Werthe von y lassen sich auch so schreiben:

$$y = x + 1 \pm (x-3)\sqrt{-5};$$

folglich können sie offenbar nur für die einzige Abscisse $x = 3$ reell sein, welcher $y = 4$ entspricht.

In diesem Falle ist die gegebene Gleichung die Summe zweier Quadrate; denn es ist klar, daß sie vorerst auf folgende Form gebracht werden kann:

$$[y - x - 1 - (x-3)\sqrt{-5}]\,[y - x - 1 + (x-3)\sqrt{-5}] = 0;$$

oder auch, wenn man beachtet, daß die linke Gleichungsseite das Product aus der Summe und Differenz zweier Größen ist, auf

$$(y - x - 1)^2 + 5(x-3)^2 = 0.$$

In dieser Form sieht man wohl, daß ihr nur genügt werden kann, wenn man zugleich jedes der beiden Quadrate gleich Null setzt, was $x=3$ und $y=4$ gibt, wie oben.

Beispiel IV. $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 3 = 0.$

Hier ist $y = x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 2};$

nun setze man $-x^2 + 2x - 2 = 0$, woraus $x = 1 \pm \sqrt{-1}$, und da diese Wurzeln imaginär sind, so schließen wir, daß die gegebene Gleichung unmöglich ist (Nro. 237). Um dieses Resultat an der Gleichung selbst anschaulich zu machen, beachte man vorerst, daß

$$-x^2+2x-2=-(x-1-\sqrt{-1})\,(x-1+\sqrt{-1})=-(x-1)^2-1$$

ist und daher die gegebene Gleichung auf folgende führt:

$$[y-x-1-\sqrt{-(x-1)^2-1}]\,[y-x-1+\sqrt{-(x-1)^2-1}]=0,$$

oder auf

$$(y-x-1)^2+(x-1)^2+1=0;$$

welche Gleichung offenbar unmöglich ist; denn die Summe der drei Quadrate, von welchen eines eine constante Größe ist, kann nie zu Null werden, welchen reellen Werth man auch $x$ geben mag.

Beispiel V (Fig. 98). $y^2 + x^2 - 4y + 2x = 0.$

Man nehme an, die Axen seien rechtwinklig. Addirt man 4 zu den Gliedern $y^2 - 4y$, so erhält man das Quadrat von $(y-2)$, und addirt man 1 zu $x^2 + 2x$, so hat man das Quadrat von $(x+1)$; addirt man also auf beiden Seiten der Gleichung $4 + 1$ oder 5, so hat man

$$(y-2)^2 + (x+1)^2 = 5.$$

Die erste Seite dieser Gleichung drückt das Quadrat des Abstandes eines beliebigen Punktes M der Curve von dem Punkte O aus, dessen Coordinaten $x = -1$ und $y = 2$ sind (Nro. 219). Dieser Abstand ist also für alle Punkte der Curve gleich $\sqrt{5}$; folglich ist diese Curve eine Kreislinie, die O zum Mittelpunkt und $\sqrt{5}$ zum Halbmesser hat. Der Abstand AO ist der Halbmesser dieser Kreislinie; denn das Dreieck AOE gibt

$$AO = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Es ist überhaupt bemerkenswerth, wenn eine Gleichung des zweiten Grades, die das Rechteck $xy$ nicht enthält, und in welcher die Quadrate $x^2$ und $y^2$ denselben Coefficienten haben, auf rechtwinkligen Axen construirt werden soll, so kann diese Gleichung jedesmal wie die vorige behandelt werden, und sie stellt einen Kreis, oder einen Punkt vor, oder sie ist un-

möglich, je nachdem die zweite Gleichungsseite, nach Ergänzung der Quadrate positiv, Null oder negativ ist.

**257.** Beispiele, in welchen $B^2 - 4AC > 0$ ist.

Beispiel I (Fig. 99). $y^2+xy-2x^2-2y-2x+3=0.$

Diese Gleichung gibt $y = -\frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + x - 2}.$

Man construire zuerst den Durchmesser mittelst seiner Gleichung

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 1,$$

dann setze man

$$\tfrac{9}{4}x^2 + x - 2 = 0, \quad \text{woraus } x = -\tfrac{2}{9} \pm \tfrac{1}{9}\sqrt{76};$$

da nun diese Wurzeln reell und ungleich sind, und überdieß der Coefficient von $x^2$ unter dem Wurzelzeichen positiv ist, so weiß man gewiß, daß die gegebene Gleichung eine Hyperbel ist, die den Durchmesser schneidet (Nro. 240).

Nimmt man $AE = \frac{2}{9}$ auf der Seite der negativen x und trägt auf jeder Seite des Punktes E ein Stück gleich $\frac{1}{9}\sqrt{76}$ an, so erhält man die beiden Punkte B und B′, welche die vorigen Werthe von x zu Abscissen haben, und zieht man durch diese Punkte Parallelen mit der Axe Ay, so sind die Durchschnittspunkte H und H′ der Hyperbel und des Durchmessers bestimmt.

Der erste Werth von x ist positiv, der andere negativ; man bezeichne den einen mit x′, den andern mit $-x''$, dann erhält man für die vom Durchmesser aus genommene Ordinate

$$Y = \sqrt{\tfrac{9}{4}x^2+x-2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x^2+\tfrac{4}{9}x-\tfrac{8}{9}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{(x-x')\,(x+x'')}.$$

Von A nach B ist x positiv und kleiner als x′, also ist Y imaginär. Ueber B hinaus, wo x von x′ an bis ins Unendliche wächst, ist Y reell und wächst von Null an bis ins Unendliche, wodurch der Ast RHR′ der Hyperbel bestimmt wird.

Es sei $x = -z$, so ist

$$Y = \tfrac{3}{2}\sqrt{(z+x')\,(z-x'')}.$$

So lange z zwischen Null und x″ steht, ist Y imaginär; nimmt aber z von $z = x''$ an bis $z = \infty$ zu, so wird Y reell und wächst selbst von Null bis ins Unendliche, was den zweiten Ast SH′S′ gibt.

Um die Asymptoten dieser Hyperbel zu erhalten, muß man nach der am Ende von Nr. 248 gegebenen Regel das Binom $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ nehmen, dessen Quadrat wieder die beiden ersten Glieder $\frac{9}{4}x^2 + x$, die in den Werthen von y unter dem Wurzelzeichen enthalten sind, ergibt, und die Gleichungen der Asymptoten sind dann

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 1 \pm (\tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{3}).$$

Diese Geraden schneiden sich auf dem Durchmesser im Punkte O, für welchen $x = -\frac{2}{3}$ ist. Um für jede derselben einen zweiten Punkt zu erhalten, mache man $x = 0$, so reducirt sich der Theil $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, welcher das Vorzeichen $\pm$ hat, auf $\frac{1}{2}$. Man nehme daher auf jeder Seite des Durchmessers $IT = IT' = \frac{1}{2}$, und ziehe die KK' durch die Punkte O und T, und LL' durch O und T', so sind diese Linien die Asymptoten der Hyperbel.

**Beispiel II** (Fig. 100). $y^2 - 2xy - 2y - 2x - 4 = 0$.

Hier ist

$$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2+4x+5}.$$

Setzt man $x^2 + 4x + 5 = 0$, so findet man imaginäre Wurzeln; überdieß hat $x^2$ das Vorzeichen $+$ im Radikanden; also stellt die Gleichung eine Hyperbel vor, welche den Durchmesser nicht trifft (Nro. 242).

Es sei HH' der Durchmesser; nun ist die vom Durchmesser aus genommene Ordinate

$$Y = \sqrt{x^2+4x+5} = \sqrt{(x+2)^2+1},$$

und sie muß offenbar ein Minimum sein, wenn $x = -2$ ist, woraus $Y = 1$ sich ergibt. Man nehme also $AE = 2$, ziehe die Ordinate EO des Durchmessers und trage auf ihr $OG = OE = 1$ an, so sind G und E die Punkte der Hyperbel, welche dem Durchmesser am nächsten kommen: und wenn man daher EK und GK' parallel mit HH' zieht, so liegt die Curve ganz außerhalb dieser Parallelen.

Die Größe Y wächst von $x = -2$ bis $x = 0$, und von $x = 0$ bis $x = +\infty$; ebenso wächst sie von $x = -2$ bis $x = -\infty$. Also entfernen sich die beiden Aeste der Hyperbel von den Punkten E und G aus rechts und links immer weiter vom Durchmesser.

Macht man $x = 0$, so ist $Y = \sqrt{5}$, wodurch man die Punkte F und F' erhält, wo die Curve die Axe der y schneidet; und setzt man in der gegebenen Gleichung $y = 0$, so ist $x = -2$, was als Durchschnittspunkt der Curve mit der Axe der x den einzigen, schon gefundenen Punkt E gibt.

Was die Asymptoten betrifft, so sind ihre Gleichungen

$$y = x + 1 \pm (x + 2),$$

oder auch

$$y = 2x + 3, \text{ und } y = -1.$$

Die erste bestimmt die Gerade UU', welche die beiden Axen trifft, und die zweite gibt eine mit der Axe der x Parallele VV'. Es ließ sich übrigens bei näherer Betrachtung der gegebenen Gleichung voraussehen, daß die Hyperbel eine mit der Axe der x parallele Asymptote habe, da das Quadrat dieser Veränderlichen nicht in der Gleichung vorkommt (Nro. 244).

Beispiel III. $y^2 - 2xy - 2y + 4x = 0.$

Woraus $y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 1};$

setzt man $x^2 - 2x + 1 = 0$, so erhält man zwei gleiche Wurzeln gleich 1. Also hat man statt einer Hyperbel zwei sich schneidende Geraden (Nro. 241) mit den Gleichungen

$$y = 2x, \text{ und } y = 2.$$

Die gegebene Gleichung läßt sich daher in zwei rationale Factoren zerlegen, und also schreiben:

$$(y - 2x)\,(y - 2) = 0;$$

unter dieser Form sieht man leicht ein, warum sie zwei gerade Linien vorstellt.

Beispiel IV (Fig. 101). $x^2 - 2xy - 2x + 4y - 1 = 0.$

Da $y^2$ fehlt, so bezieht sich diese Gleichung auf den in Nro. 243 behandelten Fall. Sucht man zuerst den Werth für y, und führt die Division aus, so erhält man

$$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 4} = \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{2\,(2 - x)}.$$

Construiren wir die Gerade HH', deren Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ ist, und setzen

$$V = \frac{1}{2\,(2 - x)}.$$

Für $x = 0$ ist nun $V = \frac{1}{4}$; also muß man oberhalb und unterhalb der Geraden HH' die Entfernung $AC = \frac{1}{4}$ antragen. Läßt man x von 0 bis 2 wachsen, so wächst V positiv bis ins Unendliche; nimmt man daher $AB = 2$ und zieht durch den Punkt B mit der Axe der y die Parallele LL', so erhält man für die Curve einen unendlichen Schenkel CR, dessen Asymptote OL ist.

Ist x größer als 2, so schreiben wir V auf folgende Weise:

$$V = -\frac{1}{2\,(x - 2)}.$$

Hier wächst offenbar, wenn man die Abscisse bis $x = 2$ abnehmen läßt, V bis $-\infty$, und läßt man x bis ins Unendliche wachsen, so nimmt V bis Null ab; also hat die Curve einen Ast, wie TT', dessen Asymptoten OL' und OH sind.

Setzen wir $x = -z$, so ist

$$V = \frac{1}{2\,(2 + z)}.$$

Diese Größe bleibt positiv und nimmt ab von $V = \frac{1}{4}$ bis $V = 0$, wenn z von 0 bis ins Unendliche wächst: daraus ergibt sich der unendliche Schenkel CR', der die Verlängerung von CR ist und OH' zur Asymptote hat.

Beispiel V (Fig. 102). $x^2+3xy+2y+2x+\frac{8}{9} = 0.$

Diese Gleichung gibt

$$y = \frac{-x^2-2x-\frac{8}{9}}{3x+2} = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{9},$$

und dieser Werth zeigt eine Gerade BC an, welche die beiden Axen schneidet. Die gegebene Gleichung bestimmt aber auch eine mit der Axe der y parallele Gerade DE; denn daraus, daß die Division vollständig ausgeführt werden konnte, folgt, daß $3x + 2$ ein Factor der Gleichung ist; also wird ihr genügt, indem man $3x + 2 = 0$ oder $x = -\frac{2}{3}$ setzt, was eine mit den Ordinaten parallele Gerade ergibt.

Beispiel VI (Fig. 103). $xy+2y+3x-2 = 0.$

Hieraus ergibt sich

$$y = \frac{-3x+2}{x+2} = -3 + \frac{8}{x+2};$$

eine leicht vorzunehmende Discussion bestimmt eine Hyperbel, wie die Figur anzeigt, mit ihren zwei Asymptoten HH' und KK', die mit den Axen parallel sind und $y = -3$, $x = -2$ zu Gleichungen haben.

**258.** Beispiele, in welchen $B^2 - 4AC = 0$ ist.

Beispiel I (Fig. 104). $y^2+2xy+x^2+4y+3x+3 = 0.$

Diese Gleichung gibt

$$y = -x - 2 \pm \sqrt{x+1};$$

und da der Wurzelwerth die erste Potenz von x ohne $x^2$ enthält, so muß sie eine Parabel vorstellen (Nro. 251). Der Durchmesser ist durch die Gleichung $y = -x - 2$ gegeben; er trifft die Axen in zwei Punkten I und I', in den Abständen $AI = 2$, und $AI' = 2$.

Läßt man x von Null bis ins Unendliche positiv wachsen, so bleibt der Wurzelwerth $\sqrt{x+1}$ reell und wächst von der Einheit an ins Unendliche. Dadurch sind die Schenkel FS und F'S' bestimmt, welche die Axe der y in den Punkten F und F', die mit $IF = IF' = 1$ construirt wurden, schneiden.

Wenn x negativ bis zur Einheit wächst, so nimmt $\sqrt{x+1}$ bis Null ab; nimmt man also $AB = 1$ und zieht BC parallel mit Ay, so schneidet

diese Parallele den Durchmesser im Punkte C, wo die beiden Schenkel der Parabel zusammentreffen. Ueber BC hinaus gehen sie nicht; denn die negativen Abscissen, welche $> 1$ sind, machen den Wurzelwerth imaginär.

Die Parabel schneidet die Axe der x nicht; denn setzt man in der gegebenen Gleichung $y = 0$, so ist $x^2 + 3x + 3 = 0$, woraus man imaginäre Werthe erhält, $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$.

Beispiel II (Fig. 105). $y^2+2xy+x^2-4y-3x+4 = 0$.

Hieraus ergibt sich $y = -x + 2 \pm \sqrt{-x}$;

dann hat die Parabel und ihr Durchmesser eine Lage, wie in der Figur.

Beispiel III (Fig. 106). $x^2-3x+2y+1 = 0$.

Diese Gleichung läßt sich zwar nach y auflösen; man kann sie aber auch, wie in den vorigen Beispielen behandeln, indem man durchweg x in y und y in x verwandelt: so erhält man den Durchmesser HH′ und die Parabel SCS′.

Beispiel IV. $y^2-2xy+x^2+2y-2x-3 = 0$.

Man hat $y = x - 1 \pm \sqrt{4} = x - 1 \pm 2$;

das heißt $y = x + 1$ und $y = x - 3$.

Diese Werthe bestimmen zwei parallele Linien. In diesem Fall besteht die erste Seite der Gleichung aus dem Product zweier Factoren

$$(y - x - 1) \text{ und } (y - x + 3).$$

Beispiel V. $y^2-2xy+x^2-2y+2x+1 = 0$.

Da diese Gleichung für y zwei gleiche Werthe $x+1$ gibt, so ist die erste Seite derselben das Quadrat von $(y-x-1)$, und sie bestimmt nur eine einzige Gerade, die $y = x + 1$ zur Gleichung hat.

Beispiel VI. $y^2+2xy+x^2+y+x+1 = 0$.

Hier ist $y = -x - \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$,

und da diese Werthe imaginär sind, so folgt daraus, daß die Gleichung unmöglich ist. Wirklich läßt sie sich auf $(y+x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = 0$ bringen, und in dieser Form ersieht man sogleich, daß sie unmöglich ist.

# Siebentes Kapitel.

## Vereinfachung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades.

### Wegschaffung der Glieder des ersten Grads.

**259.** Um die Eigenschaften der Curven des zweiten Grads leichter zu erkennen, ist es zweckmäßig, ihre Gleichung möglichst einfach auszudrücken, und das zur Ausführung dieser Reduction angewandte Verfahren verdient eine sorgfältige Beachtung. Es besteht darin, daß man das Coordinaten-System ändert, ohne vorher für die Größen, welche zur Bestimmung der neuen Axenlage dienen, irgend einen besondern Werth anzunehmen. Dadurch bringt man in die umgeformte Gleichung unbestimmte Größen, die man nachher dazu verwendet, um einige Glieder dieser Gleichung wegzuschaffen.

Die allgemeinste Umformung wäre, den Ursprung und die Richtung der Axen zugleich zu ändern; es kommt jedoch auf dasselbe hinaus, wenn man diese Aenderungen nach einander vornimmt. Auf diese Weise stellt sich der jeder Verwandlung eigenthümliche Einfluß besser heraus, und die Rechnung wird weniger verwickelt.

**260.** Es sei nun die allgemeine Gleichung

$$[A] \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

und man wolle andere, den vorigen parallele Axen nehmen, die aber durch irgend einen Ursprung gehen. Zu diesem Ende setze man in [A]

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

wo a und b die Coordinaten dieses Ursprungs, und x', y' die neuen veränderlichen Coordinaten sind. Durch diese Substitution wird die Gleichung in folgende umgeformt:

$$[B] \qquad Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+D'y'+E'x'+F' = 0,$$

in welcher der Abkürzung wegen

$$D'=2Ab+Ba+D, \quad E'=2Ca+Bb+E,$$
$$F'=Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F$$

gesetzt wurde.

Beachten wir die Zusammensetzung der umgeformten Gleichung [B]: 1) die Coefficienten der Glieder des zweiten Grades haben sich nicht verändert. 2) Die Coefficienten D' und E' von y' und x' erhält man, indem man aus der ersten Seite der ursprünglichen Gleichung [A] die nach y und nach x abgeleitete Polynome bildet, und darin für x und y die Coordinaten a und b des neuen Ursprungs setzt. 3) Der constante Theil F' ergibt sich endlich, wenn man in der ersten Seite der Gleichung [A] a und b für x und y setzt.

Kehren wir nun zur Gleichung [B] zurück und benützen die Unbestimmtheit von a und b, um die Glieder des ersten Grades wegzuschaffen.

Man setze deßhalb

$$[1] \qquad 2Ab + Ba + D = 0, \quad 2Ca + Bb + E = 0;$$

so ergeben sich aus diesen Gleichungen folgende Werthe für a und b:

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \qquad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

Für die Ellipsen oder Hyperbeln ist der Nenner $B^2 - 4AC$ nicht Null (Nro. 233): Diese Werthe sind also weder unendlich groß noch unbestimmt; versetzt man daher den Anfangspunkt in den durch sie bestimmten Punkt, so verliert die Gleichung [B] wirklich die mit x' und y' behafteten Glieder. Dieser Punkt ist der einzige, dem diese Eigenschaft zukommt; denn die Gleichungen [1] lassen keine zwei Auflösungen zu.

Für die Parabeln ist diese Vereinfachung unmöglich; denn es ist dann

$$B^2 - 4AC = 0,$$

und die Werthe für a und b werden unendlich.

Ist aber ferner einer der Zähler, z. B. $2AE - BD$, zugleich Null mit $B^2 - 4AC$, so machen diese beiden Voraussetzungen auch den andern Zähler zu Null, und die Werthe von a und b werden unbestimmt. Dann weiß man, daß die Gleichungen [1] in einander fallen, oder was dasselbe ist, die dadurch dargestellten Geraden bilden nur eine einzige; somit gibt es unendlich viele Anfangspunkte, die alle auf dieser Linie liegen, und

durch welche die Glieder des ersten Grades weggeschafft werden können. Dann stellt auch die Gleichung [A] keine Curve mehr vor; denn die allgemeinen aus ihr abgeleiteten Werthe von y sind

$$y=\frac{-Bx-D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF},$$

und vermöge der doppelten Voraussetzung

$$B^2-4AC=0 \text{ und } 2AE-BD=0,$$

verwandeln sie sich in folgende:

$$y=\frac{-Bx-D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF}.$$

Diese Werthe geben aber nur noch zwei parallele Gerade, die in gewissen Fällen sich auf eine einzige reduciren, oder selbst imaginär werden können.

Somit sind die Ellipsen und Hyperbeln die einzigen Curven, deren Gleichung sich auf die Form

$$[C] \qquad Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+F'=0$$

bringen läßt.

**261.** Man könnte glauben, wenn der Anfangspunkt und die Richtung der Axen zugleich geändert würden, so ließen sich die Glieder des ersten Grads, in Fällen, wo die bloße Aenderung des Ursprungs nicht genügt, leicht wegschaffen. Dieser Irrthum läßt sich indessen leicht beseitigen. Angenommen, eine solche Umformung habe wirklich diese Vereinfachung bewirkt und die Gleichung [C] ergeben. Man setze für die letzten Axen andere, die denselben Ursprung haben wie sie, aber mit den ursprünglichen Coordinaten x und y parallel sind. Die in der letzten Gleichung [C] zu substituirenden Werthe sind von der Form

$$x'=mx''+ny'', \quad y'=m'x''+n'y'',$$

und es fällt in die Augen, daß sich kein Glied des ersten Grads wieder ergeben wird. Daraus folgt, daß die Glieder des ersten Grades gleichfalls verschwunden sein würden, wenn man gleich Anfangs vom ersten Ursprung zum zweiten übergegangen wäre, ohne die Richtung der ersten Axen zu ändern; somit hat die Richtung der Axen keinen Einfluß auf das Verschwinden dieser Glieder.

## Wegschaffung des Rechtecks.

**262.** In dem Vorhergehenden hatten die Coordinaten der Gleichung [A] eine beliebige Richtung. Nehmen wir in Folgendem an, sie

seien rechtwinklig; wären sie es nicht, so könnte man sie durch eine einfache Axenumformung in solche verwandeln.

Nun suche man das Product der Coordinaten wegzuschaffen, indem man neue, ebenfalls rechtwinklige Axen wählt. Der Ursprung braucht nicht verändert zu werden; denn wenn dieses Product durch Versetzung desselben in irgend einen andern Punkt verschwindet, so muß diese Vereinfachung auch für jeden andern Ursprung stattfinden, wenn nur bei der Versetzung der neuen Axen parallel mit sich selbst die Glieder des zweiten Grades sich nicht ändern (Nro. 260), und somit das Product nicht mehr zum Vorschein kommen kann. Man nehme daher die Formeln [4] in Nro. 191, welche dazu dienen, um von rechtwinkligen Axen zu andern rechtwinkligen Axen überzugehen, und mache darin $a = 0$, $b = 0$, so ist

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha;$$

und setzt man diese Werthe in die Gleichung [A], so wird sie in folgende umgeändert:

$$[D] \qquad My'^2 + Kx'y' + Nx'^2 + Ry' + Sx' + F = 0,$$

in welcher $M$, $K$, $N$, $R$, $S$ die unbestimmte Größe $\alpha$ enthalten.

Damit das mit dem Rechteck $x'y'$ behaftete Glied verschwinde, muß die Gleichung $K = 0$ für $\alpha$ einen reellen Werth ergeben. Entwickelt man nun die Rechnungen, soweit dieß nöthig ist, um $K$ zu erhalten, so findet sich:

$$K = 2\,(A - C)\,\sin \alpha\, \cos \alpha + B\,(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Um daher $\alpha$ zu kennen, ist die aufzulösende Gleichung

$$2\,(A - C)\,\sin \alpha\, \cos \alpha + B\,(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0.$$

Aus der Trigonometrie (Nro. 29) hat man aber

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha, \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha;$$

somit ergibt sich für die Gleichung $K = 0$

$$(A - C)\,\sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = 0,$$

woraus

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{-B}{A - C}.$$

Da der Tangente alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ beigelegt werden können, so folgt daraus, daß $2\alpha$ immer reell ist. Dieser Bogen kann vier Werthe haben: denn da $\alpha$ zwischen 0 und $360^0$ enthalten sein muß (Nro. 194), so ist $2\alpha$ zwischen 0 und $360^0 \times 2$ enthalten, und wenn wir einen Bogen, der kleiner als $180^0$ ist, mit $2\alpha'$ bezeichnen, welcher der obigen Tangente entspricht, so gibt es zwischen 0 und $360^0 \times 2$ vier Bögen, welche dieselbe Tangente enthalten (Nro. 16), nämlich:

$$2\alpha', \quad 2\alpha' + 180^0, \quad 2\alpha' + 2 \cdot 180^0, \quad 2\alpha' + 3 \cdot 180^0;$$

also hat auch $\alpha$ vier Werthe

$$\alpha', \quad \alpha' + 90^0, \quad \alpha' + 2 \cdot 90^0, \quad \alpha' + 3 \cdot 90^0.$$

Die beiden ersten bestimmen zwei Gerade unter einem rechten Winkel, und die letzten bestimmen die Verlängerungen derselben. Offenbar muß, wenn eine dieser Geraden zur Axe der x' genommen wird, die andere die der Axe y' sein. Dabei ist nicht zu vergessen, daß der Ursprung nicht verändert wurde, und er irgend eine Lage einnimmt: dann läßt sich schließen, daß es um jeden Ursprung herum ein System rechtwinkliger Axen gibt, mit welchen das Rechteck x'y' verschwindet, oder die Gleichung der zweiten Ordnung auf die Form

$$[E] \qquad My'^2 + Nx'^2 + Ry' + Sx' + F = 0$$

reducirt wird, und im Allgemeinen gibt es nur eine einzige.

**263.** Es ist indessen der Fall hier noch besonders zu beachten, wo $B = 0$ und zugleich $A = C$ ist; in diesem Fall läßt sich die Gleichung [A] so schreiben:

$$y^2 + x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0;$$

und sie stellt dann offenbar einen Kreis vor (Nro. 256, Beisp. V). Dann ist auch tang $2\alpha$ unbestimmt, oder vielmehr der Coefficient K ist selbst Null, und dieß beweist, daß man zwei beliebige rechtwinklige Axen nehmen kann, ohne das Rechteck aus den Coordinaten in der Gleichung zu reduciren. Diese Folgerung stimmt mit Nro. 186 überein, wo wir gesehen haben, daß die allgemeine, auf rechtwinklige Axen bezogene Gleichung des Kreises das Rechteck xy nicht enthält.

**264.** Je nachdem die ursprüngliche Gleichung [A] eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vorstellt, ist die Größe $B^2 - 4AC$ negativ, positiv oder Null. Nun ist $-4MN$ die aus der Gleichung [E] erhaltene analoge Größe; also müssen die Coefficienten M und N bei der Ellipse dasselbe, und bei der Hyperbel verschiedene Vorzeichen haben. Bei der Parabel muß einer dieser Coefficienten Null sein; beide können es übrigens nicht sein, sonst würde die Gleichung [E] nicht mehr zum zweiten Grade gehören.

### Reduction der allgemeinen Gleichung.

**265.** Kommen nur die Ellipsen und Hyperbeln in Betracht, so kann man zuerst, wie eben erklärt wurde, die Glieder des ersten Grades durch Versetzung des Ursprungs (Nro. 260), und dann durch die Wahl neuer rechtwinkliger Axen das Rechteck der Veränderlichen (xy) wegschaffen; oder man kann auch, wenn man es vorzieht, zuerst die Richtung der Axen

und dann den Ursprung verändern. Durch dieses doppelte Verfahren wird die Gleichung der Curve jedesmal auf die Form gebracht:

[F] $$My^2 + Nx^2 = P,$$

wo x und y die letzten Coordinaten bezeichnen.

Bei der Ellipse haben M und N dasselbe Vorzeichen, und wenn

$$\frac{N}{M} = m^2, \quad \frac{P}{M} = p$$

gesetzt wird, so läßt sich die Gleichung auch so schreiben:

$$y^2 + m^2x^2 = p.$$

Bei der Hyperbel, wo M und N einander entgegengesetzte Vorzeichen haben, setze man

$$\frac{N}{M} = -m^2, \quad \frac{P}{M} = p;$$

dann heißt die Gleichung

$$y^2 - m^2x^2 = p.$$

**266.** Gleichungen von dieser Form sind für die Parabeln nicht anwendbar: denn die Gleichung für diese Curven kann die beiden Glieder des ersten Grads nie verlieren (Nro. 260); man kann aber das Rechteck wegschaffen, und dann verschwindet sogar auch eines der Quadrate (Nro. 264). Angenommen, dieß sei das Quadrat $x'^2$, so ist die Gleichung der Parabeln

[G] $$My'^2 + Ry' + Sx' + F = 0.$$

Man nehme nun neue, mit denen der x' und y' parallele Axen, und beziehe die Curve darauf; zu diesem Zweck setze man in der Gleichung [G]

$$x' = x'' + a, \quad y' = y'' + b;$$

so kommt das Rechteck x''y'' nicht mehr vor, und durch die Einführung zweier unbestimmten Größen a und b kann man zwei weitere Glieder wegschaffen. Bei der Substitution erhält man

[H] $$My''^2 + Sx'' + (2Mb + R)y'' + Mb^2 + Rb + Sa + F = 0,$$

in welcher Gleichung der mit y'' behaftete und der von den Veränderlichen unabhängige Theil die einzigen Glieder sind, welche die unbestimmten Größen a und b enthalten. Diese beiden Theile lassen sich wegschaffen, indem man

$$2Mb + R = 0, \quad \text{und} \quad Mb^2 + Rb + Sa + F = 0$$

setzt, woraus

$$b = \frac{-R}{2M}, \qquad a = \frac{-Mb^2 - Rb - F}{S}.$$

Da M nicht Null ist, so ist b nicht unendlich groß, und da man annehmen darf, daß S nicht Null ist, so ist auch a nicht unendlich. Denn wenn S Null wäre, so würde die Gleichung [G] kein x' mehr enthalten, und wenn man sie nach y' auflösen würde, so würde sie zwei constante Werthe enthalten; also würde die gegebene Gleichung keine krumme Linie mehr vorstellen, und deßhalb kann der besondere Fall, wo S Null ist, nicht stattfinden.

Nun ist klar, wenn der Ursprung in den Punkt versetzt wird, der die vorigen Werthe für a und b zu Coordinaten hat, so verwandelt sich die letzte umgeformte Gleichung [H] in folgende:

[I] $$My''^2 + Sx'' = 0,$$

oder auch, wenn man die Accente wegläßt und $-\frac{S}{M} = 2p$ setzt, in

$$y^2 = 2px,$$

welches die Gleichung der Parabel in ihrer einfachsten Form ist.

**267.** Fassen wir das Vorige zusammen, so erhellt, daß bei passender Wahl des Ursprungs und der Axenrichtung die Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln sich durch folgende Gleichungen darstellen lassen:

[a] $y^2+m^2x^2=p$, [b] $y^2-m^2x^2=p$, [c] $y^2=2px$,

und daß diese Gleichungsformen nur für ein einziges System rechtwinkliger Axen (den Fall für den Kreis ausgenommen), stattfinden.

## Vom Mittelpunkt und den Axen.

**268.** Aus diesen Gleichungen ergeben sich einige beachtungswerthe Eigenschaften. Erstens folgt daraus, da [a] und [b] die Glieder des ersten Grades nicht enthalten, daß der Ursprung ein Mittelpunkt ist. Wir müssen jedoch die Sache näher erörtern.

Mittelpunkt einer Curve heißt der Punkt, der alle Geraden halbirt, welche durch diesen Punkt gehen und zwei Punkte der Curve mit einander verbinden. Aus dieser Erklärung ergibt sich folgender Lehrsatz:

Wenn der Ursprung der Coordinaten im Mittelpunkt einer Linie der zweiten Ordnung liegt, so kommen die Glieder des ersten Grades in der Gleichung dieser Linie nicht vor, und umgekehrt, wenn die Glieder des ersten Grades in der Gleichung einer Linie zweiter Ordnung nicht vorkommen, so ist der Ursprung zugleich der Mittelpunkt dieser Curve.

Um dieß zu beweisen, nehme man an, die durch die allgemeine Gleichung

$$[A] \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

dargestellte Curve habe einen Mittelpunkt, und derselbe liege im Ursprung der Coordinaten. Nun ist die Gleichung jeder durch diesen Punkt gezogenen Geraden $y = ax$; um die Abscissen für die Durchschnittspunkte der Geraden mit der Curve zu erhalten, muß man in der Gleichung [A] $y = ax$ setzen. Dadurch erhält man die Gleichung:

$$(Aa^2 + Ba + C)\,x^2 + (Da + E)\,x + F = 0,$$

deren Wurzeln die gesuchten Abscissen sind. Da nun MN (Fig. 107) der zwischen der Curve enthaltene Theil der Geraden ist, so muß AN = AM sein; zieht man daher die Ordinaten MP und NQ, so sind die Dreiecke AMP und ANQ congruent, also ist AQ = AP, d. h. die diese Abscissen ergebende Gleichung hat gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen; somit muß $Da + E = 0$ sein. Diese Gleichung muß aber für jeden Werth von a stattfinden; man hat also einzeln $D = 0$, $E = 0$; folglich dürfen die Glieder des ersten Grades nicht in der Gleichung (A) vorkommen.

Hat man umgekehrt $D = 0$ und $E = 0$, so enthält die Gleichung, welche x ergibt, zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen; woraus folgt, daß die Dreiecke APM und AQN congruent sind, und folglich jede durch den Ursprung gehende Sehne MN in demselben halbirt wird: d. h. der Ursprung ist ein Mittelpunkt.

Damit also eine Curve zweiter Ordnung einen Mittelpunkt erhalte, muß man die Axen parallel mit sich selbst in einen Ursprung versetzen, der die Glieder des ersten Grades zum Verschwinden bringt; dann ist dieser Ursprung der Mittelpunkt. Diese Umformung ist aber bei den Parabeln unmöglich, und bei den Ellipsen und Hyperbeln (Nro. 260) kann sie nur auf *eine* Art stattfinden; also haben die Ellipsen und Hyperbeln einen einzigen Mittelpunkt, die Parabeln aber keinen.

**269.** Nach der Erklärung in Nro. 227 ist ein *Durchmesser* eine Gerade, welcher eine Reihe von parallelen Sehnen halbirt. Daraus folgt, wenn eine der Coordinaten, z. B. y, bei der Gleichung einer Curve zweiter Ordnung nur im Quadrat vorkommt, so ist die Axe, mit welcher die andere Coordinate parallel lauft, ein Durchmesser. Denn es fällt in die Augen, daß die Werthe von y für jede Abscisse einander gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben: also halbirt die Axe der x die mit der Axe der y parallelen Sehnen, und ist somit ein Durchmesser.

Steht ein Durchmesser senkrecht auf den von ihm halbirten Sehnen, so ist er eine *Axe der Curve* (Hauptdurchmesser); der in der Curve enthaltene Theil derselben heißt die *Länge* dieser Axe, und ihre Durchschnittspunkte mit der Curve heißen *Scheitel*.

Die Linie, auf welcher in den Gleichungen [a], [b], [c] die Abscissen x genommen werden, ist also ein Durchmesser und auch eine Curven-Axe (Hauptdurchmesser). Ebenso ist die Axe der y eine Axe der durch die beiden ersten Gleichungen gegebenen Ellipse und Hyperbel; aber nicht für die durch die dritte Gleichung gegebene Parabel, weil hier x im ersten Grade vorkommt. Wir werden später sehen, daß die hier besprochenen Axen die einzigen sind, welche bei Curven der zweiten Ordnung vorkommen.

### Entwicklung der Rechnungen, welche auf die umgeformten Gleichungen [F] und [I] führen.

**270.** Wir haben uns bei diesem Kapitel die Aufgabe gestellt, die einfachste Form der Gleichungen für Curven der zweiten Ordnung zu finden. Es war dabei viel wichtiger, die Möglichkeit der Umformungen einzusehen, als sie auszuführen; deßhalb wurden die einzelnen Rechnungen, welche die Erreichung des erstrebten Zieles verzögert hätten, vorläufig übergangen: diese Auslassung soll nun ergänzt werden.

Nehmen wir zuerst an, die Gleichung

[A] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

stelle eine Ellipse oder Hyperbel vor, und entwickeln wir die Rechnungen, wodurch sie mit rechtwinkligen Axen auf die Form [F] $My^2 + Nx^2 = P$ gebracht wird. Die Auflösung der Aufgabe geschieht, wie schon bemerkt (Nro. 265) mittelst zweier Axen-Umformungen.

Erste Umformung (Nro. 260). Man schafft die Glieder des ersten Grades weg, was durch die Versetzung des Ursprungs in den Mittelpunkt bewirkt wird, und erhält dadurch folgende umgeformte Gleichung:

[C] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0.$$

Die Coefficienten A, B, C sind dieselben wie in [A]; die Coordinaten des Mittelpunkts sind bestimmt durch die Gleichungen

[1] $$2Ab + Ba + D = 0, \quad 2Ca + Bb + E = 0;$$

und man hat

$$F' = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F.$$

Dieser Werth von F' läßt sich vereinfachen; denn wenn man die Gleichungen [1], die erste mit b, die zweite mit a multiplicirt und beide zusammen addirt, so ist

$$2Ab^2 + 2Bab + 2Ca^2 + Db + Ea = 0,$$

woraus

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 = -\frac{Db + Ea}{2},$$

also

$$F' = F + \frac{Db + Ea}{2}.$$

Stellt man hier die Werthe für a und b (Nro. 260) mit denen für F' zusammen, so erhält man die Elemente der ersten Umformung, nämlich:

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad F' = F + \frac{Db + Ea}{2}.$$

Zweite Umformung. Ehe diese vorgenommen wird, sollte man die Coordinaten rechtwinklig machen, wenn sie es nicht schon sind. Man nehme indessen an, sie seien es schon in der Gleichung [C], und suche sogleich neue rechtwinklige Axen, wodurch das Product xy verschwindet, so daß die sich ergebende Gleichung die verlangte Form bekomme:

[F] $$My^2 + Nx^2 = P.$$

Zu dem Ende setzt man in [C] $x \cos\alpha - y \sin\alpha$ für x, und $x \sin\alpha + y \cos\alpha$ für y, und bestimmt $\alpha$ mittelst der Bedingung, daß der Coefficient von xy Null sein muß. Dadurch ergab sich (Nro. 262)

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{-B}{A - C},$$

woraus man leicht erhält Nro. 25

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2 2\alpha}} = \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}},$$

$$\sin 2\alpha = \cos 2\alpha \text{ tang } 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}}.$$

In diesen Werthen hat der Wurzelwerth das Vorzeichen $\pm$, weil man jede der neuen Axen als Abscissen-Axe nehmen kann; um jedoch alle Zweideutigkeit zu vermeiden, füge man dem Wurzelwerth überall das positive Vorzeichen bei, oder was dasselbe ist, man gebe $\sin 2\alpha$ das entgegengesetzte Vorzeichen von B.

Nun berechne man die Coefficienten M, N, P; hier erhält man durch die Substitution der Formeln $x\cos\alpha - y\sin\alpha$ und $x\sin\alpha + y\cos\alpha$ in der Gleichung [C] sogleich

$$M = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$
$$N = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$
$$P = -F';$$

hieraus ergibt sich als Summe $M + N$ und als Differenz $M - N$

$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A-C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2B \sin\alpha \cos\alpha$$
$$= (A-C)\cos 2\alpha - B \sin 2\alpha$$
$$= \frac{B^2+(A-C)^2}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}} = \sqrt{B^2+(A-C)^2};$$

woraus man leicht die Werthe von M und N erhält; fügt man die von tang $2\alpha$ und P hinzu, so hat man alle Elemente der zweiten Umformung, nämlich:

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{-B}{A-C}$$
$$M = \tfrac{1}{2}(A + C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2+(A-C)^2}$$
$$N = \tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2+(A-C)^2}$$
$$P = -F';$$

wobei nicht zu vergessen ist, daß sin $2\alpha$ das entgegengesetzte Vorzeichen von B hat.

**271.** Nehmen wir jetzt an, die Gleichung [A] stelle eine Parabel vor, und man wolle sie mit Beibehaltung der rechtwinkligen Coordinaten auf die Form (I) $My^2 + Sx = 0$ bringen. In diesem Falle schafft man zuerst das Rechteck mittelst der Veränderung der Axenrichtung wegen, und versetzt dann den Ursprung.

Erste Umformung. Sie führt (Nro. 266) auf die Gleichung

[G] $$My^2 + Ry + Sx + F = 0.$$

Die ursprünglichen Axen werden rechtwinklig angenommen, und die neuen sind es auch; der Winkel $\alpha$, der ihre Lage bestimmt, ist durch dieselbe Formel wie in Nro. 270 gegeben. Auch für M und N hat man dieselben Formeln; da aber bei der Parabel $B^2 = 4AC$ ist, so werden sie bedeutend einfacher.

Erstens ist $\sqrt{B^2+(A-C)^2} = \pm(A + C)$. In Betreff des Vorzeichens $\pm$ ist zu bemerken, daß man A in der Gleichung [A] immer positiv nehmen kann, dann ist wegen der Gleichung $B^2 = 4AC$ auch C positiv; nimmt man also den Wurzelwerth immer positiv, so ist

$$\sqrt{B^2+(A-C)^2} = A + C.$$

Folglich erhält man

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{-B}{A-C}, \quad \cos 2\alpha = \frac{A-C}{A+C}, \quad \sin 2\alpha = \frac{-B}{A+C},$$
$$M = A + C, \quad N = 0.$$

Man sieht, wie es zu erwarten stand, daß mit dem Verschwinden des Rechtecks auch eines der Quadrate (Nro. 264) verschwindet.

Um ferner R und S zu berechnen, setzt man in (A) $x\cos\alpha - y\sin\alpha$ für x, und $x\sin\alpha + y\cos\alpha$ für y, so ist

$$R = D\cos\alpha - E\sin\alpha, \quad S = D\sin\alpha + E\cos\alpha.$$

Aber nach (Nro. 31) ist

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{C}{A+C}},$$

und

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{-B}{2\sqrt{C(A+C)}};$$

also ist

$$R = \frac{-2CE - BD}{2\sqrt{C(A+C)}}, \qquad S = \frac{2CD - BE}{2\sqrt{C(A+C)}}.$$

Es wurde hier $\sin\alpha$ positiv genommen, weil man die Seite der positiven x so wählen kann, daß $\alpha < 180^0$ wird. Was $\cos\alpha$ betrifft, so hat diese Größe das entgegengesetzte Vorzeichen von B.

Zweite Umformung. Mittelst dieser ist noch der Ursprung zu versetzen. Man nehme für x und y in [G] $x + a$ und $y + b$; dann setze man den Coefficienten von y und den constanten Theil gleich Null, so ist

$$2Mb + R = 0, \quad Mb^2 + Rb + Sa + F = 0,$$

woraus

$$b = \frac{-R}{2M}, \qquad a = \frac{R^2 - 4MF}{4MS}.$$

Die Coefficienten von $y^2$ und x bleiben dieselben wie in [G], so daß man als letzte Umformung erhält

[T] $$My^2 + Sx = 0.$$

# Achtes Kapitel.

## Vom Kreise.

### Verschiedene Formeln für die Gleichung des Kreises.

**272.** Setzt man in der Gleichung [a] Nro. 267,

$$m = 1 \text{ und } p = R^2,$$

so ist

[1] $$y^2 + x^2 = R^2,$$

welche Gleichung schon in Nro. 186 gefunden wurde und ausdrückt, daß in diesem besondern Fall alle Punkte der Curve eine constante Entfernung, die gleich R ist, vom Ursprung haben; diese Curve ist also eine Kreislinie. Hieraus würde man ersehen, wenn man es nicht schon wüßte (Nro. 238), daß diese Linie ein besonderer Fall der Ellipse ist.

**273.** Die allgemeinste Gleichung des Kreises für rechtwinklige Coordinaten ist (Nro. 186)

[2] $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2;$$

sie gibt die Gleichung [1] wieder, wenn man $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ macht.

Will man den Ursprung an den Endpunkt eines Durchmessers versetzen, und diesen Durchmesser als Axe der x (Fig. 108) annehmen, so muß man $\alpha = R$, $\beta = 0$ machen; dann erhält man statt der Gleichung [2] $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, oder was dasselbe ist

[3] $$y^2 = 2Rx - x^2.$$

Macht man blos $\beta = 0$, so liegt der Mittelpunkt auf der Axe der x (Fig. 109), aber die Peripherie geht nicht mehr durch den Ursprung, und

macht man blos $\alpha = 0$, so liegt der Mittelpunkt auf der Axe der y (Fig. 110). In diesen beiden Lagen sind die Gleichungen des Kreises

[4] $y^2 + (x - \alpha)^2 = R^2$,

[5] $x^2 + (y - \beta)^2 = R^2$.

**274.** Mit schiefen Coordinaten wird die Gleichung des Kreises selten gebraucht. Sie ergibt sich sogleich, wenn man die Entfernung des Mittelpunkts von einem beliebigen Punkte der Curve gleich dem Halbmesser setzt. Diese Entfernung ist durch die Formel in Nro. 220 gegeben, so daß, wenn man den Axenwinkel mit $\theta$, die Coordinaten des Mittelpunkts des Kreises mit $\alpha$ und $\beta$, und den Halbmesser mit r bezeichnet, sich ergibt:

[6] $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta = r^2$.

**275.** Wird die Gleichung [2] entwickelt, so erhält sie die Form

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

in welcher das Rechteck xy nicht enthalten ist, und die Coefficienten von $x^2$ und $y^2$ einander gleich sind. Sind diese Bedingungen (bei stets rechtwinkligen Axen) erfüllt, so kann die Gleichung keine andere Curve als eine Kreislinie vorstellen. Denn mittelst Division durch den Coefficienten von $y^2$, wenn dieser nicht schon der Einheit gleich ist, erhält sie die vorige Form, und dann nach Ergänzung der Quadrate die folgende

$$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 + (y + \tfrac{1}{2}b)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - c;$$

diese Gleichung ist aber offenbar die eines Kreises, dessen Mittelpunkt $-\tfrac{1}{2}a$ und $-\tfrac{1}{2}b$ zu Coordinaten hat, und dessen Halbmesser gleich $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - c}$ ist. Jedoch stellt diese Gleichung nur dann in Wirklichkeit einen Kreis vor, wenn die Größe $\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - c$ positiv ist; denn ist sie Null, so reducirt sich der Kreis auf seinen Mittelpunkt, und ist sie negativ, so ist die Gleichung unmöglich; was schon in Nro. 256, Beisp. V erörtert wurde.

**276.** Ist eine Gleichung des zweiten Grades zwischen schiefen Coordinaten, deren Neigung bekannt ist, gegeben, so fragt es sich, wie man findet, ob sie einen Kreis vorstelle. Zu diesem Zweck entwickle man die Gleichung [6] und schreibe sie so:

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2(\alpha + \beta\cos\theta)x - 2(\beta + \alpha\cos\theta)y + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - r^2 = 0.$$

Dann fällt sogleich in die Augen, wenn man die gegebene Gleichung durch den Coefficienten von $y^2$ dividirt hat, daß auch der von $x^2$ der Einheit, und der von xy dem doppelten Cosinus des Axenwinkels gleich sein muß.

Ferner läßt sich behaupten, daß jede Gleichung, welche diesen Bedingungen entspricht, keine andere als eine Kreislinie vorstellen kann. Denn angenommen, diese Gleichung sei

$$[7] \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + ax + by + c = 0,$$

und um sie mit der des Kreises identisch zu machen, habe man

$$\alpha+\beta\cos\theta = -\frac{a}{2},\ \beta+\alpha\cos\theta = -\frac{b}{2},\ \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta - r^2 = c$$

gesetzt; so ergibt sich aus diesen Gleichungen

$$\alpha = \frac{b\cos\theta - a}{2\sin^2\theta},\ \beta = \frac{a\cos\theta - b}{2\sin^2\theta},\ r = \sqrt{\frac{a^2+b^2-2ab\cos\theta}{4\sin^2\theta} - c};$$

also machen diese für $\alpha$, $\beta$ und r gesetzten Werthe die Gleichung [6] mit der Gleichung [7] identisch; und somit kann diese letztere keine andere als eine Kreislinie vorstellen, deren Mittelpunkt und Halbmesser durch die obigen Formeln gegeben sind.

Um den Mittelpunkt zu construiren, braucht man $\alpha$ und $\beta$ nicht einmal zu berechnen. Es sei (Fig. 111) O dieser Mittelpunkt mit den Coordinaten $AB = OC = \alpha$, und $AC = OB = \beta$: man fälle OD senkrecht auf Ax und OE auf Ay, so ergeben die rechtwinkligen Dreiecke BOD und COE sogleich $BD = \beta\cos\theta$, $CE = \alpha\cos\theta$; also

$$AD = \alpha + \beta\cos\theta = -\frac{a}{2},\quad AE = \beta + \alpha\cos\theta = -\frac{b}{2}.$$

Nimmt man daher in der Gleichung [7] die halben Coefficienten von x und y mit entgegengesetzten Vorzeichen, so erhält man die Abstände AD und AE, und errichtet man hierauf die Senkrechten DO und EO, so ergibt sich der Mittelpunkt O.

Ist der Werth von r Null, so besagt die Gleichung [6], daß das Quadrat der Entfernung zweier Punkte gleich Null ist; woraus folgt, daß der Kreis auf seinen Mittelpunkt reducirt ist. Ist r imaginär, so ist die Gleichung unmöglich. Diese Folgerungen ergeben sich auch, indem man die Gleichung [6] zuerst in folgende Form bringt:

$$[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2](\cos^2\tfrac{1}{2}\theta + \sin^2\tfrac{1}{2}\theta) + 2(x-\alpha)(y-\beta)(\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - \sin^2\tfrac{1}{2}\theta) = r^2;$$

dann unter folgende:

$$[(x-\alpha)+(y-\beta)]^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta + [(x-\alpha)-(y-\beta)]^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta = r^2;$$

da hier die linke Seite die Summe zweier Quadrate enthält, so muß offenbar die Gleichung unmöglich sein, wenn r imaginär ist, und wenn r Null ist, so kann ihr nur genügt werden, wenn man jedes Quadrat gleich Null setzt, wodurch man auf $x = \alpha$ und $y = \beta$ kommt.

## Lehrsätze über den Kreis.

**277.** Es soll nun gezeigt werden, wie die in der Geometrie aufgestellten Lehrsätze über den Kreis durch Rechnung bewiesen werden können. Nehmen wir wiedet die Gleichung des Kreises

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

Sie gibt $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$; also hat sie (Fig. 112) für jede Abscisse AP zwei gleiche, entgegengesetzte Ordinaten MP und PN. Legt man nun, da MN senkrecht auf AB steht, den untern Theil des Kreises auf den obern, indem man denselben um den Durchmesser BC herum dreht, so muß der Punkt N auf M fallen, und ebenso kommen alle andern Punkte des Theils BNC auf den obern Theil BMC zu liegen. Daraus folgt

1) Jeder Durchmesser halbirt den Kreis und die Kreislinie.

2) Wenn der Durchmesser eine Sehne senkrecht schneidet, so halbirt er die Sehne und den zugehörigen Bogen.

**278.** An der Figur ist klar, daß CP=R+x und BP=R—x, also ist

$$CP \times BP = (R + x)(R - x) = R^2 - x^2;$$

aber aus der Gleichung des Kreises ist $MP^2 = y^2 = R^2 - x^2$, somit

$$MP^2 = CP \times BP;$$

folglich ist jede auf dem Durchmesser senkrechte Ordinate die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten desselben.

**279.** Zieht man die Sehne CM, und bezeichnet die Coordinaten des Punktes M mit x und y, so hat man

$$CM^2 = y^2 + (x + R)^2 = y^2 + x^2 + 2Rx + R^2.$$

Die Gleichung des Kreises gibt aber $x^2 + y^2 = R^2$, daher

$$CM^2 = 2R^2 + 2Rx = 2R(R + x);$$

nun ist $BC = 2R$, und $CP = R + x$; also ist

$$CM^2 = BC \times CP:$$

d. h. die Sehne CM ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser BC und seinem Abschnitt CP.

**280.** Zieht man durch den Punkt C, für welchen $y = 0$ und $x = -R$ ist, und den Punkt M, dessen Coordinaten wir wieder mit x

und y bezeichnen, eine Gerade CM, und bezeichnet die Tangente des Winkels MCx mit a, so ist

$$a = \frac{y}{x + R}.$$

Zieht man durch denselben Punkt M und durch den Punkt B, für welchen $y = 0$ und $x = +R$, die Gerade MB, und bezeichnet die Tangente des Winkels MBx mit a', so hat man gleichfalls

$$a' = \frac{y}{x - R}.$$

Multiplicirt man a mit a' und beachtet, daß $y^2 = R^2 - x^2$ ist, so ergibt sich

$$aa' = \frac{y^2}{x^2 - R^2} = \frac{R^2 - x^2}{x^2 - R^2} = -1,$$

oder was dasselbe ist,

$$aa' + 1 = 0;$$

also stehen (Nro. 221) die Geraden CM und BM senkrecht auf einander, oder mit andern Worten: jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

**281.** Ueberhaupt sind die in demselben Kreisabschnitt einbeschriebenen Winkel einander gleich. Um dieß zu beweisen, nehme man die Sehne DE (Fig. 113), welche den betreffenden Kreisabschnitt abschneidet, zur Axe der x, und den senkrechten Durchmesser zur Axe der y; nun ist der Kreis durch die Gleichung [5] in Nro. 273 gegeben, und man hat als Gleichung des Kreises

$$(y - \beta)^2 + x^2 = c^2 + \beta^2,$$

wo $\beta$ den senkrechten Abstand des Mittelpunktes O von DE, und c die halbe Sehne AD bezeichnet.

Verbindet man einen beliebigen Punkt M des Bogens DME mit den Punkten E und D, und nennt die Coordinaten des Punktes M wieder x und y, und die Tangenten der Winkel MEx und MDx wieder a und a', so ist offenbar

$$a = \frac{y}{x + c}, \qquad a' = \frac{y}{x - c}.$$

Da aber $\operatorname{tang} DME = \frac{a' - a}{1 + aa'}$ (Nro. 221), so ergibt sich, wenn man a und a' durch ihre Werthe ersetzt:

$$\operatorname{tang} DME = \frac{y\,(x+c) - y\,(x-c)}{x^2 - c^2 + y^2} = \frac{2cy}{x^2 - c^2 + y^2}.$$

Da der Punkt M zum Kreise gehört, so hat man zwischen x und y

$$(y - \beta)^2 + x^2 = c^2 + \beta^2;$$

hieraus erhält man $x^2 - c^2 + y^2 = 2\beta y$, und daher

$$\text{tang DME} = \frac{c}{\beta}.$$

Dieser Werth ist constant, d. h. er ändert sich nicht, wenn der Punkt M seine Lage auf der Peripherie ändert. Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AOD

$$\text{tang AOD} = \frac{AD}{AO} = \frac{c}{\beta};$$

also sind alle in denselben Kreisabschnitt einbeschriebenen Winkel gleich dem halben Mittelpunktswinkel, der auf demselben Bogen steht.

**282.** Wir wollen jetzt die Lehrsätze über die geraden Linien beweisen, welche sich in und außer dem Kreise schneiden. Es sei A (Fig. 114) ein beliebiger, in der Ebene eines Kreises liegender Punkt. Man ziehe durch A und den Mittelpunkt O die Ax, ferner Ay senkrecht auf Ax, und nehme auf diesen beiden Linien die Abscissen und Ordinaten. Bezeichnet man den Halbmesser mit R, und den Abstand AO mit $\alpha$, so ist die Gleichung des Kreises (Nro. 273)

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2.$$

Die Gleichung einer beliebigen durch den Punkt A gehenden Geraden ist von der Form

$$y = \delta x,$$

und wenn man die Gleichung verlangt, welche die Abscissen der Punkte M und N gibt, wo die Gerade den Kreis schneidet, so setzt man diesen Werth von y in die Gleichung des Kreises, und erhält

$$(x - \alpha)^2 + \delta^2 x^2 = R^2,$$

oder, indem man das Quadrat entwickelt, R auf die linke Seite schafft, und hierauf mit dem Coefficienten von $x^2$ wegdividirt,

$$[\alpha] \qquad x^2 - \frac{2\alpha}{1+\delta^2}\, x + \frac{\alpha^2 - R^2}{1+\delta^2} = 0.$$

Bezeichnet man die Coordinaten der Durchschnittspunkte mit $x'$, $y'$ und $x''$, $y''$, so ist

$$AM^2 = x'^2 + y'^2, \quad AN^2 = x''^2 + y''^2;$$

diese Punkte liegen aber auf der Geraden, also ist auch

$$y' = \delta x', \quad y'' = \delta x'',$$

folglich

$$AM^2 = (1+\delta^2)\, x'^2 \text{ und } AN^2 = (1+\delta)\, x''^2,$$

und indem man $AM^2$ mit $AN^2$ multiplicirt, ergibt sich

$$AM^2 \times AN^2 = (1+\delta^2)^2\, x'^2\, x''^2.$$

Nun beachte man, daß $x'$ und $x''$ die beiden Wurzeln der Gleichung ($\alpha$) sind, und daß in jeder Gleichung des zweiten Grades das Product aus den Wurzeln dem letzten Gliede gleich ist: daraus folgt

$$x'x'' = \frac{\alpha^2 - R^2}{1+\delta^2},$$

und daher

$$AM^2 \times AN^2 = (\alpha^2 - R^2)^2.$$

Hieraus ergibt sich, je nachdem $\alpha > R$ oder $\alpha < R$ ist:

$$AM \times AN = \alpha^2 - R^2, \text{ oder } AM \times AN = R^2 - \alpha^2.$$

Im ersten Fall liegt der Punkt außerhalb, im zweiten innerhalb des Kreises; aber das Product $AM \times AN$ enthält in keinem Falle $\delta$, und dieß beweist, daß es bei jeder Lage der Secante unverändert bleibt: zieht man also eine zweite Secante, die den Kreis in $M'$ und $N'$ schneidet, so ist $AM \times AN = AM' \times AN'$. Diese Gleichung gibt aber

$$AM : AM' = AN' : AN;$$

*zieht man also von einem Punkt A außerhalb oder innerhalb des Kreises zwei Geraden, welche den Kreis schneiden, so stehen die Abstände zwischen dem Punkt A und dem Kreis auf einer der Geraden in umgekehrter Proportion mit den entsprechenden Abständen auf der andern Geraden.*

Dieser Satz enthält offenbar die beiden folgenden, in der Geometrie bewiesenen Lehrsätze:

*Wenn sich zwei Sehnen im Kreise schneiden, so stehen die Abschnitte der einen Sehne in umgekehrter Proportion mit den Abschnitten der andern Sehne.*

*Zieht man von einem Punkt außerhalb des Kreises zwei beliebige Secanten nach demselben, so verhalten sich die ganzen Secanten umgekehrt wie ihre äußern Abschnitte.*

Diesen läßt sich noch folgender dritte Lehrsatz hinzufügen:

*Zieht man von einem Punkt außerhalb des Kreises eine Secante und eine Tangente an den Kreis, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äußern Abschnitt.*

Dieser Satz ist wirklich nur ein besonderer Fall des vorigen, und läßt sich von demselben ableiten, wenn man annimmt, eine der Secanten drehe sich um den Punkt A, bis die beiden Durchschnittspunkte M′ und N′ zusammenfallen und die Gerade zur Tangente wird. Dann bildet die ganze Secante und ihr äußerer Abschnitt nur einen und denselben, der Tangente gleichen Abstand.

**283.** Suchen wir nun auch die Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung der Kreise. Um am leichtesten hiezu zu gelangen, nehme man die Gerade Ax (Fig. 115), die durch die Mittelpunkte A und B geht, zur Axe der x, und versetze den Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten in den Mittelpunkt A. Bezeichnet man den Abstand AB mit $\alpha$, und die beiden Halbmesser mit R und R′, so sind die Gleichungen der Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (x - \alpha)^2 + y^2 = R'^2.$$

Die Coordinaten jedes, den beiden Kreislinien gemeinschaftlichen Punktes müssen diesen beiden Gleichungen Genüge leisten, und umgekehrt gehören zwei Coordinaten, welche diesen Gleichungen genügen, zu einem Punkt, der beiden Kreislinien gemeinschaftlich ist. Betrachtet man daher x und y als zwei Unbekannte und sucht alle Auflösungen der beiden Gleichungen, so ergeben die reellen Werthe die Durchschnittspunkte der beiden Kreise.

Zur Auflösung der beiden Gleichungen entwickle man das Quadrat $(x - \alpha)^2$, und ziehe die zweite von der ersten ab, dann ergibt sich

$$2\alpha x - \alpha^2 = R^2 - R'^2,$$

woraus man erhält

$$x = \frac{\alpha^2 + R^2 - R'^2}{2\alpha}.$$

Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so erhält man die entsprechenden Werthe für y, nämlich

$$y = \pm \frac{1}{2\alpha}\sqrt{4\alpha^2 R^2 - (\alpha^2 + R^2 - R'^2)^2}.$$

Man findet nur zwei Auflösungen und daraus folgenden bekannten Lehrsatz: Zwei Kreislinien können, wofern sie nicht in eine zusammenfallen, nicht mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Da die beiden Durchschnittspunkte eine Abscisse AP, aber zwei gleiche einander entgegengesetzte Ordinaten MP und NP haben, so ergibt sich daraus der weitere Lehrsatz: Wenn sich zwei Kreislinien schneiden, so steht die Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht auf der Mitte der Sehne, welche die Durchschnittspunkte verbindet.

Damit wirklich ein Durchschnittspunkt stattfinde, muß in den Werthen von y die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv sein. Um zu erkennen, in welchem Falle diese Bedingung stattfinde, beachte man zuerst, daß diese Größe eine Differenz zweier Quadrate ist, und also auf folgende Weise ausgedrückt werden kann:

$$y = \pm \frac{1}{2\alpha}\sqrt{(2\alpha R + \alpha^2 + R^2 - R'^2)(2\alpha R - \alpha^2 - R^2 + R'^2)}.$$

Jeder Factor ist selbst wieder eine Differenz zweier Quadrate, und läßt sich daher in zwei weitere zerlegen, so daß sich ergibt

$$y = \pm \frac{1}{2\alpha}\sqrt{(\alpha + R + R')(\alpha + R - R')(R + R' - \alpha)(\alpha + R' - R)}.$$

Da es immer gestattet ist, den Ursprung in den Mittelpunkt des größten Kreises zu versetzen, und die positiven Abscissen auf derselben Seite, wo der Mittelpunkt des andern Kreises liegt, zu nehmen, so wollen wir $\alpha$ positiv und R größer oder höchstens so groß als R' annehmen. Dann sind die beiden ersten Factoren positiv, und damit y reell sei, müssen die beiden andern Factoren entweder beide positiv, oder beide negativ sein. Man muß also zugleich haben

$$\alpha < R + R' \text{ und } R < \alpha + R',$$

oder auch

$$\alpha > R + R' \text{ und } R > \alpha + R':$$

die beiden letztern Bedingungen sind aber nicht vereinbar; denn nach der einen müßte $\alpha > R$, und nach der andern $\alpha < R$ sein, was unmöglich ist. Somit sind die Bedingungen für den Durchschnitt der Kreise

$$\alpha < R + R' \text{ und } R < \alpha + R',$$

d. h. der Abstand der Mittelpunkte muß kleiner sein als die Summe der Halbmesser, und der größere Halbmesser muß kleiner sein als die Summe aus dem Abstand der Mittelpunkte und dem kleinern Halbmesser.

Damit eine Berührung stattfinde, müssen die beiden Werthe von y sich auf einen reduciren, was nicht stattfinden kann, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen nicht Null ist: die beiden ersten Factoren können aber nicht Null werden, also muß dieß bei dem dritten oder vierten Factor geschehen. Es muß also

$$R + R' - \alpha = 0, \text{ woraus } \alpha = R + R',$$

oder auch

$$\alpha + R' - R = 0, \text{ woraus } \alpha = R - R', \text{ sein.}$$

Damit also zwei Kreise sich berühren, muß die Entfernung der Mittelpunkte gleich der Summe der Halb-

messer, oder gleich ihrer Differenz sein. In beiden Fällen findet die Berührung auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte statt, und zwar muß im ersten Fall die Berührung von außen, im zweiten von innen stattfinden.

Endlich ist y imaginär und die beiden Kreislinien haben keinen gemeinschaftlichen Punkt mehr, wenn $\alpha > R + R'$, oder auch $R > \alpha + R'$ ist; denn bei der einen Voraussetzung ist nur der dritte Factor negativ, und bei der andern nur der vierte. Damit also zwei Kreislinien keinen gemeinschaftlichen Punkt haben, muß die Entfernung der Mittelpunkte größer sein als die Summe der Halbmesser, oder der größere Halbmesser muß größer sein als die Summe aus dem Abstand der Mittelpunkte und dem kleinern Halbmesser.

Hätte man zugleich $R' = R$ und $\alpha = 0$, so würden die Werthe von x und y unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, was das Zeichen der Unbestimmtheit ist; und wirklich sind dann alle Punkte bei den Kreislinien, da sie denselben Mittelpunkt und Halbmesser haben, gemeinschaftlich.

Mittelst der Rechnung ließen sich noch viele andere Lehrsätze über den Kreis beweisen; es genügt uns indessen, die in den Elementen der Geometrie aufgestellten und häufiger gebrauchten hier wiedergefunden zu haben.

## Von der Tangente am Kreise und der Normale.

**284.** Eine Gerade, die mit der Kreislinie nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, heißt in der Geometrie eine Tangente am Kreise. Aus dieser Erklärung folgt, daß, wenn man durch zwei Punkte M und M' (Fig. 116) auf der Kreislinie eine unbegrenzte Secante MS zieht, und sie um den Punkt M dreht, bis der Punkt M' mit M zusammenfällt, diese Gerade zur Tangente wird. Diese Auffassung liefert ein leichtes Mittel, die Tangente an einem gegebenen Punkt der Kreislinie zu bestimmen.

Es sei S der Durchschnittspunkt der Abscissenare mit der Secante, die durch die Punkte M und M' geht: bezeichnet man die Coordinaten von M und M' mit x', y' und x'', y'', so ist (Nro. 214)

$$\text{tang } MSx = \frac{y' - y''}{x' - x''};$$

da nun diese beiden Punkte auf der Kreislinie liegen, so müssen ihre Coordinaten der Gleichung dieser Curve Genüge leisten; ist also die Gleichung des Kreises

[1] $$y^2 + x^2 = R^2,$$

so hat man

$$y'^2 + x'^2 = R^2, \quad y''^2 + x''^2 = R^2.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so ist

$$y'^2 - y''^2 + x'^2 - x''^2 = 0,$$

oder in anderer Form

$$(y' - y'')(y' + y'') + (x' - x'')(x' + x'') = 0.$$

Dann ergibt sich

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x' + x''}{y' + y''},$$

und somit

$$\text{tang } MSx = -\frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Fällt der Punkt M' mit M zusammen, wo $x'' = x'$ und $y'' = y'$, so kommt die Secante MS in die Lage der Tangente MT; setzt man also in obigem Ausdruck $x''=x'$ und $y''=y'$, so erhält man die Tangente des Winkels MTx, den die Abscissen-Axe mit der in dem Punkt M gezogenen Tangente bildet. Wird daher die Tangente dieses Winkels mit a bezeichnet, so ist

$$a = -\frac{x'}{y'}.$$

Die Gleichung der Geraden MT ist aber $y - y' = a(x - x')$; setzt man hier für a seinen Werth, so ergibt sich als Gleichung der Tangente an den Punkt M

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x').$$

Wird der Nenner y' weggeschafft und die Multiplication mit x' ausgeführt, so ergibt sich, indem man zugleich beachtet, daß $y'^2 + x'^2 = R^2$, folgende einfachere Gleichung

[1] $$yy' + xx' = R^2.$$

**285.** Man kann sich leicht a posteriori vergewissern, daß die durch diese Gleichung gegebene Gerade wirklich eine Tangente an dem Kreis ist, indem man beweist, daß sie außer dem einzigen Punkte, den sie mit dem Kreise gemeinschaftlich hat, ganz außerhalb desselben liegt. Dieß läßt sich ganz einfach mittelst der Gleichungen

$$yy' + xx' = R^2, \quad y'^2 + x'^2 = R^2$$

zeigen, von welchen die eine die der Tangente ist, und die andere ausdrückt, daß der Berührungspunkt der Tangente auf der Kreislinie liegt. Zieht man die doppelte erste von der zweiten ab, so erhält man

$$y'^2 - 2yy' + x'^2 - 2xx' = -R^2,$$

und indem man auf beiden Seiten $x^2 + y^2$ hinzu addirt, ist

$$(y—y')^2 + (x—x')^2 = x^2 + y^2 — R^2.$$

Da die erste Seite eine Summe zweier Quadrate ist, so kann die Größe $y^2 + x^2 — R^2$ für keinen Punkt der Tangente negativ werden; aber $x^2 + y^2$ ist das Quadrat der Entfernung des Ursprungs, der zugleich Mittelpunkt des Kreises ist, von irgend einem Punkte der Tangente; also ist diese Entfernung nicht kleiner als der Halbmesser, und sie wird demselben nur gleich, wenn $x = x'$ und $y = y'$ gesetzt wird; somit liegen alle Punkte der Tangente, den Berührungspunkt ausgenommen, außerhalb des Kreises.

**286.** Nehmen wir uns nun vor, die Gleichung der Tangente, welche durch einen gegebenen Punkt außerhalb des Kreises geht, zu suchen. Die Coordinaten dieses Punktes seien $x''$, $y''$, und die des gesuchten Berührungspunktes $x'$, $y'$: kennt man $x'$ und $y'$, so hat man als Gleichung der Tangente

$$yy' + xx' = R^2;$$

und da die Tangente durch den gegebenen Punkt gehen muß, so wird dieser Gleichung genügt, indem man $x''$, $y''$ für $x$ und $y$ setzt, wodurch man erhält

$$[\alpha] \qquad y''y' + x''x' = R^2.$$

Ferner ist die Bedingung, daß der Berührungspunkt auf der Kreislinie liege, ausgedrückt durch

$$[\beta] \qquad y'^2 + x'^2 = R^2.$$

Diese zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von $x'$, $y'$. Aus $[\alpha]$ erhält man

$$y' = \frac{R^2 — x''x'}{y''}.$$

Substituirt man diesen Werth in $[\beta]$, so erhält man die Gleichung

$$x'^2 (x''^2 + y''^2) — 2R^2x''x' + R^2 (R^2 — y''^2) = 0,$$

und diese gibt nach $x'$ aufgelöst

$$x' = \frac{R^2x'' \pm Ry'' \sqrt{x''^2 + y''^2 — R^2}}{x''^2 + y''^2};$$

setzt man diese Werthe für $x'$, so ergeben sich die entsprechenden Werthe von $y'$:

$$y' = \frac{R^2y'' \mp Rx'' \sqrt{x''^2 + y''^2 — R^2}}{x''^2 + y''^2}.$$

Liegt der gegebene Punkt außerhalb des Kreises, so ist $x''^2+y''^2>R^2$; also sind dann die Werthe von $x'$ und $y'$ reell und ergeben zwei Tangenten. Liegt der gegebene Punkt auf der Peripherie, so ist $x''^2+y''^2=R^2$, und die Werthe von $x'$, sowie die von $y'$, reduciren sich auf einen einzigen; es findet also nur eine einzige Tangente statt. Befindet sich endlich der Punkt innerhalb, so ist $x''^2+y''^2<R^2$, die Werthe von $x'$ und $y'$ sind imaginär und es läßt sich keine Tangente mehr an den Kreis ziehen.

**287.** Die Construction der Werthe von $x'$ und $y'$ ist ziemlich verwickelt und bietet nichts Bemerkenswerthes dar. Nimmt man aber die beiden Gleichungen $[\alpha]$ und $[\beta]$ wieder vor:

$$y''y'+x''x'=R^2, \quad y'^2+x'^2=R^2,$$

und betrachtet nach einander in jeder die Coordinaten $x'$ und $y'$ als Unbestimmte, so erhält man die Gleichungen zweier geometrischen Oerter, welche die Berührungspunkte enthalten. Die zweite Gleichung ist die des gegebenen Kreises selbst, und die erste ist die einer leicht zu construirenden Geraden; denn setzt man nach einander $y'=0$ und $x'=0$, so erhält man die Abstände des Ursprungs von den Punkten, wo diese Gerade die Axen schneidet, nämlich (Fig. 117)

$$AT=\frac{R^2}{x''}, \qquad AT'=\frac{R^2}{y''}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich leicht mittelst dritter Proportionalen construiren; dadurch sind die Punkte T und T′ bestimmt, also auch die Gerade TT′, deren Durchschnittspunkte mit der Kreislinie die Berührungspunkte M und M′ geben.

**288.** Ueberhaupt, wenn eine Aufgabe auf zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x und y eines unbekannten Punktes führt, so gibt jede einzelne dieser Gleichungen einen geometrischen Ort, auf welchem dieser Punkt liegt; folglich erhält man durch die Construction der beiden geometrischen Oerter zwei Linien, deren Durchschnittspunkte die der Aufgabe genügenden Punkte bestimmen.

Diese Linien sind indessen selten leicht zu construiren, und dann sucht man andere, welche diese Bedingung erfüllen. Addirt man nun die beiden Gleichungen, oder zieht sie von einander ab, oder verbindet sie auf irgend eine andere Weise, so wird daraus wieder eine Gleichung abgeleitet, welcher dieselben Werthe für x und y, wie den beiden ersten entsprechen; also muß der geometrische Ort dieser Gleichung auch den gesuchten Punkt enthalten. Der ganze Kunstgriff besteht daher darin, daß man durch passende Verbindungen leicht zu construirende Linien, gewöhnlich Gerade und Kreise, zu erhalten sucht.

**289.** So einfach die oben (Nro. 287) gegebene Construction zur Auffindung der Berührungspunkte ist, so ist sie es doch weniger als die

geometrische. Die letztere läßt sich aber leicht aus den eben angestellten allgemeinen Betrachtungen ableiten. Nehmen wir noch einmal die Gleichungen

$$y''y' + x''x' = R^2, \quad y'^2 + x'^2 = R^2,$$

in welchen $x'$ und $y'$ die unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes sind. Zieht man die erste von der zweiten ab, so ergibt sich

$$y'^2 - y''y' + x'^2 - x''x' = 0.$$

Mittelst Ergänzung der Quadrate läßt sich die Gleichung auch so schreiben:

$$(y' - \tfrac{1}{2}y'')^2 + (x' - \tfrac{1}{2}x'')^2 = \tfrac{1}{4}y''^2 + \tfrac{1}{4}x''^2;$$

und indem man sie mit der allgemeinen Gleichung des Kreises (Nro. 273) vergleicht, ersieht man, daß sie selbst eine Kreislinie darstellt, deren Mittelpunkt $\frac{1}{2}x''$, $\frac{1}{2}y''$ zu Coordinaten hat, und deren Halbmesser

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}y''^2 + \tfrac{1}{4}x''^2}$$

ist. Nimmt man nun an, N (Fig. 117) sei der gegebene Punkt, durch welchen die Tangenten zu ziehen sind, und zieht AN, die in O halbirt wird, so müssen offenbar, wenn $x''$ und $y''$ die Coordinaten des Punktes N sind, $\frac{1}{2}x''$ und $\frac{1}{2}y''$ die des Punktes O, und $AO = \sqrt{\frac{1}{4}y''^2 + \frac{1}{4}x''^2}$ sein; also muß der neue Kreis, dessen Peripherie die gesuchten Punkte enthält, mit AN als Durchmesser beschrieben werden; und dieß ist die bekannte geometrische Construction.

Die Resultate dieser Construction stimmen mit den aus den Werthen von $x'$ und $y'$ gezogenen Folgerungen vollkommen überein. Denn offenbar muß in allen Fällen, wo der Punkt N außerhalb des gegebenen Kreises liegt, die auf AN beschriebene Kreislinie den ersten in zwei Punkten schneiden; liegt der Punkt N auf der Kreislinie (Fig. 118), so fallen diese beiden Punkte in einen einzigen, nämlich in N selbst, zusammen; liegt aber N innerhalb des gegebenen Kreises (Fig. 119), so ist kein Durchschnitt mehr möglich, denn dann befindet sich der zweite Kreis innerhalb des ersten.

**290.** Der Werth $AT = \frac{R^2}{x''}$ (Nro. 287), welcher den Punkt T, wo die Linie TT' (Fig. 117) die Abscissen-Axe schneidet, bestimmt, gibt zu einer wichtigen Folgerung Anlaß. Da er die Ordinate $y''$ des Punktes N nicht enthält, so folgt daraus, daß der Punkt T sich nicht ändern kann, wenn auch N seine Lage verändert, wofern dieser nur auf der mit Ax senkrechten NL bleibt; denn in diesem Falle behält $x''$ immer denselben Werth. Daraus ergibt sich folgender Lehrsatz, dem bei allen Linien der zweiten Ordnung ein ähnlicher entspricht: *Zieht man von jedem Punkte einer gegebenen Geraden zwei Tangenten an einen Kreis, und verbindet je die beiden Berührungspunkte, so schneiden sich diese Verbindungslinien alle in einem Punkte.*

Damit AT sich ändere, muß auch x'' variiren; daraus ergibt sich der folgende umgekehrte Lehrsatz: Zieht man durch einen in der Ebene eines Kreises liegenden Punkt mehrere Secanten an diesen Kreis, und durch die Punkte, wo jede Secante die Kreislinie trifft, zwei Tangenten, so ist der Ort der Durchschnittspunkte je zwei dieser Tangenten eine gerade Linie.

**291.** Eine durch den Berührungspunkt senkrecht auf die Tangente gezogene Gerade heißt Normale. Sind die Coordinaten dieses Punktes x' und y', so ist die Gleichung der Normale von der Form

$$y - y' = a'(x - x');$$

wegen ihrer senkrechten Lage zur Tangente ist aber (Nro. 221)

$$a' = -\frac{1}{a} = \frac{y'}{x'},$$

also ist die Gleichung der Normale an den Kreis

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'),$$

oder reducirt,

$$y = \frac{y'}{x'}x.$$

Diese Linie geht durch den Ursprung, der hier Mittelpunkt des Kreises ist, und man findet so wieder die bekannte Eigenschaft, daß die Tangente auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Halbmesser senkrecht steht.

# Neuntes Kapitel.

## Von der Ellipse.

### Die Ellipse auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen.

**292.** Wir haben oben (Nro. 267) gesehen, daß es ein einziges rechtwinkliges Coordinaten-System gibt, für welches die Gleichung der Ellipse die Form erhält

$$[\alpha] \qquad y^2 + m^2x^2 = p.$$

Ist p negativ, so ist die Gleichung unmöglich, da die erste Seite nicht negativ werden kann, welchen reellen Werth man auch für x und y setzen mag. Ist $p = 0$, so stellt die Gleichung blos den Ursprung vor; denn die erste Seite kann nur zu Null werden, wenn man zugleich $x = 0$ und $y = 0$ setzt. Damit also die Gleichung wirklich eine Ellipse vorstelle, muß p eine positive Größe sein. Es soll daher p durch $b^2$ ersetzt werden, dann hat man als Gleichung der Ellipse:

$$y^2 + m^2x^2 = b^2.$$

**293.** Die Form dieser Gleichung zeigt schon beim bloßen Anblick, daß der Ursprung der Coordinaten im Mittelpunkt der Ellipse liegt; denn sie enthält keine Ausdrücke des ersten Grades (Nro. 268). Sie zeigt ebenfalls, daß die Abscissen-Axe und Ordinaten-Axe Durchmesser und zugleich Axen der Curve sind (Nro. 269); denn da diese Gleichung für jede Abscisse AP (Fig. 120) zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten, und ebenso für jede Ordinate AQ zwei gleiche entgegengesetzte Abscissen gibt, so folgt daraus, daß jede der Coordinaten-Axen auf den mit der andern Axe parallelen Sehnen senkrecht steht und dieselben halbirt. Wir werden später (Nro. 337) sehen, daß die Ellipse keine andern Axen als diese hat.

**294.** Um die Längen dieser Axen, d. h. den von der Ellipse eingeschlossenen Theil derselben zu finden, mache man in der Gleichung dieser Curve nach einander $y = 0$ und $x = 0$. Aus

$$y = 0 \text{ ergibt sich } x = \pm \frac{b}{m}, \text{ und } x = 0 \text{ gibt } y = \pm b;$$

daher nehme man auf der Abscissen-Axe $AB = AC = \frac{b}{m}$, und auf der Ordinaten-Axe $AD = AE = b$, so sind die Abstände BC und DE die Längen der Axen.

Die größere dieser Längen heißt große oder erste Axe, und die andere kleine oder zweite Axe. Die Punkte B, C, D, E heißen die Scheitel der Ellipse; indessen werden besonders die Endpunkte der großen Axe so genannt.

**295.** Drücken wir AB durch a aus, so ist

$$\frac{b}{m} = a, \quad \text{woraus } m = \frac{b}{a}.$$

Setzt man diesen Werth für m in der Gleichung [α], und schafft den Nenner $a^2$ weg, so ist

$$[e] \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Diese Gleichung der Ellipse wird am häufigsten gebraucht. Da hier der Mittelpunkt als Ursprung genommen ist, und die beiden Axen der Ellipse zugleich die Coordinaten-Axen sind, so sagt man, die Ellipse sei auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen.

**296.** Will man den Ursprung in den Scheitel C versetzen, so muß man in der Gleichung [e] x in x — a verwandeln; dann ergibt sich nach einander

$$a^2y^2 + b^2 (x - a)^2 = a^2b^2,$$
$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = a^2b^2,$$
$$[e'] \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2).$$

**297.** Ist $b = a$, so verwandeln sich Gleichungen [e] und [e'] in

$$y^2 + x^2 = a^2, \quad y^2 = 2ax - x^2,$$

und dann stellen sie einen Kreis vor; also ist der Kreis eine Ellipse mit gleichen Axen.

**298.** Die Gleichung [e] gibt

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

und es fällt in die Augen, daß, wenn x von Null an bis a positiv wächst, die beiden Werthe von y reell sind und von b an bis auf Null abnehmen; wird aber x größer als a, so sind diese Werthe imaginär: also hat die Ellipse auf der Seite AB (Fig. 120) einen Bogen von der Form DBE. Durch die Veränderung des Vorzeichens von x ändern sich die Werthe von y nicht; daher hat die Ellipse auf der Seite AC dieselbe Form, wie auf der von AB. Hiebei ist zu bemerken, daß sie in jedem ihrer Punkte ihre concave Seite dem Mittelpunkt zukehrt; sonst könnte sie von einer Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden, was bei Linien der zweiten Ordnung nie der Fall ist (Nro. 199).

**299.** Es seien MP und PN zwei derselben Abscisse AP entsprechende Ordinaten; nun sind die Winkel MPA und NPA rechte, weil die Axen rechtwinklig sind, und PM ist gleich PN; dreht man also den untern Theil der Ellipse um BC, bis er auf den obern fällt, so fällt der Punkt N auf M, und ebenso fallen alle Punkte des Bogens BNC auf den Bogen BMC; also decken sich diese Bögen. Dasselbe läßt sich von den Bögen DBE und DCE sagen, da jede Ordinate AQ zwei gleichen entgegengesetzten Abscissen entspricht: folglich wird die Ellipse von jeder ihrer Axen halbirt.

**300.** Aus dem Dreieck AMP ergibt sich

$$MA = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + b^2}.$$

Da man die Abscissen immer auf der großen Axe nehmen kann, so läßt sich, ohne der Allgemeinheit der Resultate Eintrag zu thun, $a > b$ annehmen. Nun ist klar, wenn man dem Punkt M alle möglichen Lagen zwischen D und B gibt, und x von Null bis a wächst, so muß MA von $DA = b$ bis $BA = a$ wachsen; zieht man also in der Ellipse zwischen der Curve und ihrem Mittelpunkt Gerade oder Halbmesser, so ist der kleinste Halbmesser gleich der halben kleinen Axe, und der größte Halbmesser gleich der halben großen Axe.

Ist $b = a$, so ist $MA = a$, d. h. die Halbmesser sind gleich, woraus wieder der Kreis zu erkennen ist.

**301.** Nimmt man an, x und y stellen die Coordinaten eines besondern Punktes M auf der Ellipse vor, so gibt die Gleichung [e]

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(a - x)(a + x).$$

Nun ist $y = MP$, $a - x = PB$, $a + x = PC$, also

$$MP^2 = \frac{b^2}{a^2} \times PB \times PC.$$

Für einen andern Punkt M' hat man ebenso

$$M'P'^2 = \frac{b^2}{a^2} \times P'B \times P'C,$$

also

$$\frac{MP^2}{M'P'^2} = \frac{PB \times PC}{P'B \times P'C};$$

somit verhalten sich die Quadrate der auf einer Axe der Ellipse senkrechten Ordinaten wie die Producte aus den entsprechenden Abschnitten dieser Axe.

**302.** Für alle auf der Ellipse liegenden Punkte muß

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

sein. Betrachtet man einen außerhalb derselben liegenden Punkt K, und zieht die Gerade AK, so schneidet diese Linie die Ellipse in einem Punkte, dessen Coordinaten kleiner sind als die von K; für den Punkt K ist also

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 > 0.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich für einen innerhalb liegenden Punkt K'

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 < 0.$$

Man hat also immer

$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$ für einen Punkt auf der Ellipse.

$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 > 0$ für einen Punkt außerhalb derselben.

$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 < 0$ für einen Punkt innerhalb derselben.

Um daher zu finden, ob ein Punkt auf der Ellipse, oder außerhalb oder innerhalb derselben liegt, braucht man nur zu wissen, ob die Größe $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2$ Null, oder positiv oder negativ ist.

### Construction der Ellipse mittelst ihrer Axen.

**303.** Die Gleichung [e] der Ellipse gibt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Beschreibt man auf der Axe BC (Fig. 121) als Durchmesser einen Kreis, so ist seine Gleichung

$$y^2 = a^2 - x^2;$$

wenn man daher die Ordinaten PN und PM, die auf der Ellipse und dem Kreise derselben Abscisse entsprechen, mit y und Y bezeichnet, so ist überhaupt

$$y = \frac{b}{a} Y, \text{ oder } \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

Nehmen wir des einfachern Ausdrucks wegen an, BC oder 2a sei die große Axe; so ergibt sich daraus, daß die auf der großen Axe senkrechten Ordinaten der Ellipse zu den entsprechenden Ordinaten des auf dieser Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises in dem constanten Verhältnisse der kleinen Axe zur großen stehen.

**304.** Erste Construction. Darnach läßt sich die Ellipse construiren, indem man die Ordinaten des Kreises nach dem Verhältniß von b zu a abnehmen läßt. Man beschreibt nämlich auf der großen Axe BC, und ebenso auf der kleinen DE einen Kreis. Ist nun PM eine Ordinate des ersten Kreises, so ziehe man den Halbmesser AM, der den zweiten in G schneidet, hierauf GN parallel mit AP, bis sie PM in N trifft, so ist N ein Punkt der Ellipse. Denn wegen der Parallelen ist

$$\frac{PN}{PM} = \frac{AG}{AM} = \frac{b}{a}, \quad \text{woraus } PN = \frac{b}{a} \times PM,$$

welches gerade der Ordinatenwerth der Ellipse ist, die der Ordinate PM des Kreises entspricht. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man so viele Punkte, als man will.

**305.** Zweite Construction. Von einem beliebigen Punkte F aus (Fig. 122), der auf einer der Axen, z. B. auf der Axe gleich 2b liegt, beschreibe man mit einem Halbmesser gleich der Summe a + b der beiden halben Axen einen Kreisbogen, der die andere Axe in E schneidet; nun ziehe man FE und mache FM = a, so liegt der Punkt M auf der Ellipse. Denn zieht man von M aus MR und MP parallel mit beiden Axen, so ist in dem Dreieck MRF

$$FR = \sqrt{FM^2 - MR^2} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

und wegen der ähnlichen Dreiecke MRF und EMP ist ferner

$$MP : FR = ME : FM \text{ oder } y : \sqrt{a^2 - x^2} = b : a,$$

also

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

folglich M ein Punkt auf der Ellipse.

Es ist klar, daß EF ein Lineal von der Länge a + b sein kann, auf welchem man einen Punkt M bezeichnet, so daß MF = a ist. Bewegt man nun dieses Lineal im Winkel xAy, so daß der Punkt E immer auf der Linie Ax und F auf yA sich bewegt, so beschreibt der Punkt M ein Viertel der verlangten Ellipse, und man erhält die andern Theile derselben, indem man das Lineal ebenso in den andern Winkeln herum bewegt.

**306.** Dritte Construction. Von einem beliebigen auf der kleinen Axe liegenden Punkte F (Fig. 123) beschreibe man mit einem Halbmesser gleich der Differenz a − b der halben Axen einen Kreisbogen, der die Axe BC in E schneidet, ziehe durch E und F die FEM, und mache FM = AB = a; so gehört der Punkt M zur Ellipse.

Denn zieht man parallel mit BC die Linie FR, welche die Verlängerung der Ordinate MP in R trifft, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck FMR $MR = \sqrt{a^2 - x^2}$, und aus den ähnlichen Dreiecken MEP und MFR ergibt sich MP : MR = ME : MF oder $y : \sqrt{a^2 - x^2} = b : a$, also

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

folglich gehört der Punkt M zur Ellipse.

FM kann ein Lineal von der Länge a sein, auf welchem sich ein Punkt E befindet, so daß EM = b ist. Bewegt man die Linie EM zuerst im Winkel xAy und dann in den drei andern, so erhält man alle Theile der verlangten Ellipse.

### Von den Brennpunkten und Directricen (Richtungslinien).

**307.** Sucht man die Entfernung eines beliebigen Punktes von einem Punkte der Ellipse und drückt diese Entfernung als Function der Abscisse aus, so ergibt sich eine ziemlich verwickelte Formel, in welcher diese Abscisse mit Wurzelwerthen behaftet ist. Diese Formel läßt sich aber auf eine ganz einfache rationale Function reduciren, wenn man den Punkt, von welchem aus die Entfernung zu bestimmen ist, in gewisse Lagen bringt, und die deßhalb näher beachtet zu werden verdienen. Die zu lösende Aufgabe ist daher folgende:

Die Punkte zu bestimmen, deren Entfernung von einem beliebigen Punkt der auf ihre Axen bezogenen Ellipse durch eine rationale Function der Abscisse dieses Punktes ausgedrückt werden kann. Diese Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse.

Man nehme einen beliebigen Punkt G (Fig. 124) in der Ebene der Ellipse an, bezeichne seine Coordinaten mit x′ und y′, die eines beliebigen

Punktes M der Curve mit x und y, und dem Abstand GM mit $\delta$, so ist überhaupt

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

oder nach Entwickelung der Quadrate

$$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2.$$

Da der Punkt M auf der Ellipse liegt, so hat man zwischen x und y die Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, woraus man erhält

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}};$$

setzen wir diesen Werth in die Gleichung für $\delta^2$, so ergibt sich nach geschehener Reduction

$$\delta^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2x'x + x'^2 + y'^2 + b^2 - 2y'\sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}}.$$

Damit $\delta$ eine rationale Function von x sei, muß um so mehr $\delta^2$ eine solche sein, was nur der Fall sein kann, wenn der Wurzelwerth verschwindet; dieser Wurzelwerth verschwindet aber nur, wenn $y' = 0$ ist: also muß der Punkt G, um ein Brennpunkt der Ellipse zu sein, auf der Abscissen-Axe liegen.

Für $y' = 0$ ist

$$\delta^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2x'x + b^2 + x'^2,$$

und das einzige Mittel, um $\delta$ in x rational auszudrücken, ist, die Unbestimmte x' so zu nehmen, daß die zweite Seite ein vollkommenes Quadrat werde. Deßhalb muß

$$4(b^2 + x'^2)\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = 4x'^2$$

sein, aus welcher Gleichung man nach geschehener Reduction erhält

$$x' = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Diese Werthe sind nur reell, so lange $a > b$ ist, d. h. die Abscissen müssen auf der großen Axe und nicht auf der kleinen genommen werden. Angenommen, dieß sei geschehen, so erhalten wir zwei Brennpunkte F und F', die auf der großen Axe, zu beiden Seiten des Mittelpunktes und von diesem gleich weit um $\sqrt{a^2 - b^2}$ entfernt liegen.

Diese Brennpunkte lassen sich leicht construiren, indem man vom Endpunkt D der kleinen Axe 2b mit einem Halbmesser gleich a einen Kreisbogen beschreibt, der die große Axe BC schneidet. Denn es seien F und F' die nach dieser Construction gefundenen Punkte, so ist $AF = AF' = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Der Abstand FF' heißt die Excentricität der Ellipse.

**308.** Suchen wir nun die Werthe der Abstände FM und F'M, welche gewöhnlich Radien-Vectoren genannt werden. Um FM zu erhalten, müssen wir in dem letzten Ausdruck für $\delta^2$ anstatt x' seinen positiven Werth $+\sqrt{a^2-b^2}$ setzen, und um F'M zu erhalten, muß für x' sein negativer Werth $-\sqrt{a^2-b^2}$ genommen werden. Setzen wir zu größerer Einfachheit $\sqrt{a^2-b^2}=c$, woraus $b^2+c^2=a^2$, so ergibt sich

$$FM^2=\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2, \quad F'M^2=\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2,$$

oder, wenn man die Quadratwurzeln nimmt

$$FM=\pm\left(a-\frac{cx}{a}\right), \quad F'M=\pm\left(a+\frac{cx}{a}\right).$$

Es dürfen hier nur die positiven Werthe genommen werden: da nun für alle Punkte der Ellipse $x<a$, und auch $c<a$ ist, so gelten für FM und F'M nur die ersten Werthe, nämlich

$$FM=a-\frac{cx}{a}, \quad F'M=a+\frac{cx}{a}.$$

**309.** Addirt man diese Ausdrücke, so ergibt sich

$$FM+F'M=2a;$$

daher der wichtige Lehrsatz: Die Summe der an einen beliebigen Punkt der Ellipse gezogenen Radien-Vectoren ist constant und gleich der großen Axe.

**310.** Es sei N (Fig. 125) ein Punkt außerhalb der Ellipse, von welchem aus NF und NF' gezogen sind; der Punkt, wo NF' die Ellipse schneidet, heiße M; man ziehe MF. Nun ist $FN+F'N>FM+F'M$; da aber $FM+F'M=2a$, so ist $FN+F'N>2a$.

Für einen innerhalb liegenden Punkt N' hat man nach der Figur $FN'+F'N'<FM+F'M$; also $FN'+F'N'<2a$.

Je nachdem daher ein Punkt auf der Ellipse, oder außerhalb, oder innerhalb derselben liegt, ist die Summe der an diesen Punkt gezogenen Radien-Vectoren so groß, oder größer, oder kleiner, als die große Axe.

**311.** Das Vorstehende gewährt ein sehr einfaches Mittel, beliebig viele Punkte einer Ellipse zu finden, oder sie sogar in einer stetigen Bewegung zu beschreiben, wenn man die große Axe BC und ihre Brennpunkte F und F' (Fig. 125) kennt.

Man nimmt auf BC eine beliebige Länge BK, beschreibt vom Brennpunkt F aus mit dem Halbmesser BK einen Kreisbogen, ebenso vom Brenn-

punkt C aus mit dem Halbmesser CK; so gehört der Punkt M, wo sich die Bögen schneiden, zur Ellipse; denn es ist $FM + F'M = BC$.

Die Kreisbögen können gleich über und unter der Axe beschrieben werden, wodurch man bei jeder Operation zwei Punkte erhält, und wiederholt man diese Operation mit derselben Zirkelöffnung vom andern Brennpunkt aus, so erhält man deren vier.

Soll die Ellipse sehr groß sein, wenn sie z. B. auf dem Felde zu construiren wäre, so befestigt man die Endpunkte einer Schnur, deren Länge gleich der großen Axe ist, in den Brennpunkten und spannt sie mittelst eines Stiftes an; diesen führt man unter fortwährender Spannung der Schnur herum, so wird die Curve durch ein vollständiges Herumziehen des Stiftes beschrieben.

**312.** Befassen wir uns nun mit der directen Lösung der Aufgabe: Eine Curve zu finden, bei welcher die Summe der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten constant und gleich 2a sei.

Man ziehe durch die zwei festen Punkte F und F′ (Fig. 124) die Gerade xx′, und auf die Mitte A von FF′ die Senkrechte yy′. Nun sei M ein Punkt der Curve; man fälle die Senkrechte MP auf x′x, und mache $PM' = PM$: so muß auch M′ ein Punkt der Curve sein, denn es ist

$$FM' + F'M' = FM + F'M = 2a;$$

also wird die Curve von der Linie x′x symmetrisch getheilt. Dasselbe läßt sich von der Linie y′y nachweisen; deßwegen wählt man x′x und y′y zu Coordinaten-Axen. Dieß vorausgesetzt, kann man, da $FM+F'M=2a$,

$$FM = a - z, \quad F'M = a + z$$

setzen, wo z eine veränderliche Größe ist. Bezeichnet man den Abstand AF mit c, und die Coordinaten AP und MP mit x und y, so geben die rechtwinkligen Dreiecke MFP und MF′P

$$y^2 + (c - x)^2 = (a - z)^2$$
$$y^2 + (c + x)^2 = (a + z)^2,$$

aus welchen Gleichungen z zu eliminiren ist. Zieht man die erste von der zweiten ab, so ergibt sich

$$4cx = 4az, \quad \text{woraus } z = \frac{cx}{a}.$$

Setzt man diesen Werth in eine der Gleichungen, so erhält man nach geschehener Reduction als Gleichung der gesuchten Curve

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

Aus der Aufgabe selbst geht hervor, daß $FM + F'M > FF'$, also $2a > 2c$, folglich $a^2 - c^2$ eine positive Größe ist. Vergleicht man diese Gleichung mit der der Ellipse,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

so fällt in die Augen, daß beide Gleichungen und somit auch die dadurch dargestellten Curven identisch sein müssen, sobald

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

woraus $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; also ist die gesuchte Curve eine Ellipse, deren große Axe $= 2a$, und deren kleine Axe $= 2\sqrt{a^2 - c^2}$ ist.

**313.** Die Gleichung $a^2 - c^2 = b^2$ gibt auch

$$c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

nimmt man daher BC als die große Axe einer Ellipse an, und schneidet auf BC vom Mittelpunkt aus $AF = AF' = \sqrt{a^2 - b^2}$ ab, so ist nothwendig für jeden Punkt der Ellipse $FM + F'M = 2a$, welches die in Nro. 309 gefundene Eigenschaft der Ellipse ist, und zur Definition der Brennpunkte dienen könnte, wenn dieß nicht schon auf andere Weise geschehen wäre.

Setzt man in $a - z$ und $a + z$ für z seinen Werth $\frac{cx}{a}$, so findet sich wieder

$$FM = a - \frac{cx}{a}, \quad F'M = a + \frac{cx}{a}.$$

Diese Ausdrücke sind rationale Functionen der Abscisse x, und diese Eigenschaft haben wir als die gebräuchlichste zur Definition der Brennpunkte angenommen.

**314.** Jeder Brennpunkt theilt die große Axe in zwei beziehungsweise gleiche Abschnitte $a + \sqrt{a^2 - b^2}$ und $a - \sqrt{a^2 - b^2}$, deren Rechteck dem Quadrat der halben kleinen Axe ($b^2$) gleich ist: nach dieser sehr einfachen Eigenschaft werden die Brennpunkte in der Abhandlung von Apollonius erklärt.

**315.** Den beiden Brennpunkten entsprechen folgende zwei beachtungswerthe Linien, die man Richtungslinien oder Directricen heißt.

Für den Abstand des Brennpunktes F von einem beliebigen Punkte M der Ellipse fanden wir $MF = a - \frac{cx}{a} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)$.

Nimmt man nun (Fig. 126) $AH = \frac{a^2}{c}$ und errichtet die Senkrechten HL auf AB und MR auf HL, so ist $MR = \frac{a^2}{c} - x$, also

$$MF = \frac{c}{a} \times MR;$$

folglich

$$\frac{MF}{MR} = \frac{c}{a}.$$

Trägt man auf der andern Seite vom Mittelpunkt $AH' = AH = \frac{a^2}{c}$ an, und zieht die Senkrechte H'L' auf AB und MR' auf H'L', so ist

$$MR' = \frac{a^2}{c} + x;$$

da aber

$$MF' = a + \frac{cx}{a} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} + x\right),$$

so ist auch

$$\frac{MF'}{MR'} = \frac{c}{a}.$$

Die Senkrechten HL und H'L' heißen die Directricen der Ellipse, und die vorstehenden sie bestimmenden Eigenschaften lassen sich also ausdrücken: Die Abstände irgend eines Punktes der Ellipse von einem der Brennpunkte und von der diesem Brennpunkte nächstliegenden Directrix verhalten sich wie die Excentricität zur großen Axe. Dabei ist zu bemerken, daß nach der Construction $AH \times c = a^2$ ist, d. h. die halbe große Axe AB ist die mittlere Proportionale zwischen AF und AH.

**316.** Nehmen wir uns nun vor, die Curve direct zu suchen, auf welcher die Abstände jedes Punktes von einem gegebenen Punkt und von einer gegebenen Linie in einem constanten Verhältnisse m : n stehen.

Es sei F' (Fig. 126) der gegebene Punkt und H'L' die gegebene Linie; man ziehe H'F'x senkrecht auf H'L', theile F'H' in C so, daß sich verhält F'C : CH' = m : n; nun gehört der Punkt C offenbar zur Curve, und man kann m = F'C und n = CH' annehmen. Nun errichte man CY senkrecht auf Cx, und nehme die Linien Cx und CY als Coordinaten-Axen; so sind, wenn x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Curve vorstellen, die Abstände dieses Punktes von F' und von H'L'

$$MF' = \sqrt{y^2 + (x - m)^2} \text{ und } MR' = x + n;$$

also muß nach der Aufgabe sich verhalten

$$\sqrt{y^2 + (x - m)^2} : x + n = m : n,$$

woraus nach geschehener Reduction sich ergibt:

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\,x^2 - 2mn\,(n + m)\,x = 0.$$

Dieß ist die Gleichung der gesuchten Curve, und sie zeigt an, daß diese eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder eine Parabel ist, je nachdem $m < n$, oder $m > n$, oder $m = n$ ist.

Nehmen wir die erste Voraussetzung und setzen, um die Punkte zu finden, wo die Ellipse die Axe Cx schneidet, $y = 0$, so ist

$$(n^2 - m^2)\,x^2 - 2mn\,(n + m)\,x = 0,$$

woraus

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{2mn}{n - m}.$$

Der Werth $x = 0$ gibt den schon bekannten Punkt C, und der andere Werth bestimmt den Punkt B. Versetzt man den Anfangspunkt in die Mitte A von CB, so muß man x in $x + \frac{mn}{n-m}$ umändern, dann erhält man die Gleichung

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\,x^2 = \frac{m^2n^2\,(n + m)}{n - m}.$$

Nun ist die Ellipse auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen. Die Länge der halben Axe AB ist bereits bekannt, und setzt man in der vorigen Gleichung $x = 0$, so ist auch die andere halbe Axe bekannt. Bezeichnen wir diese halben Axen mit a und b, so ist

$$[1] \qquad a = \frac{mn}{n-m}, \quad b = m\sqrt{\frac{n+m}{n-m}}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Mittelpunktes A von den Brennpunkten mit c, so ist

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{m^2n^2}{(n-m)^2} - \frac{m^2\,(n+m)}{n-m}} = \frac{m^2}{n-m}.$$

Es ist aber

$$AF' = AC - CF' = \frac{mn}{n-m} - m = \frac{m^2}{n-m};$$

also ist F' ein Brennpunkt der Ellipse. Auch läßt sich leicht einsehen, daß die Gerade H'L' eine der Directricen ist; denn sie befriedigt die Gleichung $AC^2 = AF' \times AH'$ (Nro. 315).

**317.** Bemerkung 1. Die Definition der Brennpunkte, wie sie in Nro. 307 nach Euler gegeben wurde, ist zwar sehr einfach; sie hat jedoch den Fehler, daß dadurch diese Punkte nicht nach einer geometrischen Eigenschaft bestimmt werden, und die des Apollonius (Nro. 314) drückt keine Eigenschaft aus, die hervorragend genug wäre, um dabei stehen zu bleiben. Es wäre nun passender, die Brennpunkte und die Directricen vereint zu suchen, indem man sie der vorigen Aufgabe gemäß definirt; dann würde die Analyse, mittelst welcher diese Aufgabe gelöst wird, zur Bestimmung derselben dienen. Schlägt man diesen Weg ein, so muß man a und b als gegeben betrachten, während m und n Unbekannte sind, die man aus den Gleichungen [1] ableiten muß. Noch besser wird es aber sein, die Abstände AF′ und AH′, welche sich ganz einfach aus den Gleichungen

$$AF' = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ und } AF' \times AH' = a^2$$

bestimmen lassen, als Unbekannte anzunehmen.

**318.** Bemerkung 2. In Nro. 308 wurde beim Aufsuchen der Brennpunkte $FM = a - \frac{cx}{a}$, $F'M = a + \frac{cx}{a}$ gefunden, und in Nro. 315 ließen sich die beiden Directricen aus der Form dieser Werthe leicht ableiten. In dieser Beziehung ist überhaupt zu bemerken, daß es genügt, wenn die Entfernung eines festen Punktes von einem beliebigen Punkte einer Curve durch eine rationale Function des ersten Grades zwischen den Coordinaten dieses letztern Punktes ausgedrückt ist, um daraus das Vorhandensein einer bestimmten Geraden zu folgern, die so beschaffen ist, daß die Abstände jedes Punktes der Curve von dem festen Punkte und von der Geraden in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen. Der Beweis dieses Satzes und die Bestimmung der Lage der Geraden wird auf folgende Weise gegeben:

Man bezeichne den Winkel der Axen, die beliebig genommen sind, mit $\theta$, die Coordinaten der Curve mit x, y, und die beiden betreffenden Abstände mit $\varrho$, $\varrho'$.

Nach der Voraussetzung ist $\varrho$ eine Function, die man in folgende Form bringen kann:

$$\varrho = k(y - gx - h).$$

Angenommen, die Gleichung einer der Lage nach unbestimmten Geraden sei

$$y, = Gx, + H$$

und

$$K = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + G^2 + 2G\cos\theta}};$$

so ergibt Nro. 224 für die Senkrechte $\varrho'$

$$\varrho' = K(y - Gx - H).$$

also muß nach der Aufgabe sich verhalten

$$\sqrt{y^2 + (x - m)^2} : x + n = m : n,$$

woraus nach geschehener Reduction sich ergibt:

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\,x^2 - 2mn\,(n + m)\,x = 0.$$

Dieß ist die Gleichung der gesuchten Curve, und sie zeigt an, daß diese eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder eine Parabel ist, je nachdem $m < n$, oder $m > n$, oder $m = n$ ist.

Nehmen wir die erste Voraussetzung und setzen, um die Punkte zu finden, wo die Ellipse die Axe Cx schneidet, $y = 0$, so ist

$$(n^2 - m^2)\,x^2 - 2mn\,(n + m)\,x = 0,$$

woraus

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{2mn}{n - m}.$$

Der Werth $x = 0$ gibt den schon bekannten Punkt C, und der andere Werth bestimmt den Punkt B. Versetzt man den Anfangspunkt in die Mitte A von CB, so muß man x in $x + \frac{mn}{n-m}$ umändern, dann erhält man die Gleichung

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\,x^2 = \frac{m^2n^2\,(n + m)}{n - m}.$$

Nun ist die Ellipse auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen. Die Länge der halben Axe AB ist bereits bekannt, und setzt man in der vorigen Gleichung $x = 0$, so ist auch die andere halbe Axe bekannt. Bezeichnen wir diese halben Axen mit a und b, so ist

[1] $$a = \frac{mn}{n-m}, \qquad b = m\sqrt{\frac{n+m}{n-m}}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Mittelpunktes A von den Brennpunkten mit c, so ist

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{m^2n^2}{(n-m)^2} - \frac{m^2(r}{n} = $$

Es ist aber

$$AF' = AC - CF' = \frac{mn}{n-}$$

also ist F' ein Brennpunkt der Ellip
die Gerade H'L' eine der Direct
$AC^2 = AF' \times AH'$ (Nro. 3

**317.** Bemerkung 1. Die Definition der Brennpunkte, wie sie in Nro. 307 nach Euler gegeben wurde, ist zwar sehr einfach; sie hat jedoch den Fehler, daß dadurch diese Punkte nicht nach einer geometrischen Eigenschaft bestimmt werden, und die des Apollonius (Nro. 314) drückt keine Eigenschaft aus, die hervorragend genug wäre, um dabei stehen zu bleiben. Es wäre nun passender, die Brennpunkte und die Directricen vereint zu suchen, indem man sie der vorigen Aufgabe gemäß definirt; dann würde die Analyse, mittelst welcher diese Aufgabe gelöst wird, zur Bestimmung derselben dienen. Schlägt man diesen Weg ein, so muß man a und b als gegeben betrachten, während m und n Unbekannte sind, die man aus den Gleichungen [1] ableiten muß. Noch besser wird es aber sein, die Abstände AF′ und AH′, welche sich ganz einfach aus den Gleichungen

$$AF' = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ und } AF' \times AH' = a^2$$

bestimmen lassen, als Unbekannte anzunehmen.

**318.** Bemerkung 2. In Nro. 308 wurde beim Aufsuchen der Brennpunkte $FM = a - \frac{cx}{a}$, $F'M = a + \frac{cx}{a}$ gefunden, und in Nro. 315 ließen sich die beiden Directricen aus der Form dieser Werthe leicht ableiten. In dieser Beziehung ist überhaupt zu bemerken, daß es genügt, wenn die Entfernung eines festen Punktes von einem beliebigen Punkte einer Curve durch eine rationale Function des ersten Grades zwischen den Coordinaten dieses letztern Punktes ausgedrückt ist, um daraus das Vorhandensein einer bestimmten Geraden zu folgern, die so beschaffen ist, daß die Abstände jedes Punktes der Curve von dem festen Punkte und von der Geraden in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen. Der Beweis dieses Satzes und die Bestimmung der Lage der Geraden wird auf folgende Weise gegeben:

Man bezeichne den Winkel der Axen, die beliebig genommen sind, mit $\theta$, die Coordinaten der Curve mit x, y, und die beiden betreffenden Abstände mit $\varrho$, $\varrho'$.

Nach der Voraussetzung ist $\varrho$ eine Function, die man in folgende Form bringen kann:

$$\varrho = k(y - gx - h).$$

Angenommen, die Gleichung einer der Lage nach unbestimmten Geraden sei

$$y, = Gx, + H$$

und

$$K = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + G^2 + 2G\cos\theta}};$$

so ergibt Nro. 224 für die Senkrechte $\varrho'$

$$\varrho' = K(y - Gx - H).$$

Nun fällt in die Augen, wenn $G = g$ und $H = h$ gesetzt wird, so stehen die Abstände $\varrho$ und $\varrho'$ wirklich in einem constanten Verhältniß; denn es ist $\varrho : \varrho' = k : K$.

## Von der Tangente und Normale.

**319.** Um für die Tangente eine für alle Curven passende Definition, auf welche die Rechnung sich leicht anwenden läßt, zu erhalten, betrachtet man dieselbe als eine Secante, die zuerst durch zwei Punkte der Curve geht, und sich dann um einen dieser Punkte dreht, bis der andere mit diesem zusammenfällt.

Nach dieser Auffassungsweise wollen wir nun die Gleichung der Tangente an die Ellipse suchen; die Gleichung dieser ist

[e] $$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Es seien $x'$, $y'$ und $x''$, $y''$ die Coordinaten der beiden Punkte auf der Curve: zieht man durch diese Punkte die Secante, und bezeichnet den Winkel, den sie mit der Abscissen-Axe macht, mit $S$, so ist

$$\text{tang } S = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Da die beiden Punkte auf der Ellipse liegen, so müssen ihre Coordinaten der Gleichung dieser Curve genügen; es ist daher

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \quad a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so ergibt sich:

$$a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = 0,$$

was sich auch so schreiben läßt:

$$a^2 (y' - y'') (y' + y'') + b^2 (x' - x'') (x' + x'') = 0;$$

daraus erhält man

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = - \frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')};$$

folglich hat man

$$\text{tang } S = - \frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')}.$$

Fällt der zweite Punkt mit dem ersten zusammen, so ist $x'' = x'$ und $y'' = y'$, und dann wird die Secante zur Tangente; setzt man also in dem obigen Ausdruck $x'' = x'$ und $y'' = y'$, so erhält man die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Abscissen-Axe mit der Tangente bildet, welche an die Ellipse in dem durch die Coordinaten $x'$ und $y'$ ge-

gebenen Punkte gezogen wurde. Bezeichnet man diese trigonometrische Tangente mit $\alpha$, so ist

$$\alpha = -\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Somit ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x'),$$

oder in anderer Form

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2y'^2 + b^2x'^2;$$

oder endlich, indem man beachtet, daß $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, auch in folgender:

[1] $$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2.$$

Da $\alpha$ nur einen Werth hat, so kann man durch jeden Punkt der Ellipse auch nur eine Tangente an diese Curve ziehen.

**320.** Wie bei dem Kreise, so läßt sich auch hier beweisen, daß die so bestimmte Gerade ganz außerhalb der Ellipse liegt. Denn nehmen wir noch einmal die Gleichungen

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2, \quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2,$$

und ziehen die doppelte erste von der zweiten ab, so läßt sich das Resultat in folgende Form bringen:

$$a^2(y - y')^2 + b^2(x - x')^2 = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2.$$

Die Größe $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2$ ist also für alle Punkte der Geraden, außer für den, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ sind, beständig größer als Null; folglich liegen alle diese Punkte, den Berührungspunkt ausgenommen, außerhalb der Ellipse (Nro. 302).

**321.** Die oben gefundene Formel

$$\alpha = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

zeigt, wenn man durch den Mittelpunkt eine beliebige Gerade zieht, welche die Ellipse in M und M′ (Fig. 127) trifft, daß die an diese beiden Punkte gezogenen Tangenten parallel sind. Denn beim Uebergange vom Punkte M zu M′ wird zwar das Vorzeichen der Coordinaten, aber nicht ihre Größe verändert; folglich kann auch der Werth von $\alpha$ sich nicht ändern. Der Parallelismus dieser Tangenten ergibt sich übrigens unmittelbar aus der Symmetrie der Ellipse in Beziehung auf ihre Axen.

**322.** Dieselbe Formel zeigt auch die Neigung der Tangente MT gegen die Axe BC an, wenn der Punkt M seine Lage verändert. In B und C ist $x' = \pm a$ und $y' = 0$; also ist $\alpha$ unendlich und somit die Tangente senkrecht auf BC. In D und E ist $x' = 0$ und $y' = \pm b$; also $\alpha = 0$, und daher die Tangente parallel mit BC. Bei den zwischenliegenden Punkten von B nach D nimmt $x'$ ab und $y'$ zu; also nimmt $\alpha$ negativ ab. Dieß beweist, daß der Winkel MTx stumpf ist und immer größer wird, bis die Tangente in parallele Lage mit BC kommt.

**323.** Um den Punkt zu erhalten, wo die Tangente die Axe BC (Fig. 128) trifft, setze man $y = 0$ in der Gleichung [t], so gibt diese

$$x \text{ oder } AT = \frac{a^2}{x'}.$$

Da dieser Werth b nicht enthält, so bleibt er derselbe für alle Ellipsen, welche die nämliche große Axe BC haben; er kommt daher auch dem auf dieser Axe als Durchmesser beschriebenen Kreise zu. Man verlängere deßhalb, wo es nöthig ist, MP bis zur Kreislinie, ziehe die Tangente NT an den Berührungspunkt N, und ziehe dann MT, so ist dieß die Tangente an die Ellipse im Punkte M.

Diese Construction ließe sich gleichfalls auf die kleine Axe anwenden; denn der Ausdruck für den Abstand AR ist von a unabhängig.

**324.** Der Theil der Abscissen-Axe, der zwischen der Tangente und der Ordinate des Berührungspunktes liegt, wie PT, heißt Subtangente; man erhält diese, indem man AP oder $x'$ von dem für AT gefundenen Werthe abzieht; dieß gibt

$$PT = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Wollte man die Subtangente auf der kleinen Axe suchen, so würde man einen analogen Ausdruck erhalten, nämlich

$$QR = \frac{b^2 - y'^2}{y'}.$$

**325.** Zieht man durch den Mittelpunkt und den Berührungspunkt den Halbmesser AM (Fig. 127), so ist die Gleichung desselben $y = \alpha' x$, und wegen der Bedingung, daß er durch den Berührungspunkt gehe, hat man $y' = \alpha' x'$, woraus

$$\alpha' = \frac{y'}{x'};$$

und als Gleichung der Tangente (Nro. 319) ergab sich

$$\alpha = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

Multiplicirt man nun die beiden Werthe mit einander, so ist

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2};$$

also bleibt das Product der Tangenten $\alpha$ und $\alpha'$ dasselbe, welches auch die Lage des Berührungspunktes sein mag.

**326.** Um die geometrische Tangente des Winkels AMT (Fig. 127), den der Halbmesser und die Tangente bildet, zu erhalten, darf man nur in der bekannten Formel (Nro. 221)

$$\text{tang AMT} = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'},$$

für $\alpha$ und $\alpha'$ ihre Werthe setzen. Reducirt man das Resultat mittelst der Gleichung $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, so ergibt sich

$$\text{tang AMT} = \frac{-a^2b^2}{(a^2 - b^2)\,x'y'}.$$

Nun ist es erlaubt, die Abscissen x auf der großen Axe zu nehmen, so daß $a > b$ ist; setzt man ferner voraus, der Punkt M liege im Winkel der positiven Coordinaten, so ist der vorige Werth negativ, also Winkel AMT ein stumpfer. Soll er ein rechter sein, so muß tang AMT unendlich groß werden, weßhalb $x' = 0$ oder $y' = 0$ sein muß. Aber $y'$ wird nur in den Endpunkten der Axe BC, und $x'$ nur in den Endpunkten der Axe DE zu Null: *also sind die Endpunkte der Axen die einzigen Punkte, wo die Tangente auf dem Halbmesser senkrecht steht.*

**327.** Suchen wir nun die Gleichung der Tangente, wenn sie durch einen außerhalb der Ellipse gegebenen Punkt, dessen Coordinaten $x''$ und $y''$ seien, gehen soll. In diesem Falle sind die Coordinaten des Berührungspunktes $x'$ und $y'$ unbekannt, und müssen so beschaffen sein, daß der Gleichung der Tangente

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2$$

Genüge geleistet wird, wenn man darin $x''$ für x und $y''$ für y setzt, woraus sich folgende erste Gleichung ergibt

[1] $$a^2y''y' + b^2x''x' = a^2b^2.$$

Da ferner der Berührungspunkt auf der Ellipse liegt, so ist auch

[2] $$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Diese zwei Gleichungen genügen zur Bestimmung der Unbekannten $x'$ und $y'$; und wenn sie gefunden sind, so darf man nur ihre Werthe in der Gleichung der Tangente substituiren.

Entwickelt man aus der Gleichung [1] den Werth für $y'$ als Function von $x'$, und setzt denselben in die Gleichung [2], so erhält man für $x'$ eine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Werthen für diese Unbekannte; setzt man hierauf diese zwei Werthe in die Gleichung [1], so findet man die entsprechenden Werthe für $y'$, und zwar erhält man die Formeln

$$x' = \frac{a^2 (b^2 x'' \pm y'' \sqrt{a^2 y''^2 + b^2 x''^2 - a^2 b^2})}{a^2 y''^2 + b^2 x''^2},$$

$$y' = \frac{b^2 (a^2 y'' \mp x'' \sqrt{a^2 y''^2 + b^2 x''^2 - a^2 b^2})}{a^2 y''^2 + b^2 x''^2}.$$

Liegt der gegebene Punkt außerhalb der Ellipse, so ist die Größe $a^2 y''^2 + b^2 x''^2 - a^2 b^2$ positiv (Nro. 302), und diese Werthe sind reell und ungleich; also gibt es zwei Tangenten. Liegt der gegebene Punkt auf der Ellipse, so ist die Größe $a^2 y''^2 + b^2 x''^2 - a^2 b^2$ Null, und man hat nur eine einzige Auflösung, nämlich $x' = x''$, $y' = y''$; also findet nur eine einzige Tangente statt. Ist endlich der gegebene Punkt innerhalb, so ist die Größe $a^2 y''^2 + b^2 x''^2 - a^2 b^2$ negativ, $x'$ und $y'$ sind imaginär; folglich läßt sich dann keine Tangente mehr an den Kreis ziehen.

**328.** Suchen wir nun die Gleichung der Normale. Hier ist zuerst zu beachten, daß sie von der Form

$$y - y' = \alpha' (x - x')$$

sein muß. Sie muß aber auch senkrecht auf der Tangente stehen; also ist

$$\alpha' = -\frac{1}{\alpha} = \frac{a^2 y'}{b^2 x'},$$

folglich erhält man als Gleichung der Normale

[n] $$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x').$$

**329.** Um den Punkt S (Fig. 129) zu erhalten, wo die Normale die Abscissen-Axe schneidet, muß man in der vorigen Gleichung $y = 0$ setzen, dann ergibt sich AS als entsprechender Werth für $x$, nämlich

$$AS = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'.$$

Unter der Voraussetzung, daß BC stets die große Axe sei, hat dieser Werth dasselbe Vorzeichen wie $x'$, oder mit andern Worten, der Punkt P liegt mit S immer auf derselben Seite des Mittelpunktes.

Macht man $x' = 0$, so ist $AS = 0$, also fällt S auf A; nimmt aber $x'$ positiv zu, so wächst auch AS, und der Punkt S entfernt sich vom

Mittelpunkt. Ist endlich $x' = a$, so erreicht die Entfernung AS ihr Maximum und ist gleich $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Setzt man diesen Werth gleich AN, so ist der Punkt N eine Grenze, welcher die Normalen in dem Maße näher kommen, als der Punkt M selbst sich B nähert, so daß man den Punkt M immer nahe genug an B nehmen kann, damit der Zwischenraum SN kleiner als jede gegebene Größe werde.

**330.** Zwischen der Richtung der an die Ellipse gezogenen Tangente und der Richtung der an den Berührungspunkt gezogenen Radien-Vectoren findet ein merkwürdiges Verhältniß statt, das wir nun kennen lernen wollen.

Die Tangente an der Ellipse sei RT (Fig. 130), und die an den Berührungspunkt gezogenen Radien-Vectoren FM und F'M; da die Linie MF durch den Punkt M geht, dessen Coordinaten $x'$ und $y'$ sind, so ist ihre Gleichung von der Form

$$y - y' = \alpha' (x - x').$$

Setzt man $AF = \sqrt{a^2 - b^2} = c$; so ist, da sie durch den Brennpunkt F gehen muß, $-y' = \alpha' (c - x')$, woraus

$$\alpha' = -\frac{y'}{c - x'}.$$

Für den der Tangente MT zugehörigen Werth von $\alpha$ fanden wir

$$\alpha = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

Nun ist aber

$$\text{tang FMT} = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'};$$

setzen wir daher für $\alpha$ und $\alpha'$ ihre Werthe, so ergibt sich

$$\text{tang FMT} = \frac{-\frac{b^2 x'}{a^2 y'} + \frac{y'}{c - x'}}{1 + \frac{b^2 x' y'}{a^2 y' (c - x')}}.$$

Führen wir die Rechnungen aus und beachten, daß

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2, \text{ und } a^2 - b^2 = c^2,$$

so erhält man nach einander

$$\text{tang FMT} = \frac{a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - b^2 c x'}{a^2 c y' - (a^2 - b^2)\, x' y'} = \frac{a^2 b^2 - b^2 c x'}{a^2 c y' - c^2 x' y'}$$

$$= \frac{b^2 (a^2 - c x')}{c y' (a^2 - c x')} = \frac{b^2}{c y'}.$$

Auf dieselbe Weise würde man, indem c überall in — c verwandelt würde, erhalten

$$\text{tang } F'MT = -\frac{b^2}{cy'}.$$

Sonach haben die Winkel FMT und F′MT gleiche Tangenten mit entgegengesetzten Vorzeichen; sie sind daher Supplemente zu einander. Da nun Winkel F′MT auch ein Supplement des Winkels F′MR ist, so ist FMT = F′MR. Zieht man die Normale MS, und nimmt von den rechten Winkeln TMS und RMS die gleichen Winkel TMF und RMF′ weg, so bleibt FMS = F′MS.

Also bilden die an den Berührungspunkt gezogenen Radien-Vectoren mit der Tangente auf derselben Seite dieser Linie gleiche Winkel, und die Normale halbirt den von den Radien-Vectoren unter sich gebildeten Winkel.

**331.** Diese Eigenschaften gewähren eine sehr einfache Construction, um durch einen gegebenen Punkt eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.

Nehmen wir zuerst an, der gegebene Punkt M (Fig. 131) liege auf der Ellipse. Nun ziehe man die Radien-Vectoren FM und F′M, verlängere einen derselben, z. B. F′M um MK = FM, und ziehe FK: so ist die Linie MT, welche senkrecht auf FK steht, die verlangte Tangente. Denn nach der Construction ist das Dreieck KFM gleichschenklig, und Winkel KMT = TMF; es ist aber KMT = RMF′, also TMF = RMF′; folglich RT die Tangente.

Man kann sich übrigens überzeugen, daß alle Punkte dieser Geraden, außer M, außerhalb der Ellipse liegen. Denn für jeden andern Punkt, z. B. R, wäre F′R + RK > F′M + MK; aber F′M + MK ist gleich der großen Axe 2a; also liegt der Punkt R außerhalb der Ellipse (Nro. 310).

**332.** Bemerkung. Aus der Construction ist klar, daß der Punkt O, wo MT die FK schneidet, in der Mitte von FK liegt; da ferner der Punkt A die F′F halbirt, so muß AO parallel mit F′K und gleich $\frac{1}{2}$F′K sein; nun ist F′K = 2a, also AO = a.

Fällt man daher von den Brennpunkten Senkrechte an die Tangenten der Ellipsen, so ist der Abstand der Fußpunkte dieser Senkrechten von dem Mittelpunkt der Ellipse constant und gleich der halben großen Axe; so daß der geometrische Ort aller dieser Punkte eine auf der großen Axe als Durchmesser beschriebene Kreislinie ist.

**333.** Nehmen wir nun an, der gegebene Punkt T (Fig. 132) liege außerhalb der Ellipse. Wäre die Aufgabe gelöst, so würde TM die Tangente und M der Berührungspunkt sein, und würde man aus dem

Brennpunkt F' die F'MK gleich der großen Axe 2a, und aus dem Brennpunkt F die FK ziehen, so wäre die Tangente TM senkrecht auf der Mitte von FK, und TF=TK; folglich muß der Punkt K im Durchschnitte zweier Kreise liegen, von denen der eine aus F' mit einem Halbmesser gleich 2a, und der andere aus T mit einem Halbmesser gleich dem Abstande TF beschrieben wird. Da nun der Punkt K bekannt ist, so ziehe man F'K und KF, dann TR senkrecht auf KF: so ist diese Senkrechte die Tangente an der Ellipse, und der Punkt M, wo sie die F'K schneidet, der Berührungspunkt.

Denn nach dieser Construction ist $TK = TF$, also steht RT senkrecht auf der Mitte von KF, daher $MK = MF$ und somit $F'M + MF = 2a$, was bereits beweist, daß der Punkt M auf der Ellipse liegt; ferner ist Winkel $FMT = TMK = RMF'$, also ist TM Tangente.

**334.** Da sich zwei Kreise in zwei Punkten schneiden können, so können hier auch zwei Tangenten vorkommen. Dieß ist der Fall, wenn der Punkt T außerhalb der Ellipse liegt; wodurch die Bedingungen für den Durchschnitt der Kreise erfüllt sind. Denn zieht man F'T, so ist im Dreieck F'TF die $F'T < FF' + FT$, und um so mehr $F'T < 2a + FT$; also ist 1) der Abstand der Mittelpunkte kleiner als die Summe der Halbmesser. Dasselbe Dreieck gibt ferner $FT < F'F + F'T$, und um so mehr

$$FT < 2a + F'T.$$

Außerdem ist, da T außerhalb der Ellipse liegt, $2a < F'T + FT$ (Nro. 310); folglich ist 2) jeder Halbmesser kleiner als der Abstand der Mittelpunkte F'T nebst dem andern Halbmesser TF. Somit schneiden sich die Kreise, und es ergeben sich zwei Tangenten.

Läge der Punkt T auf der Ellipse (Fig. 133), so wäre der größere Halbmesser 2a gleich dem Abstand der Mittelpunkte F'T nebst dem kleinern Halbmesser TF; also müßten sich die Kreise von innen berühren, und es würde nur eine Tangente stattfinden.

Läge der Punkt T innerhalb (Fig. 134), so wäre der größere Halbmesser 2a größer als die Entfernung der Mittelpunkte F'T nebst dem andern Halbmesser TF; einer der Kreise würde also ganz innerhalb des andern liegen, und es wäre keine Tangente mehr möglich.

## Von den Durchmessern.

**335.** Es wurde bereits bemerkt, daß bei den Linien der zweiten Ordnung der Durchmesser eine Gerade ist, welche alle mit derselben Richtung parallelen Sehnen halbirt. Auf diese Definition läßt sich die Rechnung leicht anwenden und daraus die Gleichung eines beliebigen Durchmessers ableiten. Zu diesem Zweck darf man nur die allgemeine Gleichung

einer Sehne nehmen, und darauf den geometrischen Ort ihrer Mitte unter der Voraussetzung suchen, daß sie sich parallel mit sich selbst in der Ebene der Curve hinbewegt.

Es sei nun

$$y = \delta x + \beta$$

die Gleichung einer beliebigen Sehne FG (Fig. 135). Verbindet man sie mit der der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

so ergeben sich leicht die Coordinaten der Punkte F und G, wo die Gerade die Curve trifft. Durch die Elimination von y erhält man

$$x^2 + \frac{2\delta\beta a^2}{b^2 + a^2\delta^2}\,x + \frac{(\beta^2 - b^2)\,a^2}{b^2 + a^2\delta^2} = 0,$$

in welcher Gleichung die Wurzeln gerade die Abscissen AH und AK der Punkte F und G sind. Es ist leicht zu ersehen, daß die Abscisse AP des Mittelpunktes I von FG gleich $\frac{1}{2}$ (AH + AK) ist; bezeichnet man also die Abscisse AP mit x, die der Punkte F und G mit x′ und x″, so erhält man

$$x = \frac{x' + x''}{2}.$$

Nun ist bekannt, daß in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades $x^2 + px + q = 0$, die Summe der beiden Wurzeln dem Coefficienten des zweiten Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich ist; es ist also

$$x' + x'' = -\frac{2\delta\beta a^2}{b^2 + a^2\delta^2},$$

also ist für die Abscisse AP

$$x = -\frac{\delta\beta a^2}{b^2 + a^2\delta^2}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung der Sehne, so findet man für die entsprechende Ordinate IP,

$$y = \frac{\beta b^2}{b^2 + a^2\delta^2}.$$

Dividirt man nun, um $\beta$ zu eliminiren, diese beiden Werthe durch einander, so ist wirklich

$$\frac{y}{x} = \frac{-b^2}{a^2\delta^2}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{-b^2}{a^2\delta}\,x.$$

Diese Gleichung enthält noch $\delta$; folglich stellt sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Sehnen vor, für welche $\delta$ constant ist, d. h. aller mit derselben Richtung parallelen Sehnen. Sie ist daher die Gleichung eines Durchmessers, und da die durch sie vorgestellte Gerade durch

den Anfangspunkt, der hier der Mittelpunkt der Curve ist, geht, so folgt daraus, daß alle Durchmesser der Ellipse durch den Mittelpunkt gehen.

Umgekehrt ist jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade ein Durchmesser: denn läßt man $\delta$ beliebig wachsen, so nimmt in der Gleichung des Durchmessers der Coefficient von x selbst alle möglichen, positiven oder negativen Werthe an.

**336.** Zwischen der Richtung eines Durchmessers und der durch denselben halbirten Sehnen findet ein merkwürdiges Verhältniß statt. Es sei wieder

$$y = \delta x + \beta$$

die Gleichung einer beliebigen Sehne, und

$$y = \delta' x$$

die des entsprechenden Durchmessers. Nun erhielt man so eben

$$\delta' = -\frac{b^2}{a^2\delta};$$

hieraus ergibt sich zwischen den Tangenten $\delta$ und $\delta'$ die sehr einfache Gleichung

[1] $$\delta\delta' = -\frac{b^2}{a^2},$$

mittelst welcher immer eine Tangente aus der andern abgeleitet werden kann.

**337.** Aus dieser Gleichung ergeben sich mehrere Folgerungen:

1) Zieht man durch den Endpunkt des Durchmessers eine Tangente MT an die Ellipse (Fig. 135), und bezeichnet die trigonometrische Tangente des Winkels MTx mit $\alpha$, so findet (Nro. 325) zwischen $\alpha$ und $\delta'$ folgende Gleichung statt:

$$\alpha\delta' = -\frac{b^2}{a^2};$$

also ist $\alpha\delta' = \delta\delta'$, woraus $\alpha = \delta$. Folglich sind die Sehnen, welche ein Durchmesser halbirt, mit der durch den Endpunkt dieses Durchmessers gezogenen Tangente parallel.

2) Da das Product $\delta\delta'$ constant und gleich $-\frac{b^2}{a^2}$ ist, so kann es nicht gleich $-1$ werden, außer für den Kreis, wo $a = b$; also sind die wirklichen Coordinaten-Axen die einzigen Axen der Curve, da kein anderer Durchesser auf den Sehnen, die er halbirt, senkrecht steht.

3) Zieht man einen zweiten Durchmesser, dessen Gleichung $y = \delta x$ sei, so sind die von ihm halbirten Sehnen mit dem ersten parallel: denn

stellt $y = \delta''x + \beta$ die allgemeine Gleichung dieser Sehnen vor, so muß $\delta\delta'' = -\frac{b^2}{a^2}$ sein; folglich $\delta\delta' = \delta\delta''$, woraus $\delta'' = \delta'$. Haben daher zwei Durchmesser die Gleichungen

$$y = \delta x, \quad y = \delta' x,$$

und findet bei denselben die Gleichung [1] statt, so halbirt jeder die mit dem andern parallelen Sehnen. Wegen dieser Eigenschaft heißen sie conjugirte (zusammengehörige, zugeordnete) Durchmesser.

### Von den Ergänzungs-Sehnen.

**338.** Diejenigen Sehnen, welche von einem Punkte der Ellipse an die Endpunkte eines Durchmessers gezogen werden, heißen Ergänzungs-Sehnen, wie GM und G'M (Fig. 136).

Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes G mit $x'$, $y'$, so sind $-x'$ und $-y'$ die von G'; werden ferner die des Punktes M mit x, y, und die trigonometrischen Tangenten der von den Ergänzungs-Sehnen mit der Axe BC gebildeten Winkel MHx und MLx mit $\gamma$ und $\gamma'$ bezeichnet, so sind die Werthe für $\gamma$ und $\gamma'$ (Nro. 214)

$$\gamma = \frac{y - y'}{x - x'}, \qquad \gamma' = \frac{y + y'}{x + x'}.$$

Durch Multiplication von $\gamma$ mit $\gamma'$ ergibt sich

$$\gamma\gamma' = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2}.$$

Da nun die beiden Punkte M und G auf der Ellipse liegen, so finden zwischen x und y, und zwischen $x'$ und $y'$ die zwei Gleichungen statt:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \qquad y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2),$$

und indem man sie von einander abzieht, erhält man

$$y^2 - y'^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x^2 - x'^2):$$

folglich ist

$$[1] \qquad \gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Diese Bedingung muß also immer erfüllt sein, wenn zwei Sehnen Ergänzungs-Sehnen sind.

Umgekehrt müssen, wenn dieser Bedingung genügt ist, zwei Sehnen, welche durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, oder zwei Sehnen, welche von demselben Punkt der Ellipse ausgehen, jedesmal Ergänzungs-Sehnen sein.

Denn angenommen, sie gehen durch G und G', und ihr Durchschnitt N falle nicht auf die Ellipse, so sei M der Punkt, wo G'N die Ellipse trifft, und man ziehe MG. Da MG und MG' Ergänzungs-Sehnen sind, so ist

$$\text{tang MLx} \times \text{tang MHx} = -\frac{b^2}{a^2};$$

aber nach der Voraussetzung ist

$$\text{tang MLx} \times \text{tang NKx} = -\frac{b^2}{a^2};$$

also muß tang MHx = tang NKx sein; folglich fallen NG und MG zusammen.

Nehmen wir nun an, es sei

$$\text{tang MLx} \times \text{tang MHx} = -\frac{b^2}{a^2},$$

so muß die Linie GAG' eine gerade sein; denn wäre dieß nicht der Fall, und wäre z. B. AO die Verlängerung von G'A, so ziehe man MO; dann ist

$$\text{tang MLx} \times \text{tang MIx} = -\frac{b^2}{a^2};$$

somit erhält man wegen der Voraussetzung wieder tang MHx=tang MIx, d. h. MO fällt mit MG, und AO mit AG zusammen.

**339.** Die Gleichung [1] ist dadurch merkwürdig, daß sie zeigt, daß das Product $\gamma\gamma'$ nicht nur constant bleibt, wenn man die Richtung der durch die Endpunkte eines Durchmessers gezogenen Ergänzungs-Sehnen ändert, sondern auch dann, wenn diese Sehnen durch die Endpunkte eines neuen Durchmessers gehen. Daraus folgt: wenn zwei Ergänzungs-Sehnen BN und CN (Fig. 137) durch die Endpunkte eines Durchmessers, z. B. der Axe BC, gehen, so sind die mit diesen Sehnen durch die Endpunkte irgend eines andern Durchmessers GG' gezogenen Parallelen ebenfalls Ergänzungs-Sehnen dieses letztern Durchmessers, und diese neuen Sehnen GM und G'M bilden genugsam verlängert, dieselben Winkel mit einander, wie die ersten.

**340.** Für die Tangenten $\alpha$ und $\alpha'$ der durch die Tangente MT (Fig. 138) und den halben Durchmesser AM mit der Axe BC gebildeten Winkel ergab sich (Nro. 325) dasselbe Product, wie für $\gamma\gamma'$; also ist

$\alpha\alpha' = \gamma\gamma'$. Daraus folgt: wenn $\alpha' = \gamma'$, so ist auch $\alpha = \gamma$, oder mit andern Worten: wenn man an den Berührungspunkt den halben Durchmesser AM, und durch den Endpunkt eines beliebigen Durchmessers die Sehne CN parallel mit AM, hierauf die Ergänzungs-Sehne NB zieht, so ist die Tangente MT mit dieser letztern Sehne parallel.

Mittelst dieser Construction findet man die an einen gegebenen Punkt der Ellipse zu ziehende Tangente, und dieselbe läßt sich leicht auf den Fall anwenden, wo die Tangente mit einer gegebenen Geraden HK parallel sein soll; denn man zieht dann BN parallel mit HK und die Ergänzungs-Sehne CN, hierauf den Halbmesser AM parallel mit CN und endlich MT parallel mit BN: so ist MT die gesuchte Tangente.

**341.** Für zwei conjugirte Durchmesser, deren Gleichungen

$$y = \delta x, \quad y = \delta' x'$$

sind, wurde (Nro. 337) auch zwischen $\delta$ und $\delta'$ dieselbe Gleichung gefunden, wie zwischen $\gamma$ und $\gamma'$. Daraus folgt noch, daß zwei mit Ergänzungs-Sehnen parallele Durchmesser immer conjugirte sind, und daß umgekehrt zwei conjugirte Durchmesser mit Ergänzungs-Sehnen immer parallel laufen.

Darnach lassen sich zwei conjugirte Durchmesser, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden, auf sehr einfache Weise in einer Ellipse construiren, die schon beschrieben, oder deren Mittelpunkt bekannt ist. Man zieht (Fig. 139) einen beliebigen Durchmesser AB, auf welchem man einen Kreisbogen ACB, der den gegebenen Winkel enthält, beschreibt, und zieht durch einen der Punkte, wo dieser Bogen die Ellipse schneidet, die Ergänzungs-Sehnen CA und CB: so sind diese Sehnen mit den gesuchten Durchmessern parallel, und indem man durch den Mittelpunkt mit denselben die Parallelen EE′ und FF′ zieht, erhält man diese Durchmesser.

In dem an der Figur dargestellten Fall trifft der den gegebenen Winkel enthaltende Bogen ACB die Ellipse nur in einem Punkte C (die Punkte A und B selbst ausgenommen); aber die Ergänzung ADB dieses Bogens schneidet die Ellipse in einem weitern Punkte D, wodurch sich eine zweite Lösung der Aufgabe ergibt. Zwar ist der Winkel ADB dem gegebenen Winkel nicht gleich, aber er ist offenbar das Supplement desselben. Nun bilden zwei mit den Sehnen AD und BD parallele Durchmesser vier Winkel mit einander, von denen zwei dem Winkel ADB, die zwei andern aber dem Supplements-Winkel gleich sind; folglich genügen auch diese neuen Durchmesser der Aufgabe.

Es ließe sich über diese Construction noch Mehreres sagen, wir beschränken uns indessen auf die Bemerkung, daß die auf AB beschriebene Kreislinie keine weitere conjugirte Durchmesser geben kann; denn der Kreis

und die Ellipse können nicht mehr als vier Punkte gemeinschaftlich haben, da ihre Gleichungen, die nach x und y vom zweiten Grade sind, zusammen nicht mehr als vier Auflösungen zulassen.

**342.** In jeder Ellipse sind die Winkel der Ergänzungs-Sehnen immer zwischen gewissen Grenzen enthalten, und dasselbe muß auch bei denen der conjugirten Durchmesser der Fall sein. Um diese Grenzen einfacher zu bestimmen, wollen wir, was ja (Nro. 339) gestattet ist, annehmen, die Sehnen gehen durch die Endpunkte der Axe BC (Fig. 140). Nun erhält man leicht

$$\text{tang MBx} = \frac{y}{x-a}, \qquad \text{tang MCx} = \frac{y}{x+a},$$

und somit

$$\text{tang CMB} = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1+\frac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2\,ay}{y^2+x^2-a^2}.$$

Da aber der Punkt M auf der Ellipse liegt, so ist

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

woraus

$$x^2 - a^2 = -\frac{a^2y^2}{b^2},$$

also

$$\text{tang CMB} = \frac{-2ab^2}{(a^2-b^2)\,y}.$$

Ist BC die große Axe, und liegt der Punkt M über dieser Axe, so ist der vorstehende Werth negativ, was beweist, daß der Winkel CMB stumpf ist. Dieser Werth erreicht, vom Vorzeichen abgesehen, sein Minimum, wenn $y = b$; dann liegt der Punkt M im Endpunkt D der kleinen Axe, und die Ergänzungssehnen sind BD und CD. Der stumpfe Winkel CDB ist also der größte, und sein Supplement BDK der kleinste Winkel, den zwei Ergänzungs-Sehnen machen können. Für den Winkel CDB als Maximum ist

$$\text{tang CDB} = \frac{-2ab}{a^2-b^2}.$$

Auf beiden Seiten der kleinen Axe DE gibt es zwei Punkte M und N, für welche y denselben Werth hat; es gibt also auch zwei Punkte, an welchen die von den Ergänzungs-Sehnen gebildeten Winkel CMB und CNB einander gleich sind. Da es überdieß nur zwei Punkte gibt, für welche y

denselben Werth hat, so gibt es auch über BC nur zwei Systeme von Ergänzungs-Sehnen, die unter sich einen gegebenen Winkel bilden.

Es gibt also zwei Systeme conjugirter Durchmesser, die sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, und nie mehr.

Diese zwei Systeme reduciren sich in zwei Fällen auf ein einziges: 1) wenn die Durchmesser mit den Sehnen BD und CD parallel sind; 2) wenn sie die Axen der Ellipse selbst sind.

Ist endlich der gegebene Winkel größer als der stumpfe Winkel BDC, oder kleiner als der spitzige BDK, so gibt es gar keine conjugirten Durchmesser mehr.

**343.** Da die Axen der Ellipse nichts anderes sind, als rechtwinklige conjugirte Durchmesser, so beschreibt man bei ihrer Construction, wenn der Mittelpunkt bekannt ist, auf einem beliebigen Durchmesser einen Kreis, zieht von einem der Durchschnittspunkte Sehnen an die Endpunkte des Durchmessers, und durch den Mittelpunkt Parallelen mit diesen Sehnen: so sind diese Parallelen die verlangten Axen.

Schon die Symmetrie der Ellipse in Beziehung auf ihre Axen rechtfertigt diese Construction. Denn aus dieser Symmetrie folgt, daß ein aus dem Mittelpunkt A (Fig. 141) mit einem beliebigen Halbmesser AM beschriebener Kreis die Curve in vier Punkten schneidet, welche je zwei für jede Axe symmetrisch liegen, und daß die durch diese Punkte gebildete Figur MNQP ein Rechteck ist, dessen Seiten mit den Axen parallel sind; zieht man daher durch den Mittelpunkt mit den Seiten dieses Rechtecks die Parallelen BC und DE, so sind dieß die Axen der Ellipse.

**344.** In den vorigen Constructionen wurde der Mittelpunkt der Ellipse als bekannt angenommen. Bei gegebener Curve ist dieser Punkt leicht zu finden; man darf nur zwei parallele Sehnen EF und GH (Fig. 142) und durch ihre Halbirungspunkte die Gerade PQ ziehen, so liegt der Mittelpunkt A auf der Mitte dieser Linie; denn PQ ist ein Durchmesser, und jeder Durchmesser geht durch den Mittelpunkt und wird von diesem halbirt.

### Die Ellipse auf ihre conjugirten Durchmesser bezogen ꝛc.

**345.** Die bis jetzt angewandte Gleichung

$$[e] \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

drückt die Ellipse in Beziehung auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen aus. Bezieht man diese Curve auf schiefe Coordinaten, und behält ihre Gleichung dieselbe Form bei, enthält sie nämlich blos die Quadrate der Variablen

und einen constanten Theil, so sind die neuen Axen die conjugirten Durchmesser; denn jeder Werth für eine der Coordinaten ergibt für die andere zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Dieser Umstand würde bei einer andern Form der Gleichung nicht stattfinden; man gelangt also von der Gleichung [e] zu der mit conjugirten Durchmessern, indem man mittelst der Transformation der Coordinaten alle Axen-Systeme sucht, für welche die Gleichung der Ellipse dieselbe Form beibehält.

Nehmen wir nun die Formeln (Nro. 190), mittelst welcher man von rechtwinkligen Axen auf schiefwinklige kommt, und lassen darin die constanten Glieder weg, da der Anfangspunkt im Mittelpunkt der Ellipse liegen muß, so ist

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \quad y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'.$$

Substituiren wir diese Werthe in [e], und setzen zur Abkürzung

$$A = a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha',$$
$$B = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha,$$
$$C = a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha',$$

so ergibt sich

[1] $$Ay'^2 + Bx'^2 + 2Cx'y' = a^2b^2.$$

Damit diese Gleichung $x'$ und $y'$ nur im Quadrat enthalte, müssen wir die unbestimmten Werthe $\alpha$ und $\alpha'$ benützen, um das Rechteck $x'y'$ wegzuschaffen. Setzen wir daher

[2] $$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0,$$

so reducirt sich die Gleichung [1] auf folgende:

[3] $$Ay'^2 + Bx'^2 = a^2b^2.$$

**346.** Die Ellipse ist nun wirklich auf conjugirte Durchmesser bezogen. Um die Länge derselben FG und HK (Fig. 143) zu kennen, setze man in dieser Gleichung nach einander $y = 0$, und $x = 0$. Bezeichnet man AF mit $a'$, und AH mit $b'$, so ist

[4] $$a'^2 = \frac{a^2b^2}{B} = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha},$$

[5] $$b'^2 = \frac{a^2b^2}{A} = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'}.$$

Setzt man also für A und B ihre Werthe $\frac{a^2b^2}{b'^2}$, $\frac{a^2b^2}{a'^2}$, so verwandelt sich die Gleichung [3] in

[e,] $$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2.$$

**347.** Wird die Gleichung [2] durch $a^2 \cos\alpha \cos\alpha'$ dividirt, so ergibt sie

$$[6] \qquad \text{tang}\,\alpha \,\text{tang}\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Nun ist klar, daß, wenn man der Axe Ax' eine beliebige Lage gibt, oder mit andern Worten $\alpha$ bestimmt, sich sogleich ein reeller Werth für $\alpha'$ angeben läßt; also hat jeder Durchmesser seinen conjugirten. Da ferner die vorige Gleichung dieselbe ist, wie die, welche die Richtungen zweier Ergänzungs-Sehnen unter sich verbindet (Nro. 338), so muß, wenn die eine dieser Sehnen mit dem ersten Durchmesser parallel ist, die andere Sehne mit dem zweiten Durchmesser auch parallel sein. Man kann daher überhaupt sagen, daß zwei conjugirte Durchmesser mit zwei Ergänzungs-Sehnen immer parallel sind, und daß umgekehrt zwei mit Ergänzungs-Sehnen parallele Durchmesser immer auch conjugirte sind. Diese Eigenschaften sind schon aus Nro. 341 bekannt.

**348.** Setzt man $\sin\alpha = 0$ und $\cos\alpha' = 0$, wodurch x' mit x, und y' mit y zusammenfällt, so wird der Gleichung [2] Genüge geleistet; denn die Axen der Ellipse sind conjugirte Durchmesser. Wir wissen sogar, daß sie das einzige System rechtwinkliger conjugirter Durchmesser bilden, das die Ellipse (Nro. 337) enthält. Dieß läßt sich leicht wieder darthun; denn angenommen, sie enthalte noch andere, so müßte für diese Durchmesser $\alpha' = 90 + \alpha$ sein, und daher

$$\sin\alpha' = \sin(90^0 + \alpha) = \quad \sin(90^0 - \alpha) = \quad \cos\alpha,$$
$$\cos\alpha' = \cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Würde man diese Werthe in der Gleichung [2] substituiren, so hätte man

$$(a^2 - b^2)\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$

und da man über die Größen a und b nicht verfügen kann, so läßt sich dieser Gleichung nur genügen, indem man $\sin\alpha = 0$ oder $\cos\alpha = 0$ setzt, welche Voraussetzungen gerade auf die ursprünglichen Axen zurückführen.

Würde sich die Ellipse in einen Kreis verwandeln, so wäre $a = b$, und die letzte Gleichung von selbst befriedigt, welches auch der Werth von $\alpha$ sein würde. Also stehen im Kreise alle conjugirten Durchmesser senkrecht auf einander, während in der Ellipse nur die Axen diese Eigenschaft haben.

**349.** Für den Fall, daß die zusammengehörigen Durchmesser gleich sein sollten, hätte man, indem man $a'^2 = b'^2$ setzt,

$$a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'.$$

Ersetzt man $\cos^2\alpha$ durch $1-\sin^2\alpha$, und $\cos^2\alpha'$ durch $1-\sin^2\alpha'$, so verwandelt sich diese Gleichung leicht in

$$(a^2 - b^2)\,(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha') = 0,$$

woraus folgt

$$\sin^2\alpha' = \sin^2\alpha, \qquad \cos^2\alpha' = \cos^2\alpha,$$
$$\operatorname{tang}^2\alpha' = \operatorname{tang}^2\alpha, \qquad \operatorname{tang}\alpha' = \pm \operatorname{tang}\alpha.$$

Nach der Gleichung [6] müssen aber $\operatorname{tang}\alpha$ und $\operatorname{tang}\alpha'$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; man muß daher $\operatorname{tang}\alpha' = -\operatorname{tang}\alpha$ nehmen. Dann heißt die Gleichung [6]

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{woraus } \operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{b}{a}.$$

Das obere Vorzeichen bezieht sich auf einen der Durchmesser, das andere auf den ihm conjugirten. Zieht man nun die Sehnen BD und CD (Fig. 144) durch die Endpunkte der Axen, so ist

$$\operatorname{tang} DCx = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tang} DBx = -\frac{b}{a};$$

um daher gleiche conjugirte Durchmesser zu erhalten, muß man sie mit diesen Sehnen parallel ziehen.

Bezieht man die Ellipse auf diese beiden Durchmesser, so ist ihre Gleichung

$$y'^2 + x'^2 = a'^2,$$

welche der des Kreises, wenn er auf zwei rechtwinklige Durchmesser bezogen wird, analog ist.

**350.** Ueber die conjugirten Durchmesser der Ellipse sind hier zwei wichtige Lehrsätze anzuführen:

**Lehrsatz I.** In der Ellipse ist das aus zwei conjugirten Durchmessern gebildete Rechteck so groß, als das Rechteck aus den Axen.

Multiplicirt man die Werthe für $a'^2$ und $b'^2$ (Nro. 346) mit einander, so ist

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^4\sin^2\alpha\sin^2\alpha' + b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha' + a^2b^2(\sin^2\alpha'\cos^2\alpha + \cos^2\alpha'\sin^2\alpha)}.$$

Zwischen $\alpha$ und $\alpha'$ hat man aber die Gleichung [2], und wenn man ihre beiden Glieder ins Quadrat erhebt, so ergibt sie

$$a^4\sin^2\alpha\,\sin^2\alpha' + b^4\cos^2\alpha\,\cos^2\alpha' = -2a^2b^2\sin\alpha\,\sin\alpha'\,\cos\alpha\,\cos\alpha';$$

also erhält man für das Product $a'^2b'^2$

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^2b^2(\sin^2\alpha'\cos^2\alpha + \cos^2\alpha'\sin^2\alpha) - 2a^2b^2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\alpha\cos\alpha'}$$

$$= \frac{a^2b^2}{(\sin\alpha'\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha')^2} = \frac{a^2b^2}{\sin^2(\alpha' - \alpha)};$$

und hieraus folgt

$$a'b'\sin(\alpha' - \alpha) = ab.$$

Nun wird aber der Winkel $\alpha' - \alpha$ von den conjugirten Durchmessern FG und HK (Fig. 145) gebildet; also ist in dem Parallelogramm AFLH die Höhe $LI = b'\sin(\alpha' - \alpha)$, und sein Flächeninhalt ist gleich $a'b'\sin(\alpha' - \alpha)$. Somit ist dieser Flächeninhalt constant und gleich dem Rechteck ab der halben Axen, was zu beweisen war.

**Lehrsatz II.** In der Ellipse ist die Summe der Quadrate der beiden conjugirten Durchmesser constant und gleich der Summe der Quadrate der beiden Axen.

Nehmen wir noch einmal die Gleichungen [2], [4], [5],

[2] $$a^2\sin\alpha\sin\alpha' + b^2\cos\alpha\cos\alpha' = 0,$$

[4] $$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha},$$

[5] $$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'},$$

und eliminiren daraus die Winkel $\alpha$ und $\alpha'$, so verfällt man auf die Gleichung $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, wodurch der Lehrsatz bewiesen ist.

Um diese Elimination auszuführen, zieht man zuerst aus Gleichung [4] in Verbindung mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, die Werthe für $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$, nämlich

$$\sin^2\alpha = \frac{b^2(a^2 - a'^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}, \quad \cos^2\alpha = \frac{a^2(a'^2 - b^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}.$$

Da die Gleichung [5] aus [4] abgeleitet wird, indem man $a'$ in $b'$ und $\alpha$ in $\alpha'$ verwandelt, so leitet man $\sin^2\alpha'$ und $\cos^2\alpha'$ aus den vorigen Werthen ab, indem man darin $a'$ in $b'$ verwandelt. So erhält man

$$\sin^2\alpha' = \frac{b^2(a^2 - b'^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}, \quad \cos^2\alpha' = \frac{a^2(b'^2 - b^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}.$$

Nehmen wir nun die Gleichung [2], schaffen das zweite Glied auf die rechte Seite, und erheben sie ins Quadrat, so ergibt sich

$$a^4\sin^2\alpha\sin^2\alpha' = b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'.$$

Setzen wir für die trigonometrischen Linien ihre Werthe, so ergibt sich nach einander mittelst leicht bemerkbarer Reductionen

$$(a^2-a'^2)\,(a^2-b'^2) = (a'^2-b^2)\,(b'^2-b^2),$$
$$a^4-a^2a'^2-a^2b'^2 = -a'^2b^2-b'^2b^2+b^4,$$
$$a^4-b^4 = a'^2\,(a^2-b^2)+b'^2\,(a^2-b^2),$$
$$a^2+b^2 = a'^2+b'^2,$$

welches Resultat dem vorstehenden Lehrsatze entspricht.

**351.** Die drei Gleichungen [2], [4], [5] reichen zur Bestimmung der sechs Größen a, b, a', b', $\alpha$, $\alpha'$ hin, wenn drei davon gegeben sind; sie können daher zur Auflösung aller Aufgaben über die conjugirten Durchmesser dienen.

Es ist jedoch oft bequemer, anstatt dieser Gleichungen die folgenden, welche aus ihnen abgeleitet sind, zu gebrauchen:

$$\operatorname{tang}\alpha\,\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2},$$
$$a'b'\sin(\alpha'-\alpha) = ab,$$
$$a'^2+b'^2 = a^2+b^2.$$

**352.** Nehmen wir noch einmal die Gleichung [e], und lassen der Einfachheit wegen bei x' und y' die Accente weg, so ist

[e] $$a'^2y^2+b'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

Da diese Gleichung durchaus von derselben Form ist, wie die auf die Axen bezogene, so sind auch alle von der Neigung der Ordinaten unabhängigen Eigenschaften für die Axen der Ellipse und für ihre conjugirten Durchmesser gemeinschaftlich. Man kann daher folgende Sätze als bewiesen betrachten:

1) Die Größe $a'^2y^2+b'^2x^2-a'^2b'^2$ ist Null, oder positiv oder negativ, je nachdem ein Punkt auf der Ellipse, oder außerhalb oder innerhalb derselben liegt (Nro. 302).

2) Die Quadrate der mit einem Durchmesser parallelen Ordinaten verhalten sich wie das Product aus den Abschnitten, die sie auf dem conjugirten Durchmesser bilden (Nro. 301).

3) Bezeichnet man das Sinus-Verhältniß, das in der Gleichung $y = \alpha x+\beta$ dem Coefficienten von x gleich ist, mit $\alpha$; so erhält man (Nro. 319) als Werth von $\alpha$ für die Tangente, welche in dem Punkt, dessen Coordinaten x' und y' sind, an die Ellipse gezogen wird,

$$\alpha = -\frac{b'^2x'}{a'^2y'};$$

und als Gleichung der Tangente erhält man

$$a'^2y'y + b'^2x'x = a'^2b'^2.$$

Die Subtangente ist (Nro. 324)

$$PT = \frac{a'^2 - x'^2}{x'},$$

und man hat immer zwischen den Werthen für $\alpha$ und $\alpha'$, in Beziehung auf die Tangente und den an den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser die merkwürdige Gleichung (Nro. 325)

$$\alpha\alpha' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

4) Ist $y = \delta x + \beta$ die Gleichung einer beliebigen Sehne, und $y = \delta' x$ die eines Durchmessers, der alle parallelen Sehnen halbirt, so hat man die Gleichung (Nro. 336)

$$\delta\delta' = -\frac{b'^2}{a'^2},$$

welche auch noch für zwei conjugirte Durchmesser, deren Gleichungen $y = \delta x$ und $y = \delta' x$ sind (Nro. 337), so wie auch für zwei Ergänzungs-Sehnen gilt, welche an die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers gezogen werden (Nro. 338).

**353.** Will man an die auf zwei conjugirte Durchmesser bezogene Ellipse, deren Gleichung

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$$

ist, Tangenten durch einen außerhalb liegenden Punkt N (Fig. 146), dessen Coordinaten $x''$ und $y''$ sind, ziehen, so hat man (Nro. 327) zwischen den unbekannten Coordinaten jedes Berührungspunktes die beiden Gleichungen

$$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2,$$
$$a'^2y''y' + b'^2x''x' = a'^2b'^2.$$

Die zweite zeigt, daß die Gerade, welche der Gleichung

$$a'^2y''y' + b'^2x''x = a'^2b'^2$$

genügt, durch die Berührungspunkte geht. Um diese Gerade zu construiren, mache man nach einander $y = 0$, $x = 0$, so erhält man die Entfernungen des Anfangspunktes von den Punkten, wo sie die beiden Durchmesser schneidet, nämlich:

$$AT = \frac{a'^2}{x''}, \qquad AR = \frac{b'^2}{y''}.$$

Betrachten wir nun eine der Entfernungen, z. B. AT, so sehen wir, daß sie $y''$ nicht enthält: zieht man daher die Gerade NL parallel mit Ay,

und aus einem beliebigen andern Punkte dieser Linie zwei Tangenten an die Ellipse, so schneidet die Secante, welche durch die Berührungspunkte geht, den Durchmesser Ax auch in demselben Punkte T. Dieser Punkt ändert sich nur dann, wenn sich x'' ändert.

Zieht man daher aus jedem Punkte einer gegebenen Geraden je zwei Tangenten an die Ellipse, und verbindet die beiden Berührungspunkte, so treffen alle dadurch entstehenden Secanten in demselben Punkte auf dem Durchmesser zusammen, mit dessen conjugirtem die gegebene Gerade parallel lauft.

Und umgekehrt, wenn man durch einen in der Ebene einer Ellipse gegebenen Punkt mehrere Secanten, und durch die Punkte, wo jede Secante die Curve trifft, je zwei Tangenten zieht, so ist der Ort der Durchschnittspunkte je zwei solcher Tangenten eine Gerade, welche mit demjenigen Durchmesser parallel lauft, dessen conjugirter durch den gegebenen Punkt geht.

**354.** Die Uebereinstimmung der Gleichungen [e] und [e,] gewährt noch ein einfaches Mittel, um eine Ellipse durch Punkte zu beschreiben, wenn zwei conjugirte Durchmesser 2a', 2b', und der von ihnen gebildete Winkel bekannt ist. Man beschreibe z. B. auf dem ersten eine Ellipse, dessen Axen 2a' und 2b' sind; dann bringe man (Fig. 147) die Ordinaten MP, M'P', .... ohne ihre Länge zu verändern, in eine dem gegebenen Winkel gleiche Neigung: so gehören die dadurch gefundenen Punkte N, N', ... der Curve an.

## Quadratur der Ellipse.

**355.** Beschreibt man aus dem Mittelpunkt der Ellipse mit der halben Axe AB als Halbmesser (Fig. 148) einen Kreis, und bezeichnet AB mit a, die darauf senkrechte halbe Axe AD mit b, und die im nämlichen Punkte P errichteten Ordinaten NP und MP mit y und Y, so ist nach (Nro. 303) $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$. Nun soll bewiesen werden, daß der Flächeninhalt der Ellipse und des Kreises in demselben Verhältnisse zu einander stehen.

Man beschreibe ein beliebiges Vieleck CMM'B in den Kreis, fälle von jedem seiner Winkelspitzen Senkrechte auf die Axe BC, und verbinde die Punkte, wo die Senkrechten die Ellipse schneiden, so entsteht dadurch das in diese Curve beschriebene Vieleck CNN'B. Nun ist in diesem Vieleck ein beliebiges Trapez PNN'P' gleich $\frac{1}{2}$ (PN + P'N') × PP', und das entsprechende Trapez PMM'P' im Kreise gleich $\frac{1}{2}$ (PM + P'M') × PP'. Diese beiden Trapeze verhalten sich also zu einander wie

$$PN + P'N' : PM + P'M'.$$

Da aber

$$PN : PM = P'N' : P'M' = b : a,$$

so ist

$$PN + P'N' : PM + P'M' = b : a.$$

Da nun die entsprechenden Trapeze in dem constanten Verhältnisse $b : a$ stehen, so müssen auch die Flächen der beiden Vielecke, wie groß auch ihre Seitenzahl sein mag, dasselbe Verhältniß haben. Also muß dieses Verhältniß auch für ihre Grenzen stattfinden; bezeichnet man daher den Flächeninhalt der Ellipse und des Kreises mit E und E', so ist

$$\frac{E}{E'} = \frac{b}{a},$$

d. h. die Fläche der Ellipse verhält sich zur Fläche des auf einer der Axen beschriebenen Kreises, wie die andere Axe zu der ersten.

Bezeichnen wir das Verhältniß der Kreislinie zum Durchmesser mit $\pi$, so ist die Kreisfläche $\pi a^2$, und somit die der Ellipse

$$E = \pi ab;$$

also ist die Fläche der Ellipse gleich der eines Kreises, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen den halben Axen der Ellipse ist.

**356.** Sind a' und b' zwei conjugirte halbe Axen, die den Winkel $\gamma$ bilden, so ist (nach Nro. 350) $ab = a'b' \sin \gamma$; also ist die Fläche der Ellipse in Function conjugirter Durchmesser ausgedrückt

$$E = \pi a'b' \sin \gamma.$$

**357.** Betrachtet man anstatt der ganzen Ellipse nur ein Segment PP'N'N, das zwischen zwei auf der Axe BC senkrechten Ordinaten enthalten ist, und schließt ebenso wie bei der ganzen Ellipse, so findet man, wenn S das Segment der Ellipse, und S' das entsprechende Segment des Kreises bezeichnet,

$$\frac{S}{S'} = \frac{b}{a}, \quad \text{woraus } S = \frac{b}{a} S'.$$

Die Quadratur des ersten Segments läßt sich somit auf die des zweiten, die aus der Geometrie bekannt ist, zurückführen.

**358.** Angenommen, es handle sich um ein Segment der Ellipse, das zwischen einem beliebigen Durchmesser BC (Fig. 149) und zwei mit seinem zugeordneten Durchmesser parallelen Ordinaten PN und P'N' enthalten ist. Man beschreibe über BC als Durchmesser einen Kreis, und in das Segment das Stück NRR'N' eines Vielecks; ziehe ferner die Ordinaten

RS, R'S' .... parallel mit NP, und errichte auf BC die Senkrechten PM, SH ...., welche die Punkte M, H ... am Kreise bestimmen. Verbinden wir nun diese Punkte und vergleichen die schiefen Trapeze wie PSRN mit den entsprechenden rechtwinkligen Trapezen:

Fällt man SI senkrecht auf NP, so ist die Fläche des schiefen Trapezes gleich $\frac{1}{2}$ (PN + RS) × SI. Aber im rechtwinkligen Dreieck SIP ist SI = SP × sin IPS, also ist diese Fläche gleich

$$\tfrac{1}{2}\,(PN + RS) \times SP \times \sin IPS.$$

Die Fläche des rechtwinkligen Trapezes ist gleich

$$\tfrac{1}{2}\,(PM + HS) \times SP;$$

folglich ist das Verhältniß der beiden Trapeze

$$\frac{(PN + RS)\,\sin IPS}{PM + HS}.$$

Nun ist die Gleichung der auf zwei conjugirte Durchmesser bezogenen Ellipse $y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x^2)$; die des Kreises, der auf den Durchmesser BC und einen andern auf diesem senkrechten Durchmesser bezogen wird, ist $y^2 = a'^2 - x^2$: also verhält sich PN : PM = RS : HS = b' : a', und daher, wenn man den Winkel IPS der conjugirten Durchmesser mit $\gamma$ bezeichnet,

$$\frac{(PN + RS)\,\sin IPS}{PM + HS} = \frac{b'}{a'}\,\sin\gamma.$$

Da nun die entsprechenden Trapeze in einem constanten Verhältniß zu einander stehen, so muß das elliptische Segment mit dem des Kreises dasselbe Verhältniß haben; es ist also, wenn sie mit S und S' bezeichnet werden,

$$\frac{S}{S'} = \frac{b'}{a'}\,\sin\gamma, \quad \text{woraus } S = \frac{b'}{a'}\,S'\sin\gamma.$$

Um die ganze Ellipse zu erhalten, muß man $S' = \pi a'^2$ setzen, wodurch sich $S = \pi a' b' \sin\gamma$, wie oben (Nro. 356) ergibt.

# Zehntes Kapitel.

## Von der Hyperbel.

### Die Hyperbel in Beziehung auf ihre Axen.

**359.** Durch die Versetzung des Ursprungs in den Mittelpunkt ergibt sich (Nro. 267) ein einziges System rechtwinkliger Coordinaten, für welches die Gleichung der Hyperbel die Form annimmt

[b] $$y^2 - m^2x^2 = p.$$

Ist $p = 0$, so gibt diese Gleichung $y = \pm mx$, und sie stellt dann zwei Gerade vor. Lassen wir diesen Fall bei Seite, so sind noch die beiden folgenden zu betrachten:

[1] $$y^2 - m^2x^2 = b^2$$

[2] $$y^2 - m^2x^2 = -b^2,$$

je nachdem p positiv oder negativ ist. Indessen läßt sich die erste Gleichung auf die zweite zurückführen; denn setzt man darin x für y und y für x, dividirt alles durch $m^2$, und verändert die Vorzeichen, so ergibt sich

$$y^2 - \frac{1}{m^2}x^2 = -\frac{b^2}{m^2},$$

welche Gleichung der zweiten ganz ähnlich ist, und sich aus ihr ableiten ließe, wenn in dieser $\frac{1}{m^2}$ für $m^2$, und $\frac{b^2}{m^2}$ für $b^2$ gesetzt würde. Mithin genügt zur Auffindung der Eigenschaften der Hyperbel die Gleichung [2].

**360.** Die Form dieser Gleichung weist sogleich darauf hin, daß der Ursprung im Mittelpunkte liegt, und daß die Coordinaten-Axen auch Axen der Hyperbel sind; aber es ist hier nicht, wie bei der Ellipse der Fall, daß die beiden Axen die Curve treffen. Denn

$y = 0$ gibt $x = \pm\frac{b}{m}$, und $x = 0$ gibt $y = \pm b\sqrt{-1}$.

Also wird die Abscissen-Axe (Fig. 150) wieder in zwei Punkten B und C geschnitten, für welche $AB = AC = \frac{b}{m}$ ist. Die Ordinaten-Axe trifft aber die Curve nicht, denn bei $x = 0$ erhält man für y imaginäre Werthe.

Es sei $\frac{b}{m} = a$, so ist $m = \frac{b}{a}$, und durch Substitution dieses Werthes ändert sich die Gleichung [2] in

[h] $$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Die Axe BC, welche gleich 2a ist, heißt gewöhnlich erste Axe oder reelle Axe (auch transverse oder Zwerchaxe), und obgleich die Ordinaten-Axe die Hyperbel nicht trifft, so trägt man doch die Abstände AD und AE gleich b darauf an, und heißt gewöhnlich die Länge DE oder 2b die zweite Axe; die Endpunkte der ersten Axe sind die Scheitel der Hyperbel.

Um den Anfangspunkt in den Scheitel B zu versetzen, verändert man x in $x + a$, dann kann man der Gleichung der Hyperbel die Form geben

[h'] $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Ist $a = b$, so verwandeln sich die Gleichungen [h] und [h'] in

$$y^2 - x^2 = -a^2, \text{ und } y^2 = 2ax + x^2,$$

und die Hyperbel heißt dann gleichseitig; sie ist unter den gewöhnlichen Hyperbeln das, was bei den Ellipsen der Kreis ist.

**361.** Bei der Auflösung der Gleichung [h] erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

So lange $x < a$, bleibt y imaginär; für $x = AB = a$ ist $y = 0$; wenn x von a bis $+\infty$ wächst, hat y zwei reelle Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen und wächst von 0 bis ins Unendliche. Die positiven Werthe von x bestimmen daher einen Curvenast wie RBS, der sich in der Richtung von Ax über und unter dieser Axe symmetrisch bis ins Unendliche erstreckt. Die negativen Werthe geben einen ganz ähnlichen Ast R'CS' auf der andern Seite der Axe Ay; denn da x nur sein Vorzeichen ändert, so bleiben die Werthe für y dieselben. Dabei fällt in die Augen, daß die beiden Aeste, welche die Hyperbel bilden, der Ordinaten-Axe ihre convexe Seite zukehren; sonst könnte man eine Gerade ziehen, welche diese Curve zweiter Ordnung in mehr als zwei Puncten schneiden würde, was unmöglich ist.

**362.** Es sei MP eine beliebige Ordinate der Hyperbel, so ist im rechtwinkligen Dreieck AMP

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - b^2}.$$

Da die Abscisse x bis ins Unendliche wachsen kann, so kann auch AM bis ins Unendliche zunehmen. In der Hyperbel ist aber a der kleinste Werth von x, das Minimum von AM ist daher AB = a. Somit ist die halbe erste Axe die kürzeste Linie, die man zwischen der Hyperbel und ihrem Mittelpunkte ziehen kann.

**363.** Die Gleichung [h] gibt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(x - a)(x + a);$$

für $y = MP$ ist aber $x - a = BP$, $x + a = CP$, also

$$MP^2 = \frac{b^2}{a^2} \times BP \times CP.$$

Für jede andere Ordinate M'P' würde man eine ähnliche Gleichung erhalten; also ist

$$\frac{MP^2}{M'P'^2} = \frac{BP \times CP}{BP' \times CP'}.$$

d. h. die Quadrate der auf der ersten Axe der Hyperbel senkrechten Ordinaten verhalten sich wie die Producte aus den Abständen von den beiden Endpunkten dieser Axe zu den Fußpunkten der Ordinaten.

**364.** Für jeden zur Hyperbel gehörigen Punkt muß

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$

sein. Betrachtet man einen zwischen beiden Aesten liegenden Punkt N, und zieht auf Ay die Senkrechte QN, deren Verlängerung die Hyperbel in M trifft, so muß offenbar die Abscisse des Punktes N kleiner sein als die von M, während ihre Ordinate dieselbe ist; also muß die Größe

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2,$$

welche für den Punkt M Null ist, für den Punkt N positiv sein. Eine ähnliche Folgerung zeigt, daß sie für einen Punkt N', der innerhalb eines der beiden Aeste liegt, negativ sein muß. Sonach ist immer

$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$ auf der Hyperbel.

$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 > 0$ außerhalb der Hyperbel.

$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 < 0$ innerhalb der Hyperbel.

**365.** Betrachtet man zusammen die Gleichungen

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

von denen die eine eine Ellipse, die andere eine Hyperbel vorstellt, so ersieht man, daß man zum Uebergang von der ersten zur zweiten nur $b^2$ in $-b^2$, oder $b$ in $b\sqrt{-1}$ verwandeln darf. Diese Bemerkung kann oft von Nutzen sein, um die Eigenschaften der Hyperbeln, die einige Analogie mit denen der Ellipse haben, leichter zu erkennen.

## Von den Brennpunkten und Directricen.

**366.** Was über die Brennpunkte der Ellipse gesagt worden, läßt sich mit sehr wenigen Abänderungen auch auf die Hyperbel anwenden. Die Gleichung der Hyperbel heißt

[h] $$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$$

daher sind die Brennpunkte diejenigen Punkte, deren Abstand von irgend einem Punkte der Curve eine rationale Function der Abscisse dieses Punktes ist.

Es seien nun $x'$, $y'$ die Coordinaten eines Brennpunktes, $x$, $y$ die eines Punktes der Hyperbel, und $\delta$ die Entfernung dieser beiden Punkte, so ist

$$\begin{aligned}\delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 \\ &= x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2.\end{aligned}$$

Da aber $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, so kann $\delta^2$, und um so mehr $\delta$ nicht rational in $x$ ausgedrückt werden, wenn nicht $2y'y$ verschwindet, weßhalb $y' = 0$ gesetzt werden muß. Setzt man nun für $y^2$ seinen Werth, so verwandelt sich $\delta^2$ in

$$\delta^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 - 2x'x + x'^2 - b^2,$$

welcher Ausdruck ein vollständiges Quadrat sein muß. Nach dieser Bedingung muß

$$x'^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right)(x'^2 - b^2)$$

sein, woraus man nach geschehener Reduction erhält

$$x' = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nun hat sich bereits $y' = 0$ ergeben; also hat die Hyperbel ebenfalls zwei Brennpunkte, die auf ihrer ersten Axe auf beiden Seiten des Mittelpunktes in einer Entfernung $= \sqrt{a^2 + b^2}$ liegen.

Zur Construction derselben errichte man (Fig. 151) im Endpunkt der ersten Axe eine Senkrechte BH gleich der Hälfte b der zweiten Axe, ziehe AH und beschreibe aus A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser AH einen Kreis, der die erste Axe in zwei Punkten F und F′ schneidet; so sind diese Punkte die Brennpunkte der Hyperbel.

Der Abstand FF′ heißt die Excentricität der Hyperbel.

**367.** Um die Radien-Vectoren FM und F′M zu erhalten, setze man $AF = \sqrt{a^2 + b^2} = c$, und substituire in dem Werth für $\delta^2$ für x′ zuerst + c und dann — c; so ergibt sich, da $c^2 - b^2 = a^2$,

$$FM^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2, \quad F'M^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2,$$

und hieraus

$$FM = \pm\left(\frac{cx}{a} - a\right), \quad F'M = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right).$$

Die Radien-Vectoren müssen nothwendig positiv sein. Nun ist, so lange der Punkt M auf dem in der Richtung der positiven x befindlichen Ast liegt, das Glied $\frac{cx}{a}$ positiv und $> a$; also muß man die obern Vorzeichen nehmen. Dieses Glied ist aber negativ und stets $> a$, wenn der Punkt M auf dem andern Aste liegt, somit muß man, damit FM und F′M positiv werden, die untern Vorzeichen nehmen.

**368.** Werden diese Entfernungen von einander abgezogen, so ergibt sich $F'M - FM = 2a$ für den ersten Ast, und $FM - F'M = 2a$ für den zweiten; bei der Hyperbel ist also die Differenz der Radien-Vectoren constant und gleich der ersten Axe.

Für einen außerhalb der Hyperbel liegenden Punkt N (Fig. 152) ist $F'N - FN < 2a$. Denn es sei M der Durchschnittspunkt von FN und der Curve, so ist $F'N < F'M + NM$; zieht man einerseits FN, und anderseits die ihr gleiche $NM + MF$ ab, so bleibt

$$F'N - FN < F'M - MF; \text{ aber } F'M - MF = 2a,$$

also

$$F'N - FN < 2a.$$

Der Punkt N wurde hier rechts von der zweiten Axe angenommen; wäre er links, so würde $FN - F'N$ kleiner als 2a sein.

Für einen Punkt N′ innerhalb eines der Aeste muß

$$F'N' - FN' > 2a$$

sein; denn offenbar ist

$$FN' < FM + MN', \text{ und } F'N' = F'M + MN',$$

also ergibt sich durch Subtraction

$$F'N' - FN' > F'M - FM, \text{ oder } F'N' - FN' > 2a.$$

Je nachdem also ein Punkt auf der Hyperbel, oder außerhalb, oder innerhalb derselben liegt, ist die Differenz der Radien-Vectoren entweder gleich der ersten Axe, oder kleiner, oder größer als dieselbe.

**369.** Es ist nun leicht, eine Hyperbel zu construiren, wenn die erste Axe BC (Fig. 152) und die Brennpunkte F und F′ bekannt sind. Aus dem Brennpunkt F beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser BK einen Kreis, und aus dem Brennpunkt F′ mit CB + BK einen andern Kreis: so gehören die Durchschnittspunkte dieser Kreise zur Hyperbel; denn nach der Construction ist immer F′M — FM = BC.

Die Hyperbel läßt sich auch in stetiger Bewegung beschreiben. Zu diesem Zweck befestige man im Brennpunkt F′ ein Lineal F′M, das sich um diesen Punkt drehen läßt; im Punkte M und im andern Brennpunkte F befestige man die Endpunkte eines Fadens MF, der so lang ist, daß F′M — FM der ersten Axe CB gleich werden; dann fahre man mit einem Stift längs des sich drehenden Lineals hin, so daß ein Theil des Fadens sich an dasselbe gespannt anlegt, wodurch der Stift einen Theil der verlangten Hyperbel beschreibt.

**370.** Nach dem im vorigen Kapitel befolgten Gang wollen wir uns nun die Aufgabe stellen: eine Curve zu finden, bei welcher die Differenz der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei bestimmten Punkten constant und einer gegebenen Linie 2a gleich sei.

Die zwei bestimmten Punkte seien F und F′ (Fig. 153); man ziehe durch dieselben die Gerade x′x, und errichte in der Mitte von FF′ die Senkrechte yy′. Diese Linien als Axen nehmend, bezeichne man die Coordinaten AP und MP eines beliebigen Punktes der Curve mit x und y, und den Abstand FF′ mit 2c. Da nun die Differenz F′M — FM gleich 2a ist, so kann man F′M durch z + a und FM durch z — a vorstellen; dann ergibt sich aus den rechtwinkligen Dreiecken F′MP und FMP

$$(z + a)^2 = y^2 + (x + c)^2,$$
$$(z - a)^2 = y^2 + (x - c)^2.$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so ist

$$4az = 4cx, \quad \text{woraus } z = \frac{cx}{a},$$

und indem man diesen Werth in eine der beiden Gleichungen setzt, ergibt sich

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)\,x^2 = -a^2\,(c^2 - a^2).$$

Nun fällt in die Augen, wie zu erwarten stand, daß die Curve eine Hyperbel ist, deren erste Axe 2a, und die zweite Axe $2\sqrt{c^2 - a^2}$ ist.

**371.** Ohne in weitere Entwicklungen über die Brennpunkte einzugehen, möge hier bemerkt werden, daß wie bei der Ellipse die Brennpunkte der Hyperbel sich auch sehr einfach durch die Eigenschaft definiren lassen, daß die Rechtecke $F'C \times F'B$ und $FB \times FC$ dem Quadrat $b^2$ gleich sind.

**372.** Die Hyperbel hat auch ihre zwei Directricen. Auf AF (Fig. 153) nehme man $AH = d$ und errichte die Senkrechte HL. Fällt man nun von einem beliebigen Punkte der Curve MR senkrecht auf HL und zieht MF, so ist

$$\frac{MF}{MR} = \frac{\frac{cx}{a} - a}{x - d} = \frac{cx - a^2}{cx - cd} \times \frac{c}{a};$$

Dieses Verhältniß muß daher constant und gleich dem von c : a sein, wenn der Punkt H so gewählt wird, daß $cd = a^2$ ist. Derselbe Schluß ergibt sich, auf welchem Ast der Punkt M auch liegen mag. Es ist also, wie bei der Ellipse, die halbe Axe AB die mittlere Proportionale zwischen AF und AH.

Ist AH bestimmt, so kann man auf AF' die $AH' = AH$ machen und die Senkrechte H'L' errichten, wobei man sogleich einsieht, daß sich die Abstände MF' und MR' für jeden Punkt verhalten wie c : a.

Nennt man daher die beiden Geraden HL und H'L' Directricen (Richtungslinien), so kann man, wie bei der Ellipse sagen, daß die Abstände jedes Punktes der Hyperbel von einem der Brennpunkte und seiner nächstliegenden Directrice sich verhalten, wie die Entfernung der Brennpunkte zur ersten Axe.

Von dieser Eigenschaft können wir zur Aufsuchung des geometrischen Orts, wie er in der Aufgabe Nro. 316 definirt wurde, übergehen; und setzt man in den Resultaten $m > n$, so muß sich, wie wir gesehen, eine Hyperbel ergeben. Nimmt man an, F sei der gegebene Punkt und HL die gegebene Linie, theilt man ferner, wie in Nro. 316 die Entfernung FH so, daß $FB : BH = m : n$, und setzt $m = FB$, $n = BH$, und nimmt endlich BF und die in B errichtete Senkrechte BY als Coordinaten-Axen, so erhält man wieder die Gleichung

$$n^2y^2 + (n^2 - m^2)\,x^2 - 2mn\,(n + m)\,x = 0.$$

Hier ist aber der Coefficient von $x^2$ negativ, da $m > n$ gegeben ist, und man findet, daß die Abscissenlinie Bx' von der Curve in einem Abstand

$$BC = \frac{2mn}{m - n}$$

geschnitten wird.

Versetzt man den Ursprung in die Mitte A von BC, so verwandelt sich die Gleichung der Hyperbel in

$$n^2y^2 - (m^2 - n^2)\,x^2 = -\frac{m^2n^2\,(m+n)}{m-n};$$

die Werthe der halben Axen sind

$$a = \frac{mn}{m-n}, \qquad b = m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}};$$

nun ergibt sich leicht

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{m^2}{m-n}, \qquad AF = \frac{m^2}{m-n}, \qquad AF \times AH = a^2,$$

woraus folgt, daß F ein Brennpunkt und HL eine der Directricen der Hyperbel ist.

**378.** Dem Leser wird es nun nicht schwer fallen, die in Nro. 317 und 318 über die Brennpunkte der Ellipse gemachten Bemerkungen auf die Hyperbel anzuwenden.

## Von der Tangente und Normale.

**374.** Ist die Gleichung der Hyperbel

[h] $$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

so sind die Rechnungen, um zur Gleichung der Tangente zu gelangen, dieselben wie bei der Ellipse, mit dem einzigen Unterschied, daß für $b^2$ überall $-b^2$ zu setzen ist; deßwegen sind auch fast bis auf diese Abänderung, die Resultate dieselben. Bezeichnet man daher die Coordinaten des Berührungspunktes mit $x'$, $y'$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente an der Curve mit der Abscissen-Axe bildet, mit $\alpha$, so ist (Nro. 319)

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'},$$

und die Gleichung der Tangente ist

[t] $$a^2y'y - b^2x'x = -a^2b^2.$$

**375.** Um a posteriori zu zeigen, daß außer dem Berührungspunkte alle Punkte der Tangente außerhalb der Hyperbel liegen, muß man nach Nro. 364 beweisen, daß die Größe $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$ für alle Punkte der Hyperbel positiv ist.

Nun erhält man aus der Gleichung der Tangente für y den Werth

$$y = \frac{b^2\,(x'x - a^2)}{a^2y'};$$

setzt man diesen Werth für y in den Ausdruck $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$, bringt alles unter denselben Nenner, setzt anstatt $a^2y'^2$ seinen aus der Gleichung der Hyperbel sich ergebenden Werth $b^2x'^2 - a^2b^2$, und führt dann einige leicht bemerkbare Rechnungen aus, so erhält man

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = \frac{b^4(x'x - a^2)^2}{a^2y'^2} - b^2x^2 + a^2b^2$$

$$= \frac{b^4(x'x - a^2)^2 + (a^2b^2 - b^2x^2)(b^2x'^2 - a^2b^2)}{a^2y'^2}$$

$$= \frac{b^4(x - x')^2}{y'^2}.$$

Das zweite Glied ist nothwendig positiv; es ist also auf der Tangente immer $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 > 0$, woraus hervorgeht, daß alle Punkte derselben außerhalb der Curve liegen; eine Ausnahme findet nur statt für $x = x'$, wofür $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$ ist, und welcher Werth den Berührungspunkt wieder gibt.

**376.** Aendert man in der Formel

$$\alpha = \frac{b^2x'}{a^2y'}$$

die Vorzeichen von x' und y', so bleibt der Werth von $\alpha$ derselbe, und es folgt daraus, daß, wenn eine durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehende Gerade diese Curve in zwei Punkten trifft, die an diese Punkte gezogenen Tangenten parallel sind. Dasselbe folgt auch aus der Symmetrie der Curve in Beziehung auf ihre Axen.

**377.** Setzt man in derselben Formel $x' = a$ und $y' = 0$, so ist $\alpha = \infty$; also steht die Tangente im Scheitel B (Fig. 154) senkrecht auf der Axe; dasselbe findet auch im Scheitel C statt.

Nehmen wir an, der Berührungspunkt erhalte alle möglichen Lagen im Winkel yAx, so wird die Abscisse x' und auch y' wachsen; doch läßt sich der Gang der Werthe von $\alpha$ nicht auf den ersten Anblick erkennen. Um denselben leicht zu finden, setze man für x' seinen aus der Gleichung der Curve erhaltenen Werth $\frac{a}{b}\sqrt{y'^2 + b^2}$, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{b\sqrt{y'^2 + b^2}}{ay'} = \frac{b}{a}\sqrt{1 + \frac{b^2}{y'^2}}.$$

Nun ist klar, wenn y' von Null bis ins positiv Unendliche wächst, so nimmt $\alpha$ vom Unendlichen bis auf $\frac{b}{a}$ ab; also neigt sich die Tangente MT immer mehr bis zu dieser Grenze.

Um zu wissen, was dann aus der Tangente MT wird, suchen wir, was mit der Entfernung AT geschieht. Indem wir in der Gleichung [t] $y = 0$ setzen, ergibt sich

$$AT = \frac{a^2}{x'}.$$

Dieser Werth nimmt aber ab und nähert sich Null in dem Maße als $x'$ zunimmt; dabei hat er dasselbe Vorzeichen wie $x'$: je mehr sich also der Berührungspunkt auf der Hyperbel entfernt, desto mehr nähert sich der Punkt T dem Mittelpunkt, ohne je auf die andere Seite zu rücken, und er fällt mit demselben erst dann zusammen, wenn man sich den Berührungspunkt ins Unendliche hinausgerückt denkt.

Um an dieser Grenze die Tangente zu construiren, darf man nur aus den beiden Axen 2a und 2b das Rechteck HKH'K' bilden, und die Diagonale HH' gehörig verlängert ziehen; es ist dann nothwendig

$$\text{tang } HAB = \frac{b}{a}.$$

Da die Hyperbel in Beziehung auf jede ihrer Axen symmetrisch ist, so ist diese Diagonale auch die Grenze der Tangenten, die man im Scheitelwinkel y'Ax' an die Curve ziehen kann. Ebenso dient die andere Diagonale KK' den Tangenten der beiden andern Theile der Hyperbel als Grenze; und die Gleichungen dieser zwei Geraden sind

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

In der gleichseitigen Hyperbel ist $b = a$; also halbiren dann diese Geraden die Axen-Winkel und stehen senkrecht auf einander.

**378.** Zieht man AT von AP oder $x'$ ab, so erhält man die Subtangente

$$PT = \frac{x'^2 - a^2}{x'}.$$

Es ist hier zu beachten, daß die Werthe von AT und PT von der zweiten Axe 2b unabhängig sind, und daher für alle auf derselben großen Axe beschriebenen Hyperbeln sich gleich bleiben müssen.

**379.** Zieht man durch den Mittelpunkt und den Berührungspunkt die Gerade AM (Fig. 155), so ist ihre Gleichung von der Form $y = \alpha' x$, und vermöge der Bedingung, daß sie durch den Berührungspunkt gehe, ist $y' = \alpha' x'$, woraus

$$\alpha' = \frac{y'}{x'}.$$

Weiter oben (Nro. 374) erhielt man

$$\alpha = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

Multiplicirt man diese Werthe mit einander, so ist

$$\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2};$$

also ist für die Hyperbel, wie bei der Ellipse, das Product der Tangenten $\alpha$ und $\alpha'$ constant.

**380.** Für die Tangente AMT findet sich

$$\text{tang AMT} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)\, x' y'}.$$

In den Endpunkten der ersten Axe ist $y'$ Null und dann tang AMT unendlich; also steht die Tangente in diesen Punkten senkrecht auf der Geraden, welche den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkt verbindet. Dieß ist nur in diesen Punkten der Fall; denn für alle andern Punkte ist weder $y'$ noch $x'$ Null, also auch tang AMT nicht unendlich.

Entfernt sich der Punkt M im Winkel yAx auf der Curve, so nehmen $x'$ und $y'$ positiv zu, und können sogar jede Grenze überschreiten; also nimmt tang AMT positiv bis Null ab, und der Winkel AMT bleibt immer spitzig und nimmt ebenfalls bis Null ab: d. h. im Unendlichen fällt die Tangente MT mit der Geraden AM, die vom Mittelpunkt an den Berührungspunkt geht, zusammen.

**381.** Nachdem für die Tangente an die Hyperbel in dem Punkt, dessen Coordinaten $x'$ und $y'$ sind, Nro. 374 die Gleichung

$$[t] \qquad a^2 y' y - b^2 x' x = -a^2 b^2$$

gefunden wurde, läßt sich nun leicht die einer Tangente finden, welche durch einen außerhalb liegenden Punkt geht. Die Coordinaten dieses Punktes seien $x''$ und $y''$, so müssen sie der Gleichung [t] genügen, also ist

$$a^2 y'' y' - b^2 x'' x' = -a^2 b^2;$$

und da der Berührungspunkt auf der Hyperbel liegt, so ist auch

$$a^2 y'^2 - b^2 x'^2 = -a^2 b^2:$$

welche zwei Gleichungen die Unbekannten $x'$ und $y'$ bestimmen.

Die Werthe dieser Coordinaten enthalten einen Wurzelwerth mit der Größe $a^2 y''^2 - b^2 x''^2 + a^2 b^2$, woraus, wie bei der Ellipse folgt, daß man durch einen außerhalb liegenden Punkt zwei Tangenten an die Hyperbel ziehen kann, daß diese Tangenten sich auf eine einzige reduciren, wenn der gegebene Punkt auf der Curve liegt, und daß endlich keine Tangente mehr möglich ist, wenn dieser Punkt innerhalb derselben liegt.

**382.** Die Normale im Punkte M (Fig. 155), deſſen Coordinaten $x'$ und $y'$ ſind, iſt nichts anderes, als die auf der Tangente in dieſem Punkt errichtete Senkrechte; ihre Gleichung muß daher folgende ſein:

[11] $$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x').$$

Um den Abſtand AS zu erhalten, wo dieſe Normale die Abſciſſen-Axe ſchneidet, mache man $y = 0$, ſo findet ſich

$$AS = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x'.$$

Dieſer Ausdruck nimmt zugleich mit $x'$ ab; nähert ſich alſo der Punkt M dem Scheitel B, ſo nähert ſich S dem Mittelpunkt A, und er rückt nie auf die andere Seite, weil AS mit $x'$ gleiches Vorzeichen hat; gibt man $x'$ ſeinen kleinſten Werth $x' = a$, ſo erreicht auch AS ſein Minimum, und hieraus folgt, daß der Fußpunkt der Normale nie einen gewiſſen Punkt N überſchreitet, für welchen $AN = \frac{a^2 + b^2}{a}$.

**383.** In der Hyperbel ſind die Winkel, welche die Radien-Vectoren mit der Tangente im Berührungspunkte bilden, einander gleich.

So ſind in Fig. 156 die Winkel FMT und F'MT einander gleich. Da der Beweis derſelbe iſt, wie bei der Ellipſe, ſo bleibe die Führung desſelben dem Leſer überlaſſen.

**384.** Will man mittelſt dieſer Eigenſchaft durch einen auf der Hyperbel liegenden Punkt M (Fig. 157) eine Tangente an dieſe Curve ziehen, ſo ziehe man die Radien-Vectoren FM, F'M, mache auf einem derſelben MK = FM, ziehe KF, und fälle MO ſenkrecht auf KF, ſo iſt MO die Tangente. Denn nach der Conſtruction iſt das Dreieck MKF gleichſchenklig, und die Senkrechte MO halbirt den Winkel F'MF.

Man kann ſich übrigens überzeugen, daß alle Punkte dieſer Linie, M ausgenommen, wirklich außerhalb der Hyperbel liegen; denn für jeden andern Punkt, z. B. R, iſt $RF' - RK < F'K$; aber

$$RK = RF \text{ und } F'K = 2a,$$

alſo

$$RF' - RF < 2a,$$

und ſomit liegt der Punkt R außerhalb der Hyperbel (Nro. 368).

**385.** Bemerkung. Da der Punkt O in der Mitte von FK und der Mittelpunkt A in der Mitte von F'F liegt, ſo iſt AO parallel F'K und gleich $\frac{1}{2}F'K$; nun iſt $F'K = 2a$, alſo $AO = a$.

Fällt man daher von den Brennpunkten der Hyperbel Senkrechte auf die Tangenten an dieser Curve, so ist der Abstand der Fußpunkte dieser Senkrechten vom Mittelpunkt constant und gleich der halben ersten Axe: somit haben diese Punkte die auf dieser Axe als Durchmesser beschriebene Kreislinie zum geometrischen Ort.

**386.** Nehmen wir jetzt an, man wolle durch einen außerhalb der Hyperbel liegenden Punkt T (Fig. 158) eine Tangente an dieselbe ziehen. Es sei TR die gesuchte Tangente und M der Berührungspunkt; zieht man die Radien-Vectoren FM und F′M, setzt F′K = 2a, und zieht KF, so muß die Tangente TM auf der Mitte von KF senkrecht stehen, also ist TK = TF; somit ist der Punkt K der Durchschnittspunkt zweier Kreise, von denen der eine aus dem Brennpunkt F′ mit 2a als Halbmesser, der andere von T aus mit TF als Halbmesser beschrieben wird. Ist der Punkt K gefunden, so ziehe man F′K und KF, fälle dann TR senkrecht auf KF: so ist TR die Tangente an die Hyperbel, und der Punkt M, wo sie von der verlängerten FK getroffen wird, ist der Berührungspunkt.

Denn nach der Construction ist MK = MF, also

$$F'M - MF = F'K = 2a;$$

folglich liegt M auf der Hyperbel. Ferner ist Winkel KMT = FMT, also TR eine Tangente.

**387.** Liegt der Punkt T außerhalb der Hyperbel, so schneiden sich die aus den Mittelpunkten T und F′ beschriebenen Kreise in zwei Punkten; und es läßt sich beweisen, daß die Bedingungen für den Durchschnitt der Kreise dann erfüllt sind.

Denn zieht man F′T, so ist (Nro. 368) F′T − TF < 2a, also F′T < TF + 2a; somit ist 1) die Entfernung der Mittelpunkte kleiner, als die Summe der Halbmesser der Kreise. Im Dreieck F′TF ist ferner F′F < F′T + TF, und um so mehr 2a < F′T + TF; da endlich der Punkt T stillschweigend dem Brennpunkt F näher als F′ angenommen wurde, so ist FT < F′T, und um so mehr FT < F′T + 2a; also ist 2) jeder Halbmesser kleiner als die Entfernung der Mittelpunkte nebst dem andern Halbmesser.

Die Kreise schneiden sich somit in zwei Punkten, und es ergeben sich zwei Tangenten an die Hyperbel. Der Beweis läßt sich leicht auch für den Fall abändern, wo T dem Punkt F′ näher als F ist.

Liegt der gegebene Punkt T auf der Hyperbel (Fig. 159), so ist die Entfernung F′T der Mittelpunkte gleich der Summe der Halbmesser; die Kreise berühren sich von außen, und es findet nur eine Tangente statt.

Liegt der Punkt T innerhalb der Curve (Fig. 160), so ist die Differenz F′T − FT größer als die große Axe 2a (Nro. 368), und die Entfernung

F'T der Mittelpunkte ist daher größer als die Summe der beiden Halbmesser; die Kreise haben also keinen gemeinschaftlichen Punkt mehr, und es läßt sich somit durch den Punkt T keine Tangente mehr an die Hyperbel ziehen.

## Von den Durchmessern.

**388.** Es sei die Gleichung

[1] $$y = \delta x + \beta$$

die einer beliebigen Geraden, welche die Hyperbel in F und G (Fig. 161) schneidet. Verbindet man sie mit der der Hyperbel

[h] $$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

so finden sich die Coordinaten der Punkte F und G. Durch Elimination von y ergibt sich

[2] $$(a^2\delta^2 - b^2)\,x^2 + 2\delta\beta a^2 x + (\beta^2 + b^2)\,a^2 = 0,$$

oder

$$x^2 + \frac{2\delta\beta a^2}{a^2\delta^2 - b^2}\,x + \frac{(\beta^2 + b^2)\,a^2}{a^2\delta^2 - b^2} = 0,$$

in welcher Gleichung die Wurzeln gerade die Abscissen AH und AK der Punkte F und G sind. Die halbe Summe dieser Abscissen ist also gleich dem halben Coefficienten des zweiten Gliedes mit dem entgegengesetzten Vorzeichen; diese halbe Summe ist aber die Abscisse der Mitte I von der Sehne FG; wird daher diese Abscisse mit x bezeichnet, so ist

$$x = \frac{-\delta\beta a^2}{a^2\delta^2 - b^2}.$$

Setzt man diesen Werth in [1], so ist für die Ordinate IP

$$y = \frac{-\beta b^2}{a^2\,\delta^2 - b^2}.$$

Nehmen wir an, $\delta$ behalte denselben Werth bei und $\beta$ erhalte alle möglichen Werthe, so muß sich FG parallel mit sich selbst fort bewegen, und die vorigen Formeln ergeben immer die Coordinaten aus der Mitte dieser Sehnen; dividirt man also, um $\beta$ zu eliminiren, y durch x, so ergibt sich

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2\delta} \quad \text{oder} \quad y = \frac{b^2}{a^2\delta}\,x$$

als Gleichung eines Durchmessers. Man sieht hier, daß, wie bei der Ellipse, alle Durchmesser der Hyperbel durch den Mittelpunkt gehen; und da der Coefficient von x alle möglichen Werthe annehmen kann, indem man $\delta$ von $+\infty$ bis $-\infty$ abnehmen läßt, so folgt noch, daß alle durch den Mittelpunkt gezogenen Geraden als Durchmesser betrachtet werden können.

Diese Folgerung erleidet jedoch zwei Ausnahmen, welche stattfinden, wenn man $\delta = \pm\frac{b}{a}$ annimmt. Dann verwandelt sich obige Gleichung in

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

woraus sich die schon (Nro. 377) bemerkten Geraden als Grenzen der Tangenten ergeben. Diese können aber keine Durchmesser sein; denn da die betreffenden Werthe von $\delta$ die Gleichung [2] auf den ersten Grad bringen, so treffen die durch die Gleichung [1] gegebenen Parallelen die Hyperbel nur in einem einzigen Punkt, und es gibt daher keinen entsprechenden Durchmesser.

**389.** Als Gleichung des Durchmessers kann man setzen

$$y = \delta' x.$$

Dann muß aber zwischen den Tangenten $\delta$ und $\delta'$ die Gleichung

$$\delta' = \frac{b^2}{a^2\delta}$$

stattfinden, oder was dasselbe ist

$$\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}.$$

**390.** Diese Gleichung hätte sich aus der entsprechenden bei der Ellipse (Nro. 336) ableiten lassen, indem man $-b^2$ in $b^2$ verwandelt hätte, wodurch sich dann ähnliche Folgerungen ergeben.

1) Bezeichnet man die trigonometrische Tangente des Winkels, den die im Endpunkt des Durchmessers gezogene Tangente mit der Abscissen-Axe bildet, mit $\alpha$, so findet zwischen $\alpha$ und $\delta'$ folgende Gleichung (Nro. 379) statt:

$$\alpha\delta' = \frac{b^2}{a^2};$$

also ist $\alpha\delta' = \delta\delta'$, woraus $\alpha = \delta$: somit sind die Sehnen, welche ein Durchmesser halbirt, mit der im Endpunkt dieses Durchmessers gezogenen Tangente parallel.

2) Da das Product $\delta\delta'$ constant und gleich $\frac{b^2}{a^2}$ ist, so kann es nicht gleich $-1$ werden; also sind die wirklichen Coordinaten-Axen die einzigen Axen der Hyperbel, da kein anderer Durchmesser auf den von ihm halbirten Sehnen senkrecht steht.

3) Die Gleichung $\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}$ zeigt, wenn der durch die Gleichung $y = \delta' x$ ausgedrückte Durchmesser die Sehnen halbirt, welche mit dem Durchmesser, dessen Gleichung $y = \delta x$ ist, parallel laufen, daß auch umgekehrt der zweite die mit dem ersten Durchmesser parallelen Sehnen halbirt. Damit also zwei Durchmesser conjugirte seien, muß

$$\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}$$

sein.

**391.** Von zwei conjugirten Durchmessern trifft nur einer die Hyperbel; denn angenommen, $y = \delta x$ sei die Gleichung eines Durchmessers, und man suche seine Durchschnittspunkte mit der Curve, so ergibt sich für die Abscissen dieser Punkte

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 - a^2\delta^2}} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} - \delta^2}}.$$

Diese Werthe von x sind reell, wenn man $\delta < \frac{b}{a}$ positiv oder negativ nimmt; setzt man aber $\delta > \frac{b}{a}$, so werden sie imaginär. Im ersten Falle trifft der Durchmesser die Hyperbel, im zweiten nicht. Ist nun $\delta < \frac{b}{a}$, so muß, wie man aus der Gleichung $\delta\delta' = \frac{b^2}{a^2}$ ersieht, $\delta' > \frac{b}{a}$ sein; also haben alle Durchmesser, welche die Hyperbel schneiden, ihre conjugirten, welche sie nicht treffen.

Construirt man nun (Fig. 162) auf den Axen der Curve das Rechteck HKH'K', so bilden alle durch die Winkel HAK und H'AK' gezogenen Durchmesser mit der Axe BC einen Winkel, dessen Tangente, vom Vorzeichen abgesehen, $< \frac{b}{a}$ ist; während die durch die Winkel HAK' und H'AK gezogenen Durchmesser mit BC einen Winkel bilden, dessen Tangente $> \frac{b}{a}$ ist: folglich wird die Curve von den ersten getroffen, von den zweiten nicht.

**392.** In dem besondern Falle, wo $\delta = \frac{b}{a}$, ist auch $\delta' = \frac{b}{a}$; dann fallen die beiden conjugirten Durchmesser mit der Diagonale HH' zusammen. Ebenso wenn $\delta = -\frac{b}{a}$, ist auch $\delta' = -\frac{b}{a}$, und die beiden

Durchmesser fallen dann mit der andern Diagonale KK' zusammen. In beiden Fällen wird die Hyperbel erst in unendlicher Weite von den Durchmessern getroffen.

## Von den Ergänzungs-Sehnen.

**393.** Wenn ein Durchmesser die Hyperbel trifft, so heißen diejenigen Sehnen, welche von den Endpunkten dieses Durchmessers an einen beliebigen Punkt der Curve gezogen werden, Ergänzungs-Sehnen.

Wiederholt man hier alle bei der Ellipse gemachten Rechnungen und Folgerungen, so erhält man, wenn GM und G'M (Fig. 163) Ergänzungs-Sehnen sind, und die Tangenten der Winkel MHx und MLx mit $\gamma$ und $\gamma'$ bezeichnet werden,

$$\gamma\gamma' = \frac{b^2}{a^2};$$

und umgekehrt müssen jedesmal, wenn diese Gleichung für zwei Sehnen, welche durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, oder für zwei Sehnen, welche durch denselben Punkt der Hyperbel gezogen werden, stattfindet, dieselben Ergänzungs-Sehnen sein.

Bei der gleichseitigen Hyperbel, wo $b=a$, hat man einfach $\gamma\gamma'=1$: was beweist, daß die von den Ergänzungs-Sehnen mit der ersten Axe gebildeten Winkel Complemente zu einander sind.

**394.** Die vorige Gleichung ergibt ähnliche Folgerungen, wie die aus der ihr analogen bei der Ellipse abgeleiteten. Wir begnügen uns, sie anzuführen:

1) Wenn zwei Sehnen in Beziehung auf einen gewissen Durchmesser Ergänzungs-Sehnen sind, so sind die durch die Endpunkte jedes andern Durchmessers mit diesen Sehnen gezogenen Parallelen ebenfalls in Beziehung auf diesen Durchmesser Ergänzungs-Sehnen, und diese neuen Sehnen bilden dieselben Winkel mit einander wie die ersten.

2) Es sei BC (Fig. 164) ein beliebiger Durchmesser, der die Hyperbel trifft, und MT eine Tangente: zieht man mit dem halben Durchmesser AM die Sehne CN parallel und die Ergänzungs-Sehne BN, so ist die Tangente MT parallel mit der Sehne BN.

Mittelst dieser Eigenschaft kann man an die Hyperbel eine Tangente ziehen, die durch einen Punkt dieser Curve geht, oder mit einer gegebenen Geraden HK parallel lauft; jedoch ist im letztern Falle die Aufgabe nur dann

möglich, wenn die gegebene HK so beschaffen ist, daß eine durch den Mittelpunkt mit ihr gezogene Parallele über den Grenzen der Tangenten (Nro. 377) steht.

3) Zwei mit Ergänzungs-Sehnen parallele Durchmesser sind immer conjugirte, und umgekehrt sind zwei conjugirte Durchmesser mit ihren Ergänzungs-Sehnen immer parallel.

Daraus ergibt sich eine sehr einfache Construction zur Auffindung zweier conjugirter Durchmesser, die gegebene Winkel mit einander bilden; sie ist in Fig. 165 dargestellt.

Es ist jedoch hier nicht, wie bei der Ellipse, der Fall, daß die gegebenen Winkel zwischen gewissen Grenzen enthalten sein müssen; denn der spitzige Winkel der Ergänzungs-Sehnen kann jeder Winkel vom rechten bis auf Null sein. Dieß sieht man deutlich, wenn man die Tangente des Winkels CMB (Fig. 166) sucht. Denn angenommen, BC sei die Axe gleich 2a, so ist

$$\text{tang CMB} = \frac{2ab^2}{(a^2 + b^2)\, y},$$

und es fällt in die Augen, daß wenn y von Null bis ins Unendliche wächst, die Tangente CMB vom Unendlichen bis auf Null abnimmt.

Wie sich auf der Hyperbel zwei Punkte M und N über der Axe BC befinden, für welche y denselben Werth hat, so gibt es auch zwei Systeme conjugirter Durchmesser, welche mit einander gegebene Winkel bilden, aber nicht mehr.

4) Da die Axen der Hyperbel rechtwinklige conjugirte Durchmesser sind, so kann man sie, wie die der Ellipse, mittelst einer Construction finden, die sich ebenfalls von der Symmetrie der Hyperbel in Beziehung auf ihre Axen ableiten läßt. Siehe Fig. 167.

5) Der Mittelpunkt der Hyperbel wird endlich ebenfalls durch dieselbe Construction, wie bei der Ellipse, gefunden (Fig. 168).

## Die Hyperbel in Beziehung auf ihre conjugirten Durchmesser.

**395.** Aus der Gleichung der auf ihre Axen bezogenen Hyperbel

[h] $$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

läßt sich die Gleichung für die conjugirten Durchmesser ableiten, indem man die Coordinaten-Systeme aufsucht, für welche die Gleichung dieser Curve die Veränderlichen nur im Quadrat enthält.

Dem gemäß substituire man in [h] die Werthe

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \quad y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha',$$

und setze zur Abkürzung

$$A = a^2 \sin^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha',$$
$$B = a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha,$$
$$C = a^2 \sin \alpha \sin \alpha' - b^2 \cos \alpha \cos \alpha',$$

so erhält man die umgeformte Gleichung

[1] $$Ay'^2 + Bx'^2 + 2Cx'y' = -a^2b^2;$$

damit sie nun die verlangte Form habe, muß $C = 0$ sein, d. h. es muß

[2] $$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' - b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0$$

sein, wodurch die Gleichung [1] auf folgende reducirt wird:

[3] $$Ay'^2 + Bx'^2 = -a^2b^2.$$

**396.** Für $y^2 = 0$ ist $x'^2 = \frac{-a^2b^2}{B} = \frac{-a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha'}$

und für

$$x' = 0 \text{ ist } y'^2 = \frac{-a^2b^2}{A} = \frac{-a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha'}.$$

Diese Werthe haben verschiedene Vorzeichen; denn die Gleichung [2] gibt

$$a^2 \sin^2 \alpha \gtrless a^2 \sin^2 \alpha' = b^2 \cos^2 \alpha \gtrless b^2 \cos^2 \alpha',$$

und wenn $a^2 \sin^2 \alpha$ kleiner ist als $b^2 \cos^2 \alpha$, so muß offenbar $a^2 \sin^2 \alpha'$ größer als $b^2 \cos^2 \alpha'$ sein und umgekehrt. Eine der neuen Axen trifft also die Curve, die andere nicht, was schon aus Nro. 391 bekannt war.

Nimmt man diejenige, welche die Curve trifft, zur Axe der x', und bezeichnet den in der Hyperbel enthaltenen Theil dieser Axe mit 2a', so ist

[4] $$a'^2 = \frac{-a^2b^2}{B} = \frac{-a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha}.$$

Da die Axe der y' die Curve nicht trifft, so bezeichne man den negativen Werth von $y'^2$ mit $-b'^2$, dann ist

[5] $$b'^2 = \frac{a^2b^2}{A} = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha'}.$$

Setzt man nun für A und B ihre Werthe $\frac{a^2b^2}{b'^2}$ und $\frac{-a^2b^2}{a'^2}$, so verwandelt sich die Gleichung [3] in

[h,] $$a'^2y'^2 - b'^2x'^2 = -a'^2b'^2.$$

Der die Curve treffende Durchmesser, auf welchem die x' genommen werden, heißt erster Durchmesser oder Querdurchmesser, und seine Länge beträgt 2a'; der andere, auf welchem die y' genommen werden, heißt zweiter Durchmesser; obgleich dieser die Hyperbel nicht trifft, so wird doch gewöhnlich seine Länge gleich 2b' angenommen.

**397.** Wird die Gleichung [2] durch $a^2 \cos\alpha \cos\alpha'$ dividirt, so ist

$$[6] \qquad \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{b^2}{a^2};$$

woraus hervorgeht, daß, wenn man der Axe der x' eine besondere Lage gibt, oder was dasselbe ist, $\alpha$ bestimmt, tang $\alpha'$ einen reellen Werth annimmt: also hat jeder Durchmesser einen conjugirten. Es ist jedoch zu bemerken, daß man nicht $\operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{b}{a}$ setzen darf, denn sonst hätte man keine wahren Durchmesser (Nro. 388). Zudem wäre nach dieser Voraussetzung $\operatorname{tang}\alpha' = \pm\frac{b}{a}$; also würde in beiden Fällen die Axe der y' mit der der x' zusammenfallen, woraus klar hervorgeht, daß diese Linien keine conjugirte Durchmesser mehr sein können.

Da ferner die Gleichung [6] derjenigen ähnlich ist, welche die Richtungen der Ergänzungs-Sehnen mit einander verbindet (Nro. 393), so folgt daraus, wenn eine der Sehnen mit dem ersten Durchmesser parallel ist, daß die andere mit dem zweiten Durchmesser parallel laufen muß. Man verfällt so wieder auf die schon bekannten Eigenschaften (Nro. 294), daß zwei conjugirte Durchmesser mit zwei Ergänzungs-Sehnen parallel laufen, und umgekehrt zwei mit Ergänzungs-Sehnen parallele Durchmesser conjugirte sind.

Da in der gleichseitigen Hyperbel b=a, so ist $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = 1$; also sind die Winkel $\alpha$ und $\alpha'$ Complemente zu einander.

**398.** Um zu finden, ob außer den beiden Axen noch andere conjugirte Durchmesser rechtwinklig sind, mache man $\alpha' = 90^0 + \alpha$, woraus $\sin\alpha' = \cos\alpha$ und $\cos\alpha' = -\sin\alpha$; so verwandelt sich die Gleichung [2] in

$$(a^2 + b^2)\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$

und diese kann nur Geltung haben, wenn entweder $\sin\alpha = 0$ oder $\cos\alpha = 0$ ist, welche Voraussetzungen auf die ursprünglichen Axen zurückführen.

**399.** Wollte man die conjugirten Durchmesser der Hyperbel gleich haben, so würde man die Werthe für $a'^2$ und $b'^2$ einander gleich setzen; dann wäre

$$a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha = -a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha',$$

und wenn man $1 - \sin^2\alpha$ für $\cos^2\alpha$, und $1 - \sin^2\alpha'$ für $\cos^2\alpha'$ setzt, so gibt diese Gleichung

$$[7] \qquad \sin^2\alpha + \sin^2\alpha' = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Erhebt man die Gleichung [2], nachdem das zweite Glied auf die rechte Seite geschafft wurde, ins Quadrat, und nimmt dieselben Substitutionen vor wie vorhin, so ergibt sich leicht

$$[8] \qquad \sin^2\alpha \sin^2\alpha' = \frac{b^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

Zieht man von dem Quadrat der Gleichung [7] diese viermal ab, so ist

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha')^2 = 0,$$

also

$$\sin^2\alpha' = \sin^2\alpha, \quad \cos^2\alpha' = \cos^2\alpha, \quad \operatorname{tang}\alpha' = \pm \operatorname{tang}\alpha.$$

Aus der Gleichung [6] geht aber hervor, daß die beiden Tangenten dasselbe Vorzeichen haben müssen; daher ist $\operatorname{tang}\alpha' = \operatorname{tang}\alpha$, und somit gibt die Gleichung [6]

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\alpha' = \pm\frac{b}{a}.$$

Also ergeben sich bei der Hyperbel als conjugirte gleiche Durchmesser zwei in eine einzige vereinigte Gerade, welche die Richtung einer der Diagonalen des aus den Axen construirten Rechtecks haben.

**400.** Bei der Hyperbel finden zwei Lehrsätze statt, die denen in Nro. 350 ganz analog sind, und da sie sich auf demselben Wege beweisen lassen, so möge es genügen, sie anzuführen.

**Lehrsatz I.** Das aus zwei conjugirten Durchmessern construirte Parallelogramm ist so groß als das Rechteck aus den Axen.

**Lehrsatz II.** Die Differenz der Quadrate aus conjugirten Durchmessern ist gleich der Differenz aus den Quadraten der Axen.

**401.** Aus dem Vorigen folgt, daß in den auf die Hyperbel bezüglichen Aufgaben anstatt der Gleichungen [2], [4] und [5], wo dieß bequemer erscheint, die daraus abgeleiteten gesetzt werden können:

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{b^2}{a^2},$$

$$a'b' \sin(\alpha'-\alpha) = ab$$

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

Die letzte zeigt, daß, wenn $a = b$, auch $a' = b'$ ist; also sind bei der gleichseitigen Hyperbel die conjugirten Durchmesser einander gleich.

Diese Eigenschaft findet im Kreise statt; aber die conjugirten Durchmesser sind hier rechtwinklig, während sie bei der gleichseitigen Hyperbel mit der ersten Axe Winkel bilden, die Complemente zu einander sind.

Bei den gewöhnlichen Hyperbeln, wo a von b verschieden ist, kann auch a′ nicht gleich b′ sein, und sie enthält eigentlich auch keine gleichen conjugirten Durchmesser.

**402.** Läßt man von den Veränderlichen x′ und y′ die Accente weg, so heißt die Gleichung [h,]

$$[h,] \qquad a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2;$$

sie ist der auf die Axen bezogenen Gleichung [h] ganz ähnlich; also kommen die von der Neigung der Ordinaten unabhängigen Eigenschaften den Axen der Hyperbel und ihren conjugirten Durchmessern gemeinschaftlich zu: nämlich

1) die Quadrate der mit dem zweiten Durchmesser parallelen Ordinaten verhalten sich wie die Producte der Abschnitte des ersten (Nro. 363).

2) Je nachdem ein Punkt auf der Hyperbel, oder außerhalb, oder innerhalb derselben gegeben ist, ist die Größe $a'^2y^2 - b'^2x^2 + a'^2b'^2$ Null, positiv oder negativ (Nro. 364).

3) Bezeichnet man das Verhältniß des Sinus, das in der allgemeinen Gleichung der geraden Linie dem Coefficienten von x gleich ist, mit $\alpha$, so erhält man als Werth von $\alpha$ in Beziehung auf die Tangente (Nro. 374)

$$\alpha = \frac{b'^2x'}{a'^2y'},$$

und die Gleichung der Tangente ist wieder

$$a'^2y'y - b'^2x'x = -a'^2b'^2.$$

Für die Grenzen der Tangenten hat man die Gleichung (Nro. 377)

$$y = \pm\frac{b'}{a'}x',$$

woraus folgt, daß sie mit den Diagonalen des Parallelogramms aus den conjugirten Durchmessern (Fig. 169) zusammenfallen.

Die Subtangente ist wieder (Nro. 378)

$$PT = \frac{x'^2 - a'^2}{x'};$$

und es findet immer zwischen den Werthen $\alpha$ und $\alpha'$ in Beziehung auf die Tangente und den durch den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser die Gleichung statt:

$$\alpha\alpha' = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

4) Ist $y = \delta x + \beta$ die Gleichung einer beliebigen Sehne der Hyperbel, und $y = \delta' x$ die des Durchmessers, der die parallelen Sehnen halbirt, so hat man (Nro. 389) die Gleichung

$$\delta\delta' = \frac{b'^2}{a'^2};$$

und diese Gleichung findet auch noch für zwei conjugirte Durchmesser statt, deren Gleichungen $y = \delta x$ und $y = \delta' x$ (Nro. 390) ist, sowie für zwei Ergänzungs-Sehnen, die durch die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers (Nro. 393) gezogen werden.

**403.** Will man an die auf zwei conjugirte Durchmesser bezogene Hyperbel durch einen außerhalb liegenden Punkt Tangenten ziehen, und die für die Ellipse (Nro. 353) gemachten Folgerungen wiederholen, so ergibt sich folgender Lehrsatz:

Wenn man von jedem Punkt einer gegebenen Geraden zwei Tangenten an eine Hyperbel zieht, und je die beiden Berührungspunkte verbindet, so schneiden sich die dadurch entstehenden Secanten alle in einem Punkte, der auf dem Durchmesser liegt, dessen conjugirter Durchmesser mit der gegebenen Geraden parallel lauft.

Und umgekehrt, wenn man durch einen in der Ebene einer Hyperbel gegebenen Punkt verschiedene Secanten, und durch die Punkte, wo jede Secante die Curve trifft, zwei Tangenten zieht, so liegen die Durchschnittspunkte von je zwei dieser Tangenten auf einer Geraden, die mit dem Durchmesser, dessen conjugirter durch den gegebenen Punkt geht, parallel lauft.

**404.** Die Gleichung [h,] zeigt auch, daß man, um eine Hyperbel zu construiren, von welcher zwei conjugirte Durchmesser bekannt sind, auf diesen Durchmessern als Axen der Curve nur eine andere Hyperbel beschreiben und dann den Ordinaten, ohne ihre Länge zu verändern, die gehörige Neigung geben darf.

## Von den Asymptoten.

**405.** Es sei

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung einer auf zwei beliebige conjugirte Durchmesser bezogenen Hyperbel, so ist

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Läßt man das unter dem Wurzelzeichen befindliche Glied $-a^2$ unberücksichtigt, so erhält man zwei Gerade, welche dargestellt sind durch die Gleichungen

$$y = +\frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x;$$

und diese Geraden sind die Asymptoten der Hyperbel. Dieß geht schon aus der am Ende von Nro. 248 gegebenen Regel hervor; es läßt sich aber auch direct erweisen.

Betrachten wir der einfachen Anschauung halber von der Curve und der Geraden nur die im Winkel yAx (Fig. 170) liegenden Theile, so ist die Differenz der einer und derselben Abscisse x entsprechenden Ordinaten

$$MN = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right).$$

Da der positive Theil $+x$ und der negative $-\sqrt{x^2-a^2}$ zugleich wachsen und unendlich groß werden, so läßt sich nicht unmittelbar erkennen, ob die Differenz abnehme. Aber eine bekannte und schon in Nro. 248 angewandte Umformung gibt

$$MN = \frac{b}{a} \times \frac{\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2-a^2}} = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}};$$

und hieraus sieht man klar, daß, wenn x bis ins Unendliche wächst, MN bis auf Null abnehmen muß.

Dieselben Folgerungen kann man bei den in den andern Winkeln der Hyperbel enthaltenen Theilen der Hyperbel machen, und es ergibt sich daraus, daß die betreffenden zwei Geraden wirklich Asymptoten der Hyperbel sind.

**406.** Construirt man aus den conjugirten Durchmessern (Fig. 170) ein Parallelogramm HKH'K', so sind die Gleichungen der Diagonalen HH' und KK':

$$y = \pm\frac{b}{a}x;$$

also fallen die Asymptoten der Hyperbel mit den Diagonalen des Parallelogramms zusammen, das aus zwei beliebigen conjugirten Durchmessern construirt ist. Aus dieser Folgerung und aus Nro. 402 ergibt sich, daß die Asymptoten auch als Grenzen der Tangenten betrachtet werden können.

**407.** Die Seiten HK und H'K', welche durch die Endpunkte des ersten Durchmessers gehen, sind Tangenten der Hyperbel und werden in den Punkten B und C halbirt, so daß $BH = BK = b$ ist; also kann man sagen, die zwischen den Asymptoten liegende Tangente wird im Berührungspunkte halbirt und ist dem Durchmesser,

dessen conjugirter durch diesen Punkt geht, gleich und parallel.

Daraus ergibt sich ein leichtes Verfahren, die Tangente an einen Punkt B der Hyperbel zu ziehen, wenn man die Asymptoten kennt. Denn man ziehe BQ mit einer derselben, z. B. mit AH, parallel, mache KQ=AQ, und ziehe die Gerade KBH, so ist dieß die gesuchte Tangente, da wegen der Parallelen BQ und AH auch BH = BK ist.

Auch läßt sich nun, wenn ein Durchmesser, der die Curve trifft, gegeben ist, leicht sein conjugirter finden; denn nachdem man die Tangente HK durch einen Endpunkt dieses Durchmessers gezogen hat, darf man nur DE parallel mit HK ziehen und AD = AE = BH machen.

**408.** Diese Eigenschaft der Tangente ist nur ein besonderer Fall von folgendem allgemeinen Lehrsatze: die Abschnitte einer beliebigen, zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten liegenden Secante sind einander gleich.

Es ist also zu beweisen, daß M'N' = MN (Fig. 171). Man ziehe durch die Mitte P von MM' und den Mittelpunkt A den Durchmesser Ax, und nehme an, er treffe die Hyperbel im Punkte B; so ist sein conjugirter Ay parallel mit MM'. Zieht man nun durch B zwischen den Asymptoten die Gerade HK parallel mit Ay, so ist BH = BK; also werden alle zwischen den Asymptoten liegenden Parallelen mit HK in Ax halbirt; folglich NP = N'P, und daher NP—MP = N'P—M'P, d. h. MN = M'N'.

Der Beweis wäre nicht schwieriger, wenn der Durchmesser Ax die Hyperbel nicht treffen würde.

Man hat jetzt ein neues sehr einfaches Mittel, eine Hyperbel zu beschreiben, wenn ein Punkt M derselben und die Lage der Asymptoten bekannt ist. Man ziehe durch diesen Punkt eine beliebige Gerade NMN' bis an die Asymptoten, schneide NM von N' bis M' ab, so ist auch M' ein Punkt der Curve. Durch Wiederholung dieser Construction findet man so viele Punkte als man will.

Bei der Zeichnung ist es bequem, nicht alle Linien durch den einzigen Punkt M zu ziehen, sondern hiezu auch einige der gefundenen Punkte zu verwenden, indem dadurch die Verwirrung vermieden wird, die durch eine große Zahl durch denselben Punkt gehender Linien entstehen kann.

Diese Construction kann auch angewendet werden, wenn die Größe und der Winkel zweier conjugirter Durchmesser bekannt ist; denn man kennt dann zwei Punkte der Hyperbel, und die Asymptoten lassen sich auch leicht bestimmen.

**409.** Bezeichnet man die conjugirten halben Durchmesser AB und AD (Fig. 171) mit a und b, so ist die Gleichung der auf diese zwei Durchmesser bezogenen Hyperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

und die der Asymptote AH ist

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Die Ordinaten der Curve und der Geraden, welche derselben Abscisse AP entsprechen, seien ferner y und Y, so ist

$$Y^2 - y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2;$$

es ist aber

$$Y - y = MN,$$

und

$$Y + y = PM + PN = PM + PN' = MN';$$

also

$$MN \times MN' = Y^2 - y^2 = b^2.$$

Wäre die Secante mit dem Durchmesser 2a parallel, so ergäbe sich gleichfalls

$$MV \times MV' = a^2.$$

Ist daher eine Secante der Hyperbel parallel mit einem Durchmesser, so ist das Rechteck aus den zwischen einem Punkte der Curve und den Asymptoten enthaltenen Theilen dieser Secante so groß als das Quadrat des halben Durchmessers.

Hieraus ergibt sich ein Verfahren, zwei conjugirte Durchmesser zu finden, wenn die Richtung eines derselben Ay, die Asymptoten und ein Punkt der Curve bekannt sind. Durch den bekannten Punkt M ziehe man zwischen den Asymptoten die NMN' parallel mit Ay, so ist der halbe Durchmesser AD die mittlere Proportionale zwischen MN und MN'. Ist so AD gefunden, so ziehe man Ax durch den Mittelpunkt A und die Mitte P von NN', ebenso der Ax parallel die DH, welche die Asymptote in H trifft; ferner parallel mit AD die Gerade HB, bis sie Ax in B trifft: so ist AB der conjugirte halbe Durchmesser von AD.

Mittelst derselben Eigenschaft lassen sich auch die Axen finden, wenn zwei conjugirte Durchmesser bekannt sind; denn da hiemit ein Punkt der Hyperbel gegeben ist, so kann man die Asymptoten ziehen und erhält die Richtung der Axen durch Halbirung der Asymptoten-Winkel. Das Uebrige läßt sich leicht vollends finden.

**410.** Werden die Geraden BQ, BR (Fig. 170) parallel mit den Asymptoten gezogen, so ist $\triangle$ ABR $\cong$ $\triangle$ ABQ; aber die Dreiecke

ABQ und BQK sind gleich groß, weil AQ = QK: also ist das Parallelogramm AQBR gleich dem Dreieck ABK. Dieses Dreieck ist aber der achte Theil des Parallelogramms HKH'K', dessen Inhalt bei jeder Lage des Punktes B constant ist (Nro. 400); also ist der Inhalt des Parallelogramms, das aus den Asymptoten der Hyperbel und den von einem beliebigen Punkt der Curve mit diesen Linien gezogenen Parallelen gebildet ist, constant und gleich dem achten Theil des Rechtecks aus den Axen oder des aus zwei conjugirten Durchmessern gebildeten Parallelogramms.

## Die Hyperbel in Beziehung auf ihre Asymptoten.

**411.** Nimmt man die untere Asymptote Ax (Fig. 172) als Abscissen-Axe, und die obere Ay als Ordinaten-Axe, zieht man ferner durch einen beliebigen Punkt der Hyperbel die Coordinaten MP und MQ, und bezeichnet den Asymptoten-Winkel mit $\beta$, so läßt sich der Inhalt des Parallelogramms APMQ durch $xy \sin\beta$ ausdrücken. Diese Fläche muß constant und gleich dem achten Theil des Rechtecks aus den Axen sein; sind also diese Axen gegeben und sie werden mit 2a und 2b bezeichnet, so ist die Gleichung der auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel

$$xy \sin\beta = \frac{ab}{2}, \quad \text{oder} \quad xy = \frac{ab}{2 \sin\beta}.$$

$\sin\beta$ läßt sich mittelst a und b ausdrücken; denn errichtet man im Endpunkt der ersten Axe die Senkrechte BH bis zur Asymptote Ay, so ist diese Linie gleich b, und bezeichnet man den Winkel BAH mit $\theta$, so ist in dem Dreieck ABH

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Nun ist $\sin\beta = \sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$, also ist

$$\sin\beta = \frac{2ab}{a^2+b^2};$$

folglich verwandelt sich die Gleichung der Hyperbel in

[h,,] $$xy = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Die Form dieser Gleichung erinnert sogleich daran, daß die Asymptoten als Coordinaten-Axen genommen sind; denn man erhält daraus

$$y = \frac{a^2+b^2}{4x},$$

welcher Werth Null ist, wenn $x = \pm\infty$, und von Null bis $\pm\infty$ wächst, wenn man x bis auf Null abnehmen läßt. Dasselbe gilt auch für die Werthe von x in Vergleich mit denen von y.

**412.** Will man die Gleichung für die Asymptoten von der Axen-Gleichung aus

[h] $$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

finden, so bedient man sich der Formeln

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha', \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'.$$

Man muß hier zuerst für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha'$, $\cos\alpha'$ die Werthe setzen, welche sich auf die gewählten neuen Axen beziehen. Nimmt man, wie vorhin, die x' auf der untern Asymptote Ax (Fig. 173), und die y' auf der Ay', so ist der Winkel $\alpha'$ gleich y'Ax, und Winkel $\alpha$ gleich $360^0 -$ x'Ax. Errichtet man nun im Endpunkt der ersten Axe die Senkrechte BH = b, so muß der Punkt H auf der Asymptote liegen (Nro. 406), und folglich ist wie oben im Dreieck ABH

$$\sin\alpha' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Beachtet man ferner, daß

$$\alpha = 360^0 - x'Ax = 360^0 - \alpha',$$

so ist

$$\sin\alpha = -\sin\alpha' = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \cos\alpha' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Folglich sind die Formeln, wodurch man von den Axen zu den Asymptoten gelangt,

$$x = \frac{a(y' + x')}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{b(y' - x')}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Man darf also diese Werthe nur noch in der Gleichung [h] substituiren, und erhält dann, indem man die Accente, die nun nicht mehr nöthig sind, wegläßt,

[h,,] $$xy = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

welches die Gleichung der auf die Asymptoten bezogenen Hyperbel ist.

Das Quadrat, welches gleich $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ ist, heißt zuweilen die Potenz der Hyperbel.

Bezeichnen wir dieses Quadrat mit $m^2$, so heißt die vorige Gleichung

[$h_2$] $$xy = m^2.$$

**413.** Es seien $x'$, $y'$, und $x''$, $y''$ die Coordinaten zweier Punkte der Hyperbel; zieht man eine Secante durch diese beiden Punkte, und setzt

$$\alpha = \frac{y' - y''}{x' - x''},$$

so ist die Gleichung der Secante

[1] $$y - y' = \alpha\,(x - x').$$

Nun ist

$$x'y' = m^2, \quad x''y'' = m^2;$$

und indem man die zweite Gleichung von der ersten abzieht, ergibt sich

$$x'y' - x''y'' = 0,$$

welche Gleichung sich auch so schreiben läßt:

$$x'\,(y' - y'') + y''\,(x' - x'') = 0,$$

und dann ergibt sich daraus

$$\alpha = \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y''}{x'}.$$

Soll die Gerade zur Tangente werden, so muß man $x''=x'$, $y''=y'$ setzen; durch diese Annahme reducirt sich $\alpha$ auf $-\frac{y'}{x'}$; folglich ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}\,(x - x').$$

**414.** Setzt man in dieser Gleichung $y = 0$, so ergibt sich als Fußpunkt der Tangente MT (Fig. 174)

$$x = AT = 2x';$$

also ist $AT = 2AP$, und daher $MT = MR$, was schon (aus Nro. 407) bekannt war.

**415.** Nehmen wir noch einmal die Gleichung [1] der Secante MM', und setzen $y = 0$, so ist

$$x' - x = PS = -\frac{y'}{\alpha}.$$

Setzt man für $\alpha$ seinen allgemeinen Werth $-\frac{y''}{x'}$ in Beziehung auf die Secante, so ist

$$PS = \frac{y'x'}{y''} = \frac{y''x''}{y''} = x'' = AP';$$

zieht man also M'Q parallel mit Ax, so sind die Dreiecke MPS und M'QV congruent, also MS = M'V, welcher Lehrsatz schon (Nro. 408) gefunden wurde.

## Quadratur der Hyperbel.

**416.** Nehmen wir zuerst die gleichseitige Hyperbel, und ihre Potenz gleich der Einheit an, so ist die Gleichung dieser auf ihre Asymptoten bezogenen Curve

$$xy = 1.$$

Man setze nun (Fig. 175) eine Abscisse AC = 1, und eine beliebige Abscisse AP = x; dann stelle man sich die Aufgabe, den Flächeninhalt BCPM, der zwischen der Hyperbel, der Asymptote und den Ordinaten CB und PM enthalten ist, zu finden.

Man theile CP in eine beliebige Anzahl Theile (ohne diese jedoch als gleich anzunehmen), errichte in den Theilungspunkten die Ordinaten C'B', C''B'' . . . . , und bilde die Rechtecke CBDC', C'B'D'C'', . . . . Addirt man alle diese Rechtecke zusammen, so ist die Grenze dieser Summe der verlangte Flächeninhalt: d. h. wenn die Zwischenräume CC', C'C'' . . . . . immer kleiner werden, bis zum Moment des Verschwindens, weßhalb die Anzahl derselben unendlich groß werden muß, so wird auch die Summe der Rechtecke kleiner und nähert sich immer mehr der hyperbolischen Fläche, der sie zuletzt gleich wird. Diese Grenze soll also gefunden werden.

Man bezeichne nun die Abscissen AC, AC', AC'', AC''', . . . . AP

mit . . . . . 1, x', x'', x''', . . . . x,

so sind die Ordinaten . . . . 1, $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{x''}$, $\frac{1}{x'''}$, . . . . $\frac{1}{x}$;

also Rechteck $CBDC' = CC' \times CB = (x'-1) \times 1 = x' - 1,$

Rechteck $C'B'D'C'' = C'C'' \times C'B' = (x''-x') \times \frac{1}{x'} = \frac{x''}{x'} - 1,$

Rechteck $C''B''D''C''' = C''C''' \times C''B'' = (x'''-x'') \times \frac{1}{x''} = \frac{x'''}{x''} - 1,$

u. s. fort.

Die Theilung der Linie CP durch die Punkte C', C'' . . . ist ganz willkührlich; man kann daher die Abscissen in geometrischer Progression nehmen. Da das erste Glied 1 ist, so ist der Exponent x', und man hat $x'' = x'^2$, $x''' = x'^3$ u. s. w.; wird daher die Zahl der Zwischenräume zwischen C und P mit n bezeichnet, so ist die letzte Abscisse $x = x'^n$. Dann sind alle Rechtecke gleich $x' - 1$.

Addirt man zuerst die zwei ersten Rechtecke, dann die drei ersten, hierauf die vier ersten, und so immer fort, so sind die Summen

$$2(x' - 1),\ 3(x' - 1),\ 4(x' - 1) \text{ u. s. w.}$$

Folglich lassen sich die Flächen der Rechtecke, die bei der Abscisse $AC = 1$ anfangen und je durch die folgenden Abscissen begrenzt werden, auf folgende Weise darstellen:

Abscissen . . . $1$, $x'$, $x'^2$, $x'^3$, . . . . $x'^n$ oder $x$.

Flächen der Rechtecke $0$, $x'-1$, $2(x'-1)$, $3(x'-1)$, . . $n(x'-1)$.

Die erste Fläche wird hier gleich Null gesetzt, weil die zwischen BC und BC enthaltene Fläche selbst Null ist.

Nun ersieht man, daß die Abscissen eine mit der Einheit anfangende geometrische Progression, und die Flächen eine mit Null anfangende arithmetische Progression bilden; also sind die zwischen BC und den andern auf einander folgenden Ordinaten enthaltenen Rechtecksflächen die Logarithmen der Abscissen, denen diese Ordinaten entsprechen.

Diese Folgerung ist von der Anzahl der auf CP gemachten Theile unabhängig, und muß sich also auch für den Fall anwenden lassen, wo ihre Anzahl unendlich wird, oder mit andern Worten auf den Fall, wo man, anstatt vom Punkte C zu P durch eine endliche Zahl von Abscissen in geometrischer Progression zu gelangen, nach einander durch alle zwischenliegenden Abscissen kommt. Dann sind aber die Flächen der Rechtecke nichts anderes mehr, als die hyperbolischen Flächen, die zwischen BC und den diesen Abscissen entsprechenden Ordinaten liegen, woraus sich der folgende schöne Lehrsatz ergibt: *die hyperbolischen Flächen wie BCPM sind die Logarithmen der entsprechenden Abscissen AP.*

Um nun die Basis des Systems, in welchem diese Logarithmen zu nehmen sind, zu finden, muß diejenige Zahl gesucht werden, durch deren Erhebung auf die von einer jener Flächen angedeuteten Potenz sich die entsprechende Abscisse als Resultat ergibt.

Nehmen wir noch einmal in den obigen Progressionen die entsprechenden Glieder

$$x \text{ und } n\,(x' - 1),$$

von welchen das zweite die Summe der zwischen BC und MP enthaltenen Rechtecke ausdrückt. Macht man $n = \infty$, so muß diese Summe gleich der hyperbolischen Fläche BCPM werden, deßhalb setzen wir die Gleichung $E^{n(x'-1)} = x$, oder was dasselbe ist

$$[1] \qquad E^{n(\sqrt[n]{x}-1)} = x,$$

wo der zu suchende Werth E, der dem Werthe $n = \infty$ entspricht, die verlangte Basis ist.

Da der Werth von E für jeden Werth von x derselbe bleiben muß, so wählen wir für x denjenigen Werth, wodurch der Exponent von E gleich 1 wird, wenn man $n = \infty$ macht. Aber aus der Gleichung

$$[2] \qquad n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = 1$$

ergibt sich

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Durch die Entwicklung dieser Potenz erhält man

$$x = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \text{u.s.f.}$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4n}\right) + \text{u. s. f.;}$$

und für $n = \infty$ ergibt sich

$$x = 2 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \text{ u. s. f.}$$

In der Algebra wird bewiesen, daß der genaue Werth dieser numerischen Reihe irrational ist. Nimmt man aber in dieser Reihe eine genügende Anzahl von Gliedern, so kann man diesen Werth so genau als man nur will, erhalten. Bezeichnet man denselben, wie gewöhnlich mit e, so ist

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$$

Setzen wir nun für die Unbestimmte x diesen besondern Werth, so erhalten wir anstatt der Gleichung [1] folgende:

[3] $$E^{n\,(\sqrt[n]{e}-1)} = e.$$

Die Gleichung [2] muß aber befriedigt werden, wenn man $x = e$ und $n = \infty$ setzt; also reducirt sich in der Gleichung [3] der Exponent von E auf 1, wenn man $n = \infty$ macht, daher $E = e$. Somit ist die Zahl e die Basis des Systems, aus welchem die Logarithmen der Abscissen AP genommen werden müssen, um die hyperbolischen Flächen wie BCPM zu erhalten.

Diese Logarithmen hat Neper, der Erfinder der Logarithmen, zuerst berechnet, weßhalb sie die Neper'schen heißen. Bezeichnen wir dieselben mit dem Buchstaben l, so ist

$$\text{Fläche BCPM} = lx.$$

Diese Formel gibt auch die Flächen, welche den Abscissen $< AC$ entsprechen, wenn man nur die Flächen wie BCQN, die links von BC liegen, als negativ betrachtet. Denn zieht man BG und NH senkrecht auf Ay, so ist BGHN $= ly$, da für jede Asymptote alles ähnlich ist. Nun ist

$$\text{BCQN} = \text{BCAG} + \text{BGHN} - \text{NQAH},$$

und wegen

$$xy = 1, \text{ ist } BCAG = NQAH = 1,$$

also

$$BCQN = BGHN = ly = l\frac{1}{x} = -lx.$$

**417.** Bis jetzt wurde nur die gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung $xy = 1$ ist, betrachtet. Nehmen wir jetzt allgemeiner an, die Asymptoten machen einen Winkel $yAx = \beta$ (Fig. 176) mit einander, und man habe die Gleichung

$$xy = m^2.$$

Nun ziehe man $Ay'$ senkrecht auf $Ax$, und denke sich auf den rechtwinkligen Axen $Ax$ und $Ay'$ die gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung $xy = 1$ ist, beschrieben. Setzt man $AC = 1$, $AP = x$, zieht ferner die entsprechenden Ordinaten der beiden Hyperbeln, und bezeichnet die Flächen $BCPM$ und $B'CPM'$ mit $S$ und $s$, so läßt sich durch ähnliche Folgerungen wie in Nro. 358 leicht nachweisen, daß

$$\frac{S}{s} = \frac{m^2 \sin\beta}{1}, \text{ also } S = m^2 \sin\beta \times lx \text{ ist.}$$

Man kann indessen die Fläche $S$ selbst auch als den Logarithmen von $x$ betrachten; dann müssen aber die Logarithmen aus einem System genommen werden, dessen Modul (so heißt nämlich die constante Größe, mit welcher die neper'schen Logarithmen multiplicirt werden müssen, um sie in ein anderes System zu übertragen) $m^2 \sin\beta$ ist.

# Eilftes Kapitel.

## Von der Parabel.

---

**418.** Wir haben bereits (Nro. 267) gesehen, daß eine passende Wahl rechtwinkliger Coordinaten die Gleichung der Parabel auf die Form bringt

[p] $$y^2 = 2px.$$

Dabei kann man p positiv annehmen; denn hätte man $y^2 = -2px$, so dürfte man nur die Richtung der positiven x verändern, um diese Gleichung in $y^2 = 2px$ zu verwandeln.

Diese Form der Gleichung zeigt sogleich, daß der Ursprung ein Punkt der Curve ist, denn für $x = 0$ ist $y = 0$. Auch muß die Abscissenlinie eine Axe der Curve sein, da jede Abscisse zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen ergibt und die Coordinaten überdieß rechtwinklig sind. Diese Axe ist die einzige, welche bei der Parabel stattfindet (Nro. 445).

**419.** Die Gleichung [p] gibt

$$y = \pm\sqrt{2px},$$

woraus sogleich hervorgeht, daß die Curve sich nicht auf die Seite der negativen x erstreckt; denn für negative x wird y imaginär. Wenn aber x von 0 bis $+\infty$ wächst, so wächst auch y bis $\pm\infty$; also erstreckt sich die Parabel symmetrisch oberhalb und unterhalb der Abscissen-Axe vom Anfangspunkt an bis ins Unendliche. Ueberdieß muß sie gegen diese Axe immer concav sein, wie es Fig. 177 darstellt; sonst könnte sie durch eine gerade Linie in mehr als zwei Punkten geschnitten werden, was unmöglich ist.

Die Parabel hat nur *einen Scheitel*, nämlich im Punkte A, wo sie von ihrer Axe geschnitten wird. Der Coefficient von x in der Gleichung [p], wodurch sich eine Parabel von der andern unterscheidet, heißt ihr *Parameter*.

**420.** Da das Verhältniß der Ordinate zur Abscisse schon nach der Gleichung constant ist, so folgt daraus, daß die Quadrate der auf der Axe senkrechten Ordinaten sich in der Parabel verhalten, wie ihre Abstände vom Scheitel.

**421.** Für jeden Punkt der Parabel ist $y^2 - 2px = 0$. Nun muß bei einem Punkt K außerhalb derselben, wenn man auf Ay die Senkrechte QK zieht, deren Verlängerung die Parabel in M trifft, die Abscisse des Punktes K kleiner sein, als von M, während die Ordinate dieselbe bleibt: für den Punkt K ist also $y^2 - 2px > 0$. Für einen innerhalb liegenden Punkt K′ ergibt sich auf ähnliche Weise $y^2 - 2px < 0$.

Somit ist immer.

$y^2 - 2px = 0$ auf der Parabel,
$y^2 - 2px > 0$ außerhalb,
$y^2 - 2px < 0$ innerhalb der Parabel.

**422.** Die Parabel läßt sich auf sehr einfache Weise beschreiben. Es sei AP (Fig. 177) eine beliebige Abscisse; man trage auf die Axe Ax links vom Scheitel eine Linie AB gleich dem Parameter 2p, beschreibe über BP als Durchmesser einen Kreis, der die Senkrechte Ay in R schneidet, errichte die Ordinate PN bis an die mit Ax parallele RN: so gehört der Punkt N zur Parabel. Denn nach dieser Construction ist

$$PN = AR, \text{ und } AR^2 = AB \times AP;$$

also

$$PN^2 = 2p \times AP.$$

**423.** Wir haben (Nro. 260) gesehen, daß für die Parabel die Coordinaten des Mittelpunkts unendlich groß sind; deßhalb können wir diese Curve als eine unendlich verlängerte Ellipse betrachten, und da diese Analogie als Mittel zur leichtern Entdeckung der Eigenschaften der Parabel dienen kann, so ist es von Werth, dieß näher zu erörtern.

Man nehme (Nro. 296) die Gleichung

[e′] $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

in welcher der Ursprung im Scheitel der Ellipse (Fig. 178) liegt. Der Abstand OF des Mittelpunkts vom Brennpunkt ist $\sqrt{a^2 - b^2}$, und wenn man ihn von a abzieht, ist

$$AF = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Setzt man diese Größe als Constante, die gleich $\frac{1}{2}p$ sei, in die Gleichung der Ellipse, so ist

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} = \tfrac{1}{2}p, \quad \text{woraus } b^2 = ap - \tfrac{1}{4}p^2;$$

und durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich die Gleichung [e'] in

$$y^2 = \frac{ap - \frac{1}{4}p^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

oder bei gehöriger Entwickelung des zweiten Glieds

$$y^2 = 2px - \frac{px(p + 2x)}{2a} + \frac{p^2x^2}{4a^2}.$$

Setzt man in dieser Gleichung, während p constant bleibt, nach einander für a verschiedene Werthe, so erhält man eine Reihe von Ellipsen, deren große Axen verschieden sind, aber deren Scheitel A und Brennpunkt F dieselbe Lage beibehalten. Läßt man nun die große Axe unendlich groß werden, so fallen die Glieder, welche a als Divisor enthalten, weg, und die letzte Gleichung verwandelt sich dadurch in folgende:

$$y^2 = 2px,$$

welche eben die der Parabel ist. Also kann man a so groß nehmen, daß die Differenz zwischen der Ordinate der Ellipse und der Parabel so klein ist, als man will, d. h. die Parabel ist eine Ellipse mit unendlich großer Axe.

## Von dem Brennpunkte und den Directricen.

**424.** Bei rechtwinkligen Coordinaten und bei der Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ heißt der Punkt, dessen Entfernung von einem beliebigen Punkte der Parabel eine rationale Function der Abscisse dieses Punktes ist, der Brennpunkt.

Betrachten wir (Fig. 178) eine Reihe von Ellipsen mit gemeinschaftlichem Scheitel A und Brennpunkt F, so ist der Abstand dieses Brennpunktes von einem beliebigen Punkte M auf jeder dieser Curven eine rationale Function der vom Mittelpunkt aus genommenen Abscisse OP; er ist daher auch eine rationale Function der vom Scheitel aus genommenen Abscisse AP; denn es ist OP = AP − AO. Die Parabel ist aber die Grenze dieser Ellipsen; also ist auch der Abstand des Punktes F von jedem Punkte dieser Curve eine rationale Function der Abscisse dieses Punktes. Wird dabei AF mit $\frac{1}{2}p$ bezeichnet, so ist der Parameter der Parabel gleich 2p; also ist der Brennpunkt dieser Curve ein auf ihrer Axe liegender Punkt, der um ein Viertel des Parameters von dem Scheitel entfernt ist.

**425.** Bei der Ellipse ist die Summe der von den Brennpunkten an einen und denselben Punkt dieser Curve gezogenen Radien-Vectoren gleich der großen Axe: suchen wir nun die entsprechende Eigenschaft bei der Parabel.

Es sei (Fig. 178) eine Ellipse mit der großen Axe AA′ und den Brennpunkten F und F′. Man beschreibe aus F′ als Mittelpunkt mit AA′ als Halbmesser eine Kreislinie HBH′, so wird diese die Axe in einem Punkte B schneiden, so daß AB = AF ist. Zieht man nun zwei Radien-Vectoren FN und F′N an irgend einen Punkt der Ellipse, und verlängert F′N, bis sie die Kreislinie in K trifft, so ist offenbar FN = NK. Nimmt man nun an, die Ellipse behalte den Scheitel A und den Brennpunkt F bei, aber ihre große Axe nehme bis ins Unendliche zu, so wird bei dieser Grenze die Ellipse zu einer Parabel, die Kreislinie HH′ verwandelt sich in eine gerade Linie LL′, die in B senkrecht auf der Axe steht, und die Linie NK steht senkrecht auf LL′, bleibt aber dem Radius-Vector NF immer gleich. Die Senkrechte LL′, welche um AF oder um ein Viertel des Parameters vom Scheitel abstеht, heißt Directrix (Richtlinie oder Richtungslinie). Daraus ergibt sich nun folgender Lehrsatz: Jeder Punkt der Parabel ist vom Brennpunkt und der Directrix gleichweit entfernt.

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß bei der Grenze $a = \infty$ eine der Directricen der Ellipse die Lage von LL′ erhält. Denn da nach Nro. 315 c und d die Abstände des Mittelpunktes von den Brennpunkten und den Directricen sind, so muß $cd = a^2$ sein. Es sei nun d′ der Abstand des Scheitels A von der nächsten Directrice, so ist

$$c = a - \tfrac{1}{2}p, \quad d = a + d',$$

und daher

$$(a - \tfrac{1}{2}p)\,(a + d') = a^2,$$

woraus

$$d' = \frac{pa}{2a - p} = \frac{p}{2 - \frac{p}{a}}.$$

und wenn man $a = \infty$ setzt, so ist $d' = \frac{1}{2}p$, woraus sich die Linie LL′ ergibt.

**426.** Um den Brennpunkt der Parabel direct zu erhalten, wende man die schon bei der Ellipse und Hyperbel gemachten Berechnungen auf die Definition an. Es seien x′, y′ die Coordinaten des unbekannten Brennpunktes; x, y die eines beliebigen Punktes der Parabel, und δ der Abstand dieser beiden Punkte, so ist

$$\begin{aligned}\delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y)^2 \\ &= x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2.\end{aligned}$$

Die Gleichung der Parabel ist $y = \sqrt{2px}$; damit daher $\delta^2$ eine rationale Function von x werde, muß $y' = 0$ sein. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + 2px = x^2 + 2\,(p - x')\,x + x'^2.$$

Es genügt jedoch nicht, daß $\delta^2$ eine rationale Function von x sei, es muß auch $\delta$ selbst eine sein; wegen dieser Bedingung muß

$$(p - x')^2 = x'^2 \text{ sein, woraus } x' = \tfrac{1}{2}p;$$

also gibt es in der Parabel nur einen Brennpunkt, der auf der Axe liegt und vom Scheitel um ein Viertel des Parameters absteht.

**427.** Setzt man $\frac{1}{2}p$ anstatt x', so ist

$$\delta = x + \tfrac{1}{2}p.$$

Nimmt man (Fig. 179) AB=AF=$\frac{1}{2}$p und errichtet BL senkrecht auf der Axe Ax, so ist der Punkt F der Brennpunkt der Parabel und BL ihre Directrix. Zieht man ferner von irgend einem Punkte dieser Curve den Radius-Vector FM und auf Ax und BL die Senkrechten MP und MQ, so ist

$$FM = x + \tfrac{1}{2}p = AP + AB = MQ,$$

und so ergibt sich, daß jeder Punkt der Parabel vom Brennpunkt und der Directrix gleichweit entfernt ist.

**428.** Es sei N ein Punkt außerhalb der Parabel; man ziehe NQ senkrecht auf die Directrix, verlängere NQ, bis sie die Curve in M trifft, und verbinde den Brennpunkt F mit N und M: so ist $NF + MN > MF$, und $MF = MQ = NQ + MN$, also auch

$$NF + MN > NQ + MN, \text{ oder } NF > NQ.$$

Für einen innerhalb liegenden Punkt N' ist nach der Construction der Figur, $N'F < N'M + MF$; und da

$$N'M + MF = N'M + MQ = N'Q,$$

so ist

$$N'F < N'Q.$$

Je nachdem also ein Punkt auf der Parabel, oder außerhalb, oder innerhalb derselben liegt, ist sein Abstand vom Brennpunkt so groß, oder größer oder kleiner, als sein Abstand von der Directrix.

**429.** Eine Parabel läßt sich leicht construiren, wenn der Parameter 2p bekannt ist. Nachdem man (Fig. 180) $AB = AF = \frac{1}{2}p$ gemacht hat, errichtet man in einem beliebigen Punkte P der Axe die Senkrechte GH, und beschreibt dann aus F als Mittelpunkt mit BP als Halbmesser einen Kreisbogen, der GH in M und N schneidet; so sind diese Punkte der Parabel: denn sie stehen vom Brennpunkte F und der Directrix BL gleichweit ab.

Will man die Parabel in einer stetigen Bewegung beschreiben, so lege man ein bewegliches Winkelmaß EQR an die Directrix BL an, und

befestige einen Faden, so lang als QR, mit einem Ende in R, mit dem andern im Brennpunkt F; hierauf spanne man den Faden mittelst eines an QR sich anlehnenden Stiftes an, und lasse das Winkelmaß längs der Directrix hingleiten: so beschreibt der Stift die Parabel. Denn es ist dann immer $FM + MR = QM + MR$, oder $FM = QM$; also ist M ein Punkt der Parabel.

**430.** Suchen wir noch die Gleichung der Parabel nach folgender Aufgabe, der nämlichen wie in Nro. 316, wo $m = n$ gesetzt ist:

Die Curve zu finden, auf welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte F und einer gegebenen Geraden LL' (Fig. 180) gleichweit entfernt ist.

Man ziehe BFx senkrecht auf LL', und errichte in A, der Mitte von BF, die Ay senkrecht auf Ax. Nun muß die Curve in Beziehung auf Ax symmetrisch sein und durch den Punkt A gehen; deßhalb wählt man die Linien Ax und Ay zu Coordinaten-Axen.

Es sei nun M ein beliebiger Punkt der Curve, AP seine Abscisse und MP seine Ordinate; man ziehe noch MQ senkrecht auf LL' und setze

$$AF = \tfrac{1}{2}p, \quad AP = x, \quad MP = y;$$

so ist

$$MF^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2, \quad \text{und} \quad MQ = x + \tfrac{1}{2}p;$$

nach der Aufgabe muß aber $MF = MQ$ sein; daraus ergibt sich

$$y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = (x + \tfrac{1}{2}p)^2$$

als Gleichung der Curve, oder nach geschehener Reduction

$$y^2 = 2px.$$

**431.** Auch hier läßt sich auf den Brennpunkt und die Directrix der Parabel das anwenden, was in Betreff der Ellipse Nro. 317 und 318 bemerkt wurde.

### Von der Tangente und Normale.

**432.** Die Coordinaten zweier Punkte der Parabel seien $x'$, $y'$ und $x''$ und $y''$; zieht man durch diese Punkte eine Secante, und bezeichnet den durch diese Secante mit der Abscissen-Axe gebildeten Winkel mit S, so ist

$$\operatorname{tang} S = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Da nun die beiden Punkte auf der Parabel liegen, so muß auch $y'^2 = 2px'$ und $y''^2 = 2px''$ sein; daraus ergibt sich

$$y'^2 - y''^2 = 2p\,(x' - x''),$$

woraus

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{2p}{y' + y''},$$

also

$$\text{tang } S = \frac{2p}{y' + y''}.$$

Fällt der zweite Punkt mit dem ersten zusammen, so ist $x'' = x'$, $y'' = y'$, und die Secante wird dann zur Tangente; bezeichnet man daher die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Abscissen-Axe mit der Tangente an der Parabel bildet, mit $\alpha$, so ist

$$\alpha = \frac{p}{y'}.$$

Folglich ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'),$$

oder auch, mit Beachtung von $y'^2 = 2px'$,

[1] $$y'y = p(x + x').$$

**433.** Zieht man diese Gleichung doppelt von $y'^2 = 2px'$ ab, so bleibt

$$y'^2 - 2y'y = -2px,$$

und indem man auf beiden Seiten $y^2$ addirt, ergibt sich

$$(y - y')^2 = y^2 - 2px.$$

Die Größe $y^2 - 2px$ ist also für alle Punkte der Tangente positiv, außer für den, dessen Ordinate $y'$ ist; alle diese Punkte liegen daher außerhalb der Parabel (Nro. 421).

**434.** Setzt man $y' = 0$ in der Formel $\alpha = \frac{p}{y'}$, so wird $\alpha = \infty$; also steht die Tangente im Scheitel senkrecht auf der Axe. Läßt man $y'$ bis ins Unendliche positiv wachsen, so nimmt $\alpha$ bis auf Null ab; somit nähert sich die Tangente an der Parabel immer mehr einer mit der Axe parallelen Lage.

**435.** Um den Punkt T (Fig. 181) zu erhalten, wo die Tangente die Abscissen-Axe schneidet, muß in der Gleichung dieser Linie $y = 0$ gesetzt werden, woraus sich ergibt

$$x = -x',$$

welches Resultat zeigt, daß der Punkt T auf der negativen Abscissenlinie, in einem Abstand AT gleich der Abscisse AP liegt.

Addirt man $x'$ zu AT, so hat man die Subtangente

$$PT = 2x';$$

also ist bei der Parabel die Subtangente doppelt so groß als die Abscisse, was eine sehr einfache Construction der Tangente ergibt.

**436.** Wenn die Gleichung der Tangente an die Parabel

[t] $$y'y = p(x + x')$$

für den Punkt, dessen Coordinaten $x'$ und $y'$ sind, gefunden ist, so läßt sich die der Tangente, welche durch einen außerhalb liegenden Punkt geht, leicht finden. Sind die Coordinaten dieses Punktes $x''$ und $y''$, so müssen sie der Gleichung der Tangente genügen: es finden also zwischen den Unbekannten $x'$ und $y'$ die beiden Gleichungen statt:

$$y'^2 = 2px', \quad y''y' = p(x' + x'').$$

Daraus ergibt sich

$$y' = y'' \pm \sqrt{y''^2 - 2px''},$$

$$x' = \frac{y''^2 - px'' \pm y''\sqrt{y''^2 - 2px''}}{p},$$

und man dürfte nur noch diese Werthe in [t] substituiren.

Liegt der gegebene Punkt außerhalb der Parabel, so ist die Größe $y''^2 - 2px''$ positiv, und die beiden Werthe für $y'$, sowie die für $x'$ sind reell und ungleich; also lassen sich dann zwei Tangenten ziehen. Liegt der gegebene Punkt auf der Curve, so reduciren sich die beiden Werthe von $x'$, sowie die von $y'$ auf einen einzigen, und es findet nur eine einzige Tangente statt. Liegt endlich der gegebene Punkt innerhalb der Curve, wofür die Werthe von $x'$ und $y'$ imaginär werden, so findet keine Tangente mehr statt.

**437.** Suchen wir nun die Gleichung der Normale an die Parabel für den Punkt, dessen Coordinaten $x'$ und $y'$ sind. Diese Gleichung hat die Form

$$y - y' = \alpha'(x - x').$$

Da ferner die Normale senkrecht auf der Tangente stehen muß, so ist

$$\alpha' = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{y'}{p};$$

und somit ist die Gleichung der Normale

[n] $$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

Setzt man in dieser Gleichung $y=0$, und nimmt den entsprechenden Werth für $x - x'$, so ergibt sich für die Subnormale PS (Fig. 181)

$$PS = x - x' = p;$$

also ist in der Parabel die Subnormale constant und gleich dem halben Parameter.

**438.** Wenn der Brennpunkt der Parabel in F (Fig. 181) liegt, so ist, wie wir gesehen, $AF = \frac{1}{2}p$ und $FM = x + \frac{1}{2}p$, und ist MT die an M gezogene Tangente, so ist $AT = x$; folglich ist $TF = x + \frac{1}{2}p$, also $FM = TF$ und Winkel $TMF = FTM$. Somit macht bei der Parabel die Tangente gleiche Winkel mit der Axe und dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius-Vector.

Zieht man MG parallel mit der Axe, so ist Winkel $RMG = FTM$; also kann man auch sagen, die Tangente macht mit dem Radius-Vector und der durch den Berührungspunkt mit der Axe gezogenen Parallele gleiche Winkel. Dieser Lehrsatz ist dem in Nro. 330 analog, was schon aus der Betrachtung der Parabel als eine Ellipse, deren Brennpunkte unendlich weit von einander abstehen, hervorgehen mußte.

**439.** Hieraus ergibt sich ein sehr einfaches Mittel, durch einen gegebenen Punkt eine Tangente an die Parabel zu ziehen. Nehmen wir zuerst an, dieser Punkt liege auf der Curve in M (Fig. 182). Nun ziehe man den Radius-Vector FM, nehme $FT = FM$, und ziehe MT, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

Um dieß a posteriori zu beweisen, ziehe man die Directrix BL in dem Abstand $AB = AF = \frac{1}{2}p$, ferner MK parallel mit der Axe und noch KF. Der Natur der Curve gemäß ist $MK = MF$ (Nro. 425), und aus der Construction folgt Winkel $KMT = TMF$; also steht MT senkrecht auf der Mitte von KF. Zieht man jetzt von einem beliebigen auf MT liegenden Punkte R die RF an den Brennpunkt, die RL senkrecht auf BL und noch KR, so ist $RF = RK$; da aber $RK > RL$, so ist auch $RF > RL$. Also liegt außer M jeder Punkt der MT außerhalb der Parabel (Nro. 428).

**440.** Bemerkung. Da der Punkt A die Mitte von BF ist, so muß die auf der Axe senkrecht stehende Ay durch die Mitte O von KF gehen. Nun geht auch die Tangente TR durch diesen Punkt und steht senkrecht auf OF; also ist bei der Parabel die durch den Scheitel auf die Axe gezogene Senkrechte der geometrische Ort für die Fußpunkte der aus dem Brennpunkt auf die Tangenten gezogenen Senkrechten.

**441.** Soll die Tangente durch einen außerhalb der Parabel liegenden Punkt T (Fig. 183) gezogen werden, und es ist M der gesuchte

Berührungspunkt und MT die Tangente, so beachte man, wenn MF an den Brennpunkt und MK senkrecht auf LL′ gezogen wird, daß die Tangente auf der Mitte der Geraden FK senkrecht stehen muß; also sind die Abstände TF und TK einander gleich, und daher ist der Punkt K als Durchschnittspunkt der Directrix mit dem aus dem Mittelpunkte T und dem Halbmesser FT beschriebenen Kreise bekannt. Zieht man dann KF und fällt TR senkrecht auf KF, so ist TR die Tangente an die Curve, und der Durchschnittspunkt M dieser Tangente und der mit der Axe gezogenen Parallele KM ist der Berührungspunkt.

Liegt der Punkt T außerhalb der Parabel, so ist sein Abstand TF vom Brennpunkt größer als sein Abstand von der Directrix; also schneidet der Kreis die Directrix in zwei Punkten K und K′, und es ergeben sich zwei Tangenten. Liegt der Punkt T auf der Parabel, so ist TF gleich dem Abstand des Punktes T von der Directrix; also berührt der Kreis diese Linie, und es findet nur noch eine Tangente statt. Liegt endlich der Punkt T innerhalb der Parabel, so ist der erste Abstand kleiner als der zweite, der Kreis trifft die Directrix nicht, und es ist durch denselben keine Tangente mehr möglich.

**442.** Die vorige Construction läßt sich als eine Modification der für die Ellipse Nro. 333 gegebenen betrachten, welche Modification sich daraus ergibt, daß die Parabel eine Ellipse mit unendlich großer Axe ist.

Bei der für die Ellipse gegebenen Construction beschreibt man einen Kreis LBL′ (Fig. 184) aus einem der Brennpunkte F′ mit einem Halbmesser F′B gleich der großen Axe AA′; dann beschreibt man einen andern Kreis aus dem gegebenen Punkte T als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich dem Abstand TF dieses Punktes von dem andern Brennpunkt. Aus K, einem der Durchschnittspunkte beider Kreise ziehe man KF, fälle die Senkrechte TR auf KF, und ziehe KF′, welche die TR in M schneidet: so ist TR die Tangente und M der Berührungspunkt.

Denken wir uns nun, die große Axe der Ellipse werde, während A immer noch der Scheitel und F der Brennpunkt bleibt, unendlich groß, so müssen die Punkte A′ und F′ sich unendlich weit entfernen; da aber

$$AB = A'F' = AF$$

ist, so muß der Kreis LBL′ die Axe stets in demselben Punkte B treffen. Ist AA′ unendlich groß, so wird diese Kreislinie zur Directrix der Parabel, die Linie KF′ lauft dann parallel mit der Axe, und man erhält so die für die Parabel sich eignende Construction.

**443.** Die Fälle, wo die Tangenten von einem auf der Directrix liegenden Punkte ausgehen, verdienen einer besondern Beachtung. Es sei T (Fig. 185) ein Punkt der Directrix, und TM, TM′ zwei Tangenten; der Brennpunkt der Parabel sei F, man ziehe TF, MF und M′F, und fälle die Senkrechten MK, M′K′ auf die Directrix.

Das Dreieck TKM ist congruent TFM, weil TM gemeinschaftlich, KM = MF, und Winkel KMT = FMT; also ist Winkel TFM, da er gleich Winkel K ist, ein rechter, und ferner Winkel KTM = FTM. Die Dreiecke TM'K' und TM'F sind ebenfalls congruent, weßhalb auch Winkel TFM' ein rechter, und Winkel K'TM' = FTM' ist.

Da die Winkel TFM und TFM' rechte sind, so muß MTM' eine gerade Linie sein, und da die Winkel FTM und FTM' gleich den Winkeln KTM und K'TM' sind, so muß ihre Summe je einen rechten betragen; also ist auch Winkel MTM' ein rechter. Somit ergibt sich folgender merkwürdige Lehrsatz:

*Die durch einen Punkt der Directrix an die Parabel gezogenen Tangenten bilden mit einander einen rechten Winkel, und die Gerade, welche ihre Berührungspunkte mit einander verbindet, geht durch den Brennpunkt und steht auf derjenigen senkrecht, welche den Brennpunkt mit dem betreffenden Punkt auf der Directrix verbindet.*

## Von den Durchmessern.

**144.** Die Gleichung einer beliebigen Geraden sei

$$y = \delta x + \beta;$$

verbindet man sie mit der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px,$$

und eliminirt x, so erhält man zur Bestimmung von y,

$$y^2 - \frac{2p}{\delta} y + \frac{2p\beta}{\delta} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten der Punkte, wo die Gerade die Curve trifft, und die Ordinate der Mitte der diese Punkte verbindenden Sehne ist gleich der halben Summe dieser beiden Wurzeln; also ist, wenn diese Ordinate mit y bezeichnet wird,

$$y = \frac{p}{\delta}.$$

Dieser Werth enthält $\beta$ nicht und bleibt derselbe, so lange $\delta$ constant bleibt: *also sind alle Durchmesser der Parabel parallel mit der Axe.*

*Umgekehrt kann jede mit der Axe parallele Gerade als ein Durchmesser der Parabel betrachtet werden:* denn, indem man für $\delta$ einen geeigneten Werth annimmt, kann y jeder beliebigen Größe gleich werden.

**445.** Angenommen, ein Durchmesser A'x' (Fig. 186) werde in einem Abstand y' von der Axe gezogen, so ist für diesen Durchmesser

$$\frac{p}{\delta} = y', \quad \text{woraus} \quad \delta = \frac{p}{y'}.$$

Dieß ist der Werth der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die durch den Durchmesser halbirten Sehnen mit der Axe bilden. Außerdem ist dieß auch der Werth der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die Tangente im Punkte A' mit der Axe bildet (Nro. 432); also sind die Sehnen, welche ein Durchmesser halbirt, mit der durch den Endpunkt dieses Durchmessers gezogenen Tangente parallel.

Damit die Tangente $\delta$ unendlich werde, muß man $y' = 0$ setzen; folglich ist die Axe der x die einzige Axe der Parabel.

## Die Parabel bezogen auf ihre Durchmesser.

**446.** Um von den rechtwinkligen Axen auf schiefwinklige überzugehen, haben wir die Formeln

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' + a, \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha' + b.$$

Da die Gleichung der Parabel für rechtwinklige Coordinaten $y^2 = 2px$ ist, so hat man, wenn der neue Ursprung in einen Punkt A' der Curve (Fig. 186) versetzt wird, zwischen a und b die Gleichung $b^2 = 2pa$. Nimmt man ferner den Durchmesser A'x' als Axe der x', so ist $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, und wenn die Tangente A'y' als Axe der y genommen wird, so ist $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{p}{b}$.

Nehmen wir nun die bekannten Formeln (Nro. 25)

$$\sin\alpha' = \frac{\operatorname{tang}\alpha'}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha'}}, \quad \cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha'}},$$

und setzt man hier für $\operatorname{tang}\alpha'$ den vorigen Werth, so erhält man

$$\sin\alpha' = \frac{p}{\sqrt{b^2 + p^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{b}{\sqrt{b^2 + p^2}},$$

und durch Substitution dieser Werthe für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha'$, $\cos\alpha'$, erhält man zur Umformung folgende Formeln:

$$x = x' + \frac{by'}{\sqrt{b^2 + p^2}} + a,$$

$$y = \frac{py'}{\sqrt{b^2 + p^2}} + b.$$

Um nun die Parabel auf die neuen Axen zu beziehen, darf man diese Werthe nur noch in die Gleichung

[p] $$y^2 = 2px$$

setzen, so erhält man durch diese Substitution

$$y'^2 = \frac{2(b^2 + p^2)}{p} x'.$$

Setzen wir noch für $b^2$ seinen Werth $2pa$, und der Abkürzung wegen $4(a + \frac{1}{2}p) = 2p'$, so ist

$$\frac{2(b^2 + p^2)}{p} = \frac{2(2pa + p^2)}{p} = 4(a + \tfrac{1}{2}p) = 2p',$$

und die Gleichung der Parabel wird, wenn man die Accente bei x' und y' wegnimmt,

[p,] $$y^2 = 2p'x.$$

Der Coefficient $2p'$ heißt der Parameter des Durchmessers, auf welchen die Parabel bezogen wird, und da $2p'$ eigentlich $4(a + \frac{1}{2}p)$ bezeichnet, und $a + \frac{1}{2}p$ den Abstand des Brennpunktes vom Punkte A' (Nro. 427) ausdrückt, so folgt, daß der Parameter eines Durchmessers viermal so groß ist, als der Abstand des Brennpunktes vom Endpunkte dieses Durchmessers.

**447.** Da die Gleichung der Parabel in Beziehung auf ihre Durchmesser dieselbe ist, wie in Beziehung auf ihre Axe, so sind die von der Neigung der Coordinaten unabhängigen Eigenschaften den verschiedenen Systemen gemeinschaftlich.

1) Je nachdem ein Punkt auf der Parabel, oder außerhalb, oder innerhalb derselben liegt, muß die Größe $y^2 - 2px$ Null, oder positiv oder negativ sein (Nro. 421).

2) Die Quadrate der Ordinaten auf den Durchmesser verhalten sich wie die entsprechenden Abschiffen (Nro. 420).

3) Bezeichnet man das Sinusverhältniß, das in der allgemeinen Gleichung der geraden Linie dem Coefficienten von x gleich ist, mit $\alpha$, so ist der Werth von $\alpha$ in Beziehung auf die Tangente (Nro. 432)

$$\alpha = \frac{p'}{y'};$$

und man hat als Gleichung der Tangente

$$y'y = p'(x + x'),$$

und für die Subtangente (Nro. 435)

$$P'T' = 2x':$$

d. h. die Subtangente ist immer doppelt so groß als die Abscisse des Berührungspunktes.

**448.** Ist eine Gerade gegeben, und man zieht eine mit dieser parallele Tangente an die Parabel, sowie den durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser, so ist die Gleichung der auf dieses Axen-System bezogenen Curve $y^2 = 2p'x$. Zieht man nun aus einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden zwei Tangenten an die Parabel, und bezeichnet die Coordinaten dieses Punktes mit $x''$ und $y''$, so hat man (Nro. 436) zur Bestimmung der Coordinaten der Berührungspunkte die beiden Gleichungen

$$y'^2 = 2p'x', \quad y''y' = p'(x' + x'').$$

Die zweite zeigt, daß die Gerade mit der Gleichung

$$y''y = p'(x' + x'')$$

durch die Berührungspunkte geht. Macht man in dieser Gleichung $y=0$, so ist $x = -x''$, ein von $y''$ unabhängiges Resultat, das für die Parabel den schon für die Ellipse und Hyperbel gefundenen Lehrsatz (Nro. 353, 403) ergibt. Also überhaupt, wenn man von jedem Punkt einer gegebenen Geraden zwei Tangenten an eine Curve der zweiten Ordnung, und durch die Berührungspunkte je eine Gerade zieht, so schneiden diese Secanten sich alle in einem Punkte, der auf dem Durchmesser liegt, welcher die mit der gegebenen Geraden parallelen Sehnen halbirt.

Und umgekehrt, zieht man durch einen gegebenen Punkt in der Ebene einer Curve der zweiten Ordnung mehrere Secanten, und durch die Punkte, wo jede Secante die Curve trifft, zwei Tangenten, so ist der Ort der Durchschnittspunkte je zweier dieser Tangenten eine Gerade, die mit den Sehnen, welche der durch den gegebenen Punkt gehende Durchmesser halbirt, parallel ist.

**449.** Die Gleichung $[p_1]$ verglichen mit $[p]$ zeigt auch, daß zur Beschreibung einer Parabel, wenn der Parameter eines Durchmessers und die Neigung der entsprechenden Ordinaten bekannt sind, es genügt, wenn man zuerst mit dem gegebenen Parameter auf jenem als Axe angenommenen Durchmesser eine Parabel beschreibt, und dann den Ordinaten dieser Curve, ohne ihre Länge zu verändern, die gehörige Neigung gibt.

Auch kann man zuerst den Brennpunkt und die Directrix der Parabel bestimmen und sie dann beschreiben. Es sei $A'x'$ (Fig. 187) der gegebene Durchmesser; nun ziehe man die Gerade $y'A'T$ in der gegebenen Neigung, so ist diese die Tangente an der Parabel im Punkte $A'$ (Nro. 445); macht man Winkel $TA'F = y'A'x'$, so geht die Linie $A'F$ durch den Brennpunkt (Nro. 438), und nimmt man $A'F$ gleich einem Viertel des gegebenen

Parameters, so ist der Punkt F der Brennpunkt (Nro. 446). Nun trage man auf der Verlängerung von A'x' die A'C = A'F an, und ziehe CL senkrecht auf A'x', so ist CL die Directrix (Nro. 427).

## Quadratur der Parabel.

**450.** Es sei APM (Fig. 188) ein parabolisches Segment, das von dem Durchmesser Ax und der mit der Tangente AV parallelen Ordinate PM begrenzt wird, man soll seinen Flächeninhalt finden.

Man beschreibe in das Segment ein Vieleck, ziehe durch die Winkelspitzen desselben die Ordinaten P'M', P''M'' . . . ., und die Tangenten MT, M'T', M''T'' . . . . .

Diese Tangenten bilden durch ihre auf einander folgenden Durchschnitte die Dreiecke TRT', T'R'T'' . . ., die wir mit den entsprechenden Trapezen PMM'P', P'M'M''P'' . . . . vergleichen wollen.

Fällt man vom Punkte R, und aus dem Halbirungspunkte I der Sehne MM' die Senkrechten RQ und IK auf Ax, so ist

$$\text{Fläche } TRT' = \tfrac{1}{2}TT' \times RQ, \quad \text{Fläche } PMM'P' = PP' \times IK.$$

Da aber MT eine Tangente ist, so folgt daß AT = AP (Nro. 447), und aus demselben Grunde ist AT' = AP'; also TT' = PP'. Zieht man ferner aus I die IG parallel mit Ax, so ist diese Linie ein Durchmesser (Nro. 444), und die in den Punkten M und M' gezogenen Tangenten müssen diesen Durchmesser in demselben Punkte schneiden; also liegt der Punkt R auf dem Durchmesser IG, und RQ ist gleich IK. Mithin ist das Trapez doppelt so groß als das Dreieck; ebenso ließe sich zeigen, daß P'M'M''P'' doppelt so groß ist als T'R'T'', und so fort. Folglich ist die Summe der Trapeze doppelt so groß als die Summe der Dreiecke, wie groß auch die Anzahl der Vielecksseiten sein mögt. Daraus folgt, daß das parabolische Segment AMP, das die Grenze der ersten Summe ausmacht, doppelt so groß ist, als das äußere Segment AMT, das die Grenze der zweiten Summe bildet. Nun ist das Segment APM das doppelte von AMT, daher beträgt es zwei Drittel von dem geradlinigen Dreieck TMP, und da dieses Dreieck so groß ist als das Parallelogramm APMV, das mit demselben gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie AP die Hälfte von TP ist, so folgt zuletzt, daß das parabolische Segment APM zwei Drittel des Parallelogramms beträgt, das aus der Abscisse AP und der Ordinate MP gebildet ist.

# Zwölftes Kapitel.

## Von den Polar-Coordinaten.

### Erklärungen. Allgemeine Formeln.

**451.** Anstatt die Lage verschiedener Punkte einer Ebene dadurch zu bestimmen, daß man sie, wie bisher geschehen, auf zwei in dieser Ebene verzeichnete Axen bezieht, kann man auch die Lage jedes dieser Punkte mittelst seines Abstandes MF (Fig. 189) von einem festen Punkte F und des Winkels MFR bestimmen, den die MF mit einer der Lage nach gegebenen FR bildet. Der feste Punkt F heißt Pol oder Anfangspunkt, der Abstand MF ist der Radius-Vector des Punktes M, und MFR ist der durch den Radius-Vector beschriebene Winkel (Polar-Winkel). Der Radius-Vector und der entsprechende Winkel werden auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Polar-Coordinaten bezeichnet.

Um die gegenseitige Beziehung des Polar-Winkels und des Radius-Vectors recht zu verstehen, denke man sich eine in F begrenzte, aber in der andern Richtung unbegrenzte Gerade FS, die zuerst auf FR, welche selbst in F begrenzt ist, liegt und sich dann immer in derselben Richtung um den Pol F dreht. Dann beschreibt ein auf dieser Linie willkührlich genommener Punkt einen Bogen, der bis auf 360°, und selbst bis auf $+\infty$ wachsen kann, und dreht sich FS in negativer Richtung, so wird der Bogen negativ und kann wieder bis $-\infty$ wachsen. Diesen Bogen, den wir in der Folge mit $\omega$ bezeichnen wollen, nimmt man anstatt des mit dem Radius-Vector beschriebenen Winkels.

Der Radius-Vector MF, den wir durch $\varrho$ bezeichnen wollen, kann alle möglichen, positiven oder negativen Werthe erhalten. Mittelst der ersten werden die auf dem Radius-Vector selbst liegenden Punkte, und mittelst der letzten die auf seiner Verlängerung auf der andern Seite des Pols liegenden Punkte bestimmt.

Gibt man nun nach diesen Erläuterungen den Veränderlichen $\omega$ und $\varrho$ besondere Werthe, so läßt sich damit die Lage des Punktes bestimmen, auf den sich diese Coordinaten beziehen.

Es sei z. B. $\omega = 352^0$ und $\varrho = 17^m$ (Meter); so nimmt man den Bogen $\lambda\mu\nu = 352^0$, und zieht die Gerade $F\nu N$, auf der man in der Richtung $F\nu$ den Abstand $FN = 17^m$ abschneidet. Würde man

$$\omega = 352^0 \text{ und } \varrho = -17^m$$

setzen, so müßte man $FN' = 17^m$ auf der entgegengesetzten Verlängerung von $F\nu$ nehmen.

**152.** Suchen wir nun die allgemeinen Formeln, wodurch die mit zwei Axen parallelen Coordinaten in Polar-Coordinaten ausgedrückt werden.

Es seien AP und MP (Fig. 190) die Coordinaten eines beliebigen auf die Axen Ax und Ay bezogenen Punktes M; man setze $AP = x$, und $MP = y$. Der Winkel MFR und der Abstand FM seien die Polar-Coordinaten desselben Punktes, und es sei $MFR = \omega$, und $FM = \varrho$. Nun ziehe man parallel mit Ax und Ay die Linien Fx' und Fy', die MP in Q, und Ax in B schneiden, und bezeichne die Coordinaten AB und BF des Pols F mit a und b, den Winkel RFx' mit $\alpha$, und den Winkel yAx oder y'Fx' mit $\theta$: so ist

$$x = a + FQ, \quad y = b + MQ.$$

Im Dreieck MFQ ist aber

$$\frac{FM}{\sin MQF} = \frac{FQ}{\sin FMQ} = \frac{MQ}{\sin MFQ};$$

nun ist $FM = \varrho$, $\sin MQF = \sin\theta$, $\sin MFQ = \sin(\alpha + \omega)$, $\sin FMQ = \sin y'FM = \sin(\theta - \alpha - \omega)$, also

$$\frac{\varrho}{\sin\theta} = \frac{FQ}{\sin(\theta-\alpha-\omega)} = \frac{MQ}{\sin(\alpha+\omega)}.$$

Daraus ergibt sich

$$FQ = \frac{\varrho\sin(\theta-\alpha-\omega)}{\sin\theta}, \quad MQ = \frac{\varrho\sin(\alpha+\omega)}{\sin\theta},$$

und durch Substitution dieser Werthe in die für x und y erhält man

$$[1] \qquad x = a + \frac{\varrho\sin(\theta-\alpha-\omega)}{\sin\theta}, \quad y = b + \frac{\varrho\sin(\alpha+\omega)}{\sin\theta}.$$

**153.** Sind die Coordinaten x und y rechtwinklig, so ist $\theta = 90^0$, und daher

$$[2] \qquad x = a + \varrho\cos(\alpha+\omega), \quad y = b + \varrho\sin(\alpha+\omega),$$

welche Formeln auch leicht direct zu finden wären.

**454.** Die Allgemeinheit der Formeln [1] läßt keine Beschränkung zu, und es soll nur noch ihre Gültigkeit für den in Fig. 191 dargestellten Fall gezeigt werden; hier ist

$$x = AP, \quad y = -PM, \quad a = AB, \quad b = -BF, \quad \varrho = -FM,$$
$$\theta = k\mu, \quad \alpha = k\mu\lambda = 360^0 - k\lambda, \quad \omega = \lambda\nu.$$

Setzt man diese Werthe in die allgemeinen Formeln, so erhält man

$$AP = AB + \frac{-FM\sin(k\mu - 360^0 + k\lambda - \lambda\nu)}{\sin k\mu} = AB - \frac{FM\sin\mu\nu}{\sin k\mu},$$

$$-PM = -BF + \frac{-FM\sin(360^0 - k\lambda + \lambda\nu)}{\sin k\mu} = -BF - \frac{FM\sin k\nu}{\sin k\mu}.$$

Aber aus dem Dreieck MFQ ergibt sich

$$QF = \frac{FM\sin\mu\nu}{\sin k\mu} \text{ und } MQ = \frac{FM\sin k\nu}{\sin k\mu},$$

woraus die Richtigkeit der beiden Gleichungen hervorgeht; denn sie verwandeln sich dann in

$$AP = AB - QF = AP, \quad -PM = -BF - MQ = -PM.$$

Anstatt $\varrho = -FM$ und $\omega = \lambda\nu$ könnte man auch setzen

$$\varrho = +FM \text{ und } \omega = \lambda\mu\nu' \text{ oder } \omega = -\lambda\nu',$$

wofür sich dieselbe Gültigkeit erweisen ließe.

## Polar-Gleichungen der drei Curven der zweiten Ordnung.

**455.** Ellipse. Es sei $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ die Gleichung einer auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen (Fig. 192) bezogenen Ellipse, und F der auf der negativen Abscisse liegende Brennpunkt: wird der Abstand AF mit c, und der Radius-Vector FM mit $\varrho$ bezeichnet, so ist nach Nro. 308

$$[1] \qquad \varrho = a + \frac{cx}{a}.$$

Bezeichnen wir den veränderlichen Winkel MFx mit $\omega$, so gibt das rechtwinklige Dreieck MFP sogleich $FP = \varrho\cos\omega$, und daher

$$x = \varrho\cos\omega - c.$$

Setzt man diesen Werth für x in die Gleichung [1], so ist

$$\varrho = a + \frac{c\varrho\cos\omega - c^2}{a},$$

woraus sich, da $c^2 = a^2 - b^2$ ist,

$$\varrho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega} \text{ ergibt.}$$

Setzen wir $\frac{c}{a} = e$, und $\frac{b^2}{a} = p$, so erhält man

$$[\alpha] \qquad \varrho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}.$$

Dieß ist die Polargleichung der Ellipse. Setzt man für $\omega$ alle möglichen Werthe von 0 bis 360°, so erhält man für den Radius-Vector $\varrho$ oder FM die entsprechenden Werthe, wodurch alle Punkte der Curve bestimmt werden.

Die Größe 2p, die eine dritte Proportionale zwischen der großen und kleinen Axe ist, heißt der Parameter der Ellipse. Sonach stellt e in der Gleichung [α] das Verhältniß der Excentricität zur kleinen Axe, welches kleiner als die Einheit ist, und p den halben Parameter dar.

Der Parameter der Ellipse ist aber nicht zu verwechseln mit dem Parameter eines Durchmessers; denn dieser ist die dritte Proportionale zum Durchmesser und dem ihm zugeordneten (conjugirten).

**456.** Hyperbel. Es sei $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ die Gleichung einer Hyperbel und F (Fig. 193) der auf der positiven Abscisse befindliche Brennpunkt; wird nun der Abstand AF mit c und der Radius-Vector FM mit $\varrho$ bezeichnet, so ist nach (Nro. 367)

$$[2] \qquad \varrho = \frac{cx}{a} - a, \qquad \text{oder } \varrho = -\frac{cx}{a} + a,$$

je nachdem der Punkt M auf dem den Brennpunkt F enthaltenden Aste, oder auf dem entgegengesetzten liegt.

Bezeichnet man den Winkel MFx mit $\omega$, so ist immer, welche Lage auch M haben möge, $x = c + \varrho\cos\omega$. Wird dieser Werth in den Gleichungen [2] substituirt, ferner $\frac{c}{a} = e$ und $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt, so ergibt sich

$$[\beta] \qquad \varrho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \quad \text{und } [\beta'] \quad \varrho = \frac{-p}{1 + e\cos\omega}.$$

Die Größe e, welche hier größer als die Einheit ist, drückt wieder das Verhältniß der Excentricität zur ersten Axe aus, und 2p ist der Parameter der Hyperbel, d. h. eine dritte Proportionale zur ersten und zweiten Axe.

Es ist hier zu beachten, daß $\varrho$ in den Gleichungen [2] positiv sein muß (Nro. 367), und daß daher diese Voraussetzung auch für die Gleichungen [β] und [β'], welche aus jenen abgeleitet sind, beizubehalten ist;

also müssen die negativen Werthe der Veränderlichen $\varrho$, als wären sie imaginäre, weggelassen werden. Dann gibt die Gleichung [$\beta$] den einen, und die Gleichung [$\beta'$] den andern Ast der Hyperbel.

Um in dieser Beziehung keinen Zweifel übrig zu lassen, wollen wir jede der beiden Gleichungen nach einander discutiren. Nehmen wir zuerst an, der Radius-Vector liege auf Fx, so ist $\omega = 0$, und die Gleichung [$\beta$] gibt

$$\varrho = \frac{p}{1 - e}.$$

Dieser Werth ist negativ, denn e ist größer als 1; die Curve hat also für diesen Werth keinen entsprechenden Punkt. Ueberhaupt hat $\varrho$ das Vorzeichen des Nenners $1 - e \cos \omega$, da der Zähler p positiv ist: nun bleibt aber $1 - e \cos \omega$ negativ, bis

$$1 - e \cos \omega = 0, \text{ und somit } \cos \omega = \frac{1}{e}$$

wird; also findet sich von $\omega = 0$ an bis zu dieser Grenze kein Punkt der Hyperbel auf dem Radius-Vector. Untersuchen wir nun, was diese Grenze vorstellt.

Setzt man $\frac{c}{a}$ für e, so verwandelt sich der Werth $\frac{1}{e}$ in $\frac{a}{c}$. Errichtet man aber auf der Axe CB die Senkrechte BI gleich b, so ist bekanntlich die Gerade AI eine Asymptote der Hyperbel (Nro. 406), und das Dreieck AIB gibt

$$\cos IAB = \frac{AB}{AI} = \frac{a}{c};$$

also ist die mit der Asymptote AI Parallele FH die Grenze, zu welcher sich der Radius-Vector erhebt, ohne sein negatives Vorzeichen zu verlieren. Der Winkel HFx werde mit V bezeichnet.

Im Augenblicke nun, wo $\omega$ größer als V wird, wird der Nenner $1 - e \cos \omega$ positiv; für $\omega = V$ ist $\varrho = \infty$; für $\omega = 90^0$ ist $\varrho = p$, und im Zwischenraume nehmen die Werthe von $\varrho$ ab: so findet sich der Bogen SK.

Ueber SK hinaus, wo $\omega$ immer noch zunimmt, wird $\cos \omega$ negativ, und $\varrho$ nimmt immer fort ab, bis $\omega = 180^0$ wird; dann ist

$$\cos \omega = -1,$$

und daher

$$\varrho = \frac{p}{1 + e}.$$

Dieß ist der Werth des Radius-Vectors FB, was leicht nachzuweisen wäre, und die Hyperbel ist nun bis B verlängert.

Von $180^0$ bis $360^0$ erhält $\cos\omega$ dieselben Werthe, aber in umgekehrter Ordnung wie von 0 bis $180^0$; macht man daher den Winkel H'Fx gleich HFx, oder was dasselbe ist, zieht man FH' parallel mit der zweiten Asymptote, so findet sich im Winkel AFH' ein Bogen BK'S', der mit BKS symmetrisch ist. Im Winkel H'Fx ist der Radius-Vector negativ wie im Winkel HFx, weßhalb diese Werthe wegzulassen sind.

Läßt man den Winkel über $360^0$ hinaus wachsen, so erhält der Radius-Vector dieselben Lagen und Werthe, wie vorher; folglich bekommt man keine neuen Punkte der Curve mehr.

Mittelst der Gleichung [$\beta$] hat man nur den ersten Ast der Hyperbel gefunden; durch ähnliche Folgerungen erhält man aber aus der Gleichung [$\beta'$] den andern Ast TCT'.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die Gleichung [$\beta$] nicht in ihrer vollen Allgemeinheit erscheint, weßhalb sie auch die beiden Aeste der Hyperbel nicht ergibt; dieß kommt einzig daher, daß wir $\varrho$ blos positiv angenommen haben. Hebt man diese Beschränkung auf, und trägt nach der allgemeinen Regel (Nro. 451) die negativen Werthe dieser Veränderlichen auf der Verlängerung des Radius-Vectors an, so bestimmt die Gleichung [$\beta$] auch den andern Ast, wie er sich aus der Gleichung [$\beta'$] ergibt.

Denn es sei FR eine Lage des Radius-Vectors, wofür $\omega = \omega'$, so gibt die Gleichung [$\beta$]

$$\varrho = \frac{p}{1 - e\cos\omega'},$$

welchen Werth wir als negativ annehmen wollen. Für die Verlängerung FR' von FR ist $\omega = \omega' + 180$, und durch Substitution dieses Werthes in [$\beta$] erhält man

$$\varrho = \frac{-p}{1 - e\cos\omega'},$$

welche Größe positiv ist, da die vorige als negativ angenommen wurde; sie bestimmt daher auf dem Radius-Vector FR' einen Punkt N des Astes TCT'. Dieser Punkt ist aber derselbe, den man gefunden haben würde, wenn man den aus [$\beta$] abgeleiteten negativen Werth von $\varrho$, anstatt ihn zu verwerfen, auf der Verlängerung von FR angetragen hätte: folglich gibt die Gleichung [$\beta$] für sich allein schon die ganze Hyperbel, wenn man nur, wie es überhaupt geschehen soll, die negativen Werthe des Radius-Vectors als solche behandelt, die auf der Verlängerung dieser Linie, auf der andern Seite des Anfangspunktes, angetragen werden müssen.

**457.** Parabel. Bei rechtwinkligen Coordinaten (Fig. 194), wofür die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ ist, und wenn der vom Brennpunkt an einen beliebigen Punkt der Curve gezogene Radius-Vector FM mit $\varrho$ bezeichnet wird, haben wir (Nro. 427) gefunden

$$\varrho = \tfrac{1}{2}p + x.$$

Setzt man den Winkel $MFx = \omega$, so ist $x = \frac{1}{2}p + \varrho \cos\omega$; folglich erhält man als Polar-Gleichung der Parabel

$$[\gamma] \qquad \varrho = \frac{p}{1 - \cos\omega}.$$

**458.** Bei der Zusammenstellung der Gleichungen $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$ sieht man sogleich, daß die drei Curven durch die einzige Gleichung

$$\varrho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$$

gegeben werden können, in welcher p immer den halben Parameter der Curve vorstellt, und welche die Ellipse, oder die Hyperbel, oder die Parabel ergibt, je nachdem $e < 1$, oder $> 1$, oder $= 1$ genommen wird.

Ist $\omega = 90^0$, so steht der Radius-Vector senkrecht auf der Axe, und es ist dann $\varrho = p$; also ist in den drei Curven die im Brennpunkt senkrecht auf der Axe stehende Sehne gleich dem Parameter. Diese Eigenschaft kommt ausschließlich den Brennpunkten zu, und kann zu deren Bestimmung dienen.

## Von den Vorzeichen und der den Polar-Coordinaten zu gebenden Ausdehnung. Beispiele.

**459.** Man hegt häufig die irrige Meinung, der Winkel $\omega$ dürfe sich nur in den Grenzen von 0 bis $360^0$ bewegen, und es seien die negativen Werthe des Radius-Vectors, als wären sie imaginär, ganz zu verwerfen. Es wird dafür als Grund angegeben, daß, wenn sich der Radius-Vector um seinen Pol immer in derselben Ebene herumdreht, derselbe erst wieder in seine anfängliche Lage kommen könne, wenn er alle Punkte dieser Ebene durchlaufen habe; woraus man schließt, daß es keinen Punkt gebe, der nicht durch einen positiven und weniger als $360^0$ betragenden Werth von $\omega$, und durch einen positiven Werth von $\varrho$ sich bestimmen ließe.

Dieser Schluß ist zwar richtig, läßt sich aber nur auf einzeln genommene Punkte, die ohne Ordnung auf einander folgen, anwenden. Anders verhält es sich, wenn man die Variablen $\omega$ und $\varrho$ in einer Gleichung betrachtet, welche die Relation ausdrückt, die sie für alle Punkte derselben Linie haben müssen.

Nehmen wir an, eine Gerade (Fig. 195), die anfänglich auf Fx liegt, drehe sich in derselben Ebene immer um den Pol F herum, während ein vom Pol ausgehender Punkt M sich längs dieser Geraden so hin bewegt, daß der Abstand FM, der irgend einer Lage der Geraden entspricht, immer ein Viertel des Bogens AB, der durch einen auf der Geraden FR gegebenen Punkt beschrieben wird, beträgt. Nun beschreibt der Punkt M eine Curve,

und wenn der Bogen AB wieder mit $\omega$, und der Abstand FM mit $\varrho$ bezeichnet wird, so ist die Gleichung dieser Curve

$$\varrho = \tfrac{1}{4}\omega.$$

Läßt man $\omega$ nur bis $360^0$ wachsen, so erhält man eine Curve wie FMH, die auf einmal in H auf der Linie Fx aufhört. Es ist indessen klar, daß nachdem die Gerade FR wieder auf Fx zu liegen kommt, ihre Drehung deßwegen nicht aufhört, und die durch den Punkt M beschriebene Curve über Fx hinausgeht. Dasselbe ist nach jeder Umdrehung von FR der Fall, so daß sich die Curve selbst unendlich viel mal um den Punkt F herumdreht. Nun kann aber die Gleichung alle Theile der Curve nur dann ergeben, wenn man $\omega$ bis ins Unendliche wachsen läßt: es wäre also unrichtig, wenn man für diese Veränderliche $360^0$ als Grenze setzen wollte.

Zieht man die Gerade Fx', welche die durch den Punkt B beschriebene Kreislinie in A' schneidet, und will man, indem man den Bogen AA' mit $\alpha$ bezeichnet, die veränderlichen Bögen $\omega$ von dieser neuen Linie Fx' aus zählen, so muß man in der Gleichung $\varrho = \frac{1}{4}\omega$ für $\omega$ den Werth $\alpha + \omega$, wenn die Gerade FR jenseits Fx' ist, und $\alpha - \omega$ setzen, wenn FR diesseits liegt: somit ergibt sich

$$\varrho = \tfrac{1}{4}(\alpha + \omega) \text{ und } \varrho = \tfrac{1}{4}(\alpha - \omega),$$

und wir sehen, daß sich die ganze Curve nicht mehr durch eine einzige Gleichung darstellen läßt, wenn man für $\omega$ nicht auch negative Werthe annimmt. Die negativen Werthe dieser Veränderlichen würden also ebenfalls ohne Grund aus der Rechnung weggelassen.

Betrachten wir wieder die Radien-Vectoren und stellen uns vor (Fig. 196), der bewegliche Punkt M gehe in dem Augenblicke, wo die Gerade FR sich zu drehen beginnt, von dem noch in A liegenden Punkte B aus, und bewege sich auf der Seite von AF. Nehmen wir wieder an, die von ihm durchlaufene Entfernung betrage ein Viertel des durch den Punkt B beschriebenen Bogens, so ist wieder

$$\varrho = \tfrac{1}{4}\omega.$$

Hier bezeichnet aber die Veränderliche $\varrho$ einen vom Punkte B aus gerechneten Abstand BM, und dieser Punkt verändert seine Lage zugleich mit FR.

Kommt die Linie FR in die Lage FS, in welcher der Bogen $\omega$ viermal so groß ist als der Halbmesser FB, so wird der Abstand $\varrho$ gleich FB, so daß der bewegliche Punkt sich nun in F befindet. Kommt die Gerade bei fortgesetzter Drehung auf FT zu liegen, so ist $\varrho$ größer als FB, und der Punkt M bewegt sich nach M' auf die andere Seite des Poles F in der Verlängerung FT' von FT, und entfernt sich dann immer mehr vom Pole.

Will man anstatt BM eine veränderliche Länge, deren Anfangspunkt im Pole liegt, in die Gleichung einführen, und bezeichnet den Halbmesser

FB mit a, so muß man für $\varrho$, wenn es sich um einen Punkt wie M handelt, $a - \varrho$, und $a + \varrho$ bei einem Punkt wie M' setzen. Dann bezeichnet $\varrho$ die Abstände FM und FM', und es ist

$$\varrho = a - \tfrac{1}{4}\omega, \quad \text{und} \quad \varrho = \tfrac{1}{4}\omega - a;$$

woraus erhellt, daß die Curve nicht durch eine einzige Gleichung gegeben werden kann, wofern man nicht die negativen Werthe des Radius-Vectors als solche betrachtet, die in der Verlängerung dieses Radius auf der andern Seite des Pols anzutragen sind. Diese Folgerung stimmt mit der frühern in Betreff der Hyperbel geführten Discussion überein.

Es unterliegt nun keinem Zweifel mehr, daß die Polar-Coordinaten keiner Grenze unterworfen werden dürfen. Wenn sich auch Curven finden, und es gibt deren allerdings eine große Zahl, welche sich durch Werthe von $\omega$, die kleiner als $360^0$ sind, und durch die positiven Werthe von $\varrho$ ganz bestimmen lassen, so sind dieß besondere Fälle, und können nicht als allgemeine Regel dienen.

**460.** Zur Bestätigung des Vorhergehenden mögen noch einige Betrachtungen folgen, welche die Verbindung der Polar-Coordinaten mit denen, die mit beiden Axen parallel laufen, deutlich machen, und deßhalb besonders geeignet sind, die Anwendung der den letztern beigegebenen Vorzeichen auf die ersteren zu veranschaulichen.

Es seien (Fig. 197) XX' und YY' zwei rechtwinklige Axen, die sich in F schneiden. Aus diesem Punkte beschreibe man eine Kreislinie, die FY in A schneidet, und ziehe DAD' parallel mit XX'. Denken wir uns nun, DD' werde vom Kreisumfange so abgewickelt, daß die Bögen Aq und Aq', die den Längen AQ und AQ' gleich sind, durch die Punkte Q und Q' bestimmt sind, während zugleich die Senkrechten QP und Q'P' mit den Halbmessern Fq und Fq' zusammenfallen: dann erhält ein Punkt M, dessen Parallel-Coordinaten mit den rechtwinkligen Axen vorher FP und PM waren, die Lage m, in welcher derselbe den Bogen Aq=AQ=FP und den Radius-Vector Fm = PM zu Polar-Coordinaten hat. Da die rechts und links vom Ursprunge F liegenden Abscissen entgegengesetzte Vorzeichen haben und bis ins Unendliche wachsen können, so muß dasselbe auch mit den auf jeder Seite von A liegenden Bögen der Fall sein: ebenso müssen, da die oberhalb und unterhalb XX' liegenden Coordinaten wie PM und PN, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind, auch die entsprechenden Radien-Vectoren Fm und Fn, von denen der erste auf Fq, der zweite auf der andern Seite des Pols in der Verlängerung von Fq sich befindet, entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Diese Schlüsse führen uns gerade wieder auf die in Nro. 451 aufgestellten Regeln über die Vorzeichen und die den Polar-Coordinaten zu gebende Ausdehnung.

**461.** Zum Schlusse mögen noch als Uebungsbeispiele folgende Aufgaben folgen:

I. Die Polar-Gleichung $\varrho = a\omega$ zu construiren (Conon's Spirallinie oder Archimed'sche Spirale).

II. Die Gleichung $\omega\varrho = a^2$ zu construiren (hyperbolische Spirale).

III. Die Gleichung $\varrho = a \cos \omega + b$, in welcher a und b positiv sind, zu construiren. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$b > a, \quad b = a, \quad b < a.$$

Ist $b = 0$, so stellt die Gleichung einen Kreis vor.

IV. Die Gleichung $\varrho = a \cos m\omega$ für folgende Fälle zu construiren: $m = 3$, $m = 4$, $m = \frac{1}{3}$, $m = \frac{3}{5}$, $m = \frac{3}{2}$, $m = \frac{4}{3}$.

V. Die Gleichung $\varrho = a \cos 3\omega + b$ zu construiren. Man unterscheide drei Fälle: $b > a$, $b = a$, $b < a$.

VI. Die Polar-Gleichung der geraden Linie zu finden. Diese Gleichung ist $\varrho = \frac{p}{\sin(\omega - \alpha)}$.

VII. Die Polar-Gleichung des Kreises für einen beliebigen Anfangspunkt zu finden. Diese Gleichung ist $\varrho^2 - 2\delta\varrho \cos(\omega - \alpha) + \delta^2 - R^2 = 0$, und die Eigenschaften der Secanten lassen sich unmittelbar daraus ableiten.

VIII. Aufgabe. Es sei ein gerader Kegel gegeben, in welchem der Halbmesser der Grundfläche $\frac{1}{3}$ der Höhe beträgt; man denke sich auf der Kegelfläche einen beliebigen von der Spitze um die Länge a abstehenden Punkt, und beschreibe aus diesem als Mittelpunkt mit einer Zirkelöffnung gleich r auf der Kegelfläche eine Curve; hierauf denke man sich diese Kegelfläche auf eine Ebene abgewickelt, auf welcher dieselbe einen Kreisausschnitt mit einem Winkel, der $\frac{4}{3}$ eines Rechten beträgt, darstellt; man soll nun die Gleichung der mit dem Zirkel beschriebenen und durch die Abwickelung eben gewordenen Curve finden.

Wenn die Gleichung dieser Curve für alle Werthe von a und r allgemein gefunden ist, so mache man $a = 3$, $r = 2$, und bestimme für diesen besondern Fall die genaue Form der Curve.

# Dreizehntes Kapitel.

## Von den Kegel- und Cylinderschnitten.

---

### Kegelschnitte. Uebereinstimmung dieser Curven mit denen der zweiten Ordnung.

**462.** Unter *geradem Kegel* verstehen wir hier die Fläche, welche durch eine unbegrenzte Gerade, die sich um eine feste Gerade dreht, indem sie stets durch den nämlichen Punkt derselben geht und denselben Winkel mit ihr bildet, erzeugt wird. Die bewegliche Gerade heißt *die Erzeugungslinie* des Kegels, die feste Gerade seine *Axe*, und der Punkt, durch welchen die Erzeugungslinie stets geht, sein *Scheitel*. Da die Erzeugungslinie auf jeder Seite unbegrenzt ist, so muß die Kegelfläche aus zwei vollkommen ähnlichen Theilen oder *Umhüllungsflächen* bestehen, die auf beiden Seiten des Scheitels liegen.

Aus der Erzeugung des Kegels folgt, daß jeder ebene Durchschnitt, der senkrecht auf der Axe steht, ein Kreis ist, und daß jede durch die Axe gelegte Ebene die Kegelfläche nach zwei Erzeugungslinien schneidet, welche mit einander einen Winkel bilden, der doppelt so groß ist als der von der Erzeugungslinie mit der Axe gebildete.

**463.** Wir wollen uns nun, mit Uebergehung aller besondern Fälle, vornehmen, die verschiedenen Curven, die man durch den ebenen Durchschnitt eines geraden Kegels erhält und *Kegelschnitte* heißt, aufzusuchen.

Es sei MAN (Fig. 198) die betreffende Curve: man lege durch die Axe VV′ eine auf der Ebene dieser Curve senkrechte Ebene, so wird diese die Kegelfläche nach zwei entgegengesetzten Erzeugungslinien RSR′ und TST′, und die Ebene MAN in einer Geraden Ax, die wir als Abscissenlinie nehmen wollen, schneiden.

Von einem beliebigen Punkt der Curve fälle man die senkrechte Ordinate MP, bezeichne AP mit x, MP mit y, und suche nun eine Relation zwischen x und y.

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden, entweder trifft Ax die Erzeugungslinie TT′ auf derselben Umhüllungsfläche wie RR′, oder auf der entgegengesetzten, oder ist Ax mit TT′ parallel.

Erster Fall (Fig. 198). Durch die Punkte A und B, wo Ax die beiden Erzeugungslinien SR, ST trifft, ziehe man AC und BD senkrecht auf die Axe SV, setze $AB = 2a$, $BD = 2f$, $AC = 2g$, und ziehe durch P senkrecht auf die Axe noch EF. Hierauf lege man durch MP und EF eine Ebene, so steht diese selbst senkrecht auf der Axe, und muß daher den Kegel in einem Kreise EMF, der EF zum Durchmesser hat, schneiden.

Da die Ordinate MP senkrecht auf Ax steht, und in der auf ASB senkrechten Ebene MAN liegt, so muß sie auf der Ebene ASB selbst senkrecht stehen; sie bildet also mit dem Durchmesser EF einen rechten Winkel, daher ist

$$y^2 = EP \times PF.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken AEP und ADB erhält man aber

$$EP : x = 2f : 2a, \quad \text{woraus } EP = \frac{fx}{a};$$

und die ähnlichen Dreiecke BFP und BCA ergeben

$$PF : 2a - x = 2g : 2a, \quad \text{also } PF = \frac{g(2a - x)}{a}.$$

Somit ist die Gleichung des Kegelschnitts

$$y^2 = \frac{fg}{a^2}(2ax - x^2),$$

und daher ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse.

Bemerkungen. I. Wird die große Axe einer Ellipse mit 2A, die kleine mit 2B bezeichnet, und man bezieht diese Ellipse auf ihre große Axe und auf eine in einem der Scheitel errichtete Senkrechte, so ist die Gleichung dieser Curve (Nro. 296)

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2).$$

Vergleichen wir diese mit der vorigen, so sehen wir, daß die große Axe des Kegelschnitts gleich 2a, die kleine gleich $2\sqrt{fg}$, und daher der Abstand der beiden Brennpunkte $2\sqrt{a^2 - fg}$ ist.

Fällt man AG senkrecht auf BD, so ist $BG = f + g$, und das Dreieck ABD gibt

$$AD^2 = 4a^2 + 4f^2 - 4f(f + g) = 4a^2 - 4fg;$$

also ist $AD = 2\sqrt{a^2 - fg}$ d. h. gleich dem Abstand der Brennpunkte.

Folglich ist bei der Ellipse, die aus dem Kegelschnitt entsteht, die große Axe gleich AB, die kleine Axe die mittlere Proportionale zwischen AC und BD, und die Excentricität gleich AD.

II. Man beschreibe in das Dreieck ASB einen Kreis, der die drei Seiten in H, I und K berührt. Nun ist, wie leicht einzusehen,

$$AH = AI, \quad BH = BK, \quad SI = SK;$$

somit ist $CK = AI = AH$; aber $BK - CK = BC$; also

$$BH - AH = BC,$$

daher ist auch, wenn $BH' = AH$ gesetzt wird,

$$BH - BH' = HH' = BC.$$

Die Entfernung der Brennpunkte der Ellipse ist aber, wie wir eben gesehen, gleich BC oder AD, also sind die Punkte H und H' die beiden Brennpunkte.

Uebrigens wird der Brennpunkt H' auch bestimmt, wenn man einen Kreis tangential an die drei Linien AB, AR und BT beschreibt. Denn es seien H', I', K' die Berührungspunkte, so ist $BH' = BK' = DI'$; folglich

$$AH' - BH' = AI' - DI' = AD,$$

also H' der andere Brennpunkt.

Zieht man IL parallel mit AC, so sind die Dreiecke AIL und ABD ähnlich, und es ist

$$AL : AB = AI : AD.$$

Nun sei O die Mitte von AB, also

$$AB = 2OA, \quad AD = 2OH, \quad AI = AH;$$

so erhält man, anstatt der vorigen Proportion

$$AL : OA = AH : OH,$$

oder auch componendo

$$OL : OA = OA : OH, \quad \text{woraus } OL \times OH = OA^2.$$

Ebenso findet man, wenn K'L' parallel mit BD gezogen wird,

$$OL' \times OH' = OA^2.$$

Vergleicht man nun diese Resultate mit Nro. 315, so folgt daraus, daß die Punkte L und L' die Fußpunkte der beiden Directricen sind.

III. Wenn sich die schneidende Ebene parallel mit sich selbst fort bewegt, so behalten die Dreiecke ADB und ACB dieselben Winkel bei, also bleibt das Verhältniß $\frac{\sqrt{fg}}{a}$, welches das der Axen der Ellipse ist, constant. Dieß ist die Eigenschaft ähnlicher Ellipsen.

IV. Ist der Kegel und die Ellipse besonders gegeben, so kennt man die Seiten AB und AD des Dreiecks ABD, sowie den Winkel D. Denn AB ist die große Axe der Ellipse, AD der Abstand der Brennpunkte, und der Winkel D ist das Complement zu dem Winkel, den die Erzeugungslinie des Kegels mit der Axe bildet. Man kann also das Dreieck ABD construiren, und daraus den Punkt S finden, indem man in der Mitte von BD die Senkrechte SV errichtet. Dann ist klar, daß der durch die Drehung von SR um SV erzeugte gerade Kegel gleich dem gegebenen ist, und daß die durch AB senkrecht auf die Ebene RSV gelegte Ebene diesen Kegel in der gegebenen Ellipse schneidet; also kann jede Ellipse auf einen gegebenen Kegel gelegt werden.

Nach der Natur der Ellipse ist AD $<$ AB, auch ist Winkel ADB spitzig; also ist das Dreieck ADB immer möglich, und die vorige Folgerung erleidet keine Ausnahme.

**464.** Zweiter Fall (Fig. 199). Macht man dieselben Constructionen wie für den ersten Fall, und behält die nämliche Bezeichnung bei, so ist immer $y^2 = MP^2 = EP \times PF$.

Aus der Vergleichung der ähnlichen Dreiecke AEP, ADB, und der ebenfalls ähnlichen Dreiecke BFP und BCA hat man

$$EP = \frac{fx}{a}, \qquad PF = \frac{g\,(2a + x)}{a},$$

woraus sich ergibt

$$y^2 = \frac{fg}{a^2}\,(2ax + x^2):$$

also ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

Bemerkungen I. Versetzt man den Anfangspunkt in den Scheitel, so ist die Gleichung der Hyperbel (Nro. 360)

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}\,(2Ax + x^2).$$

Hieraus ersieht man, daß bei der auf dem Kegel liegenden Hyperbel die erste Axe gleich $2a$, die zweite gleich $2\sqrt{fg}$, und die Excentricität $2\sqrt{a^2+fg}$ ist.

Zieht man AG senkrecht auf BD, so findet sich leicht

$$AD^2 = 4a^2 + 4f^2 - 4f(f-g) = 4a^2 + 4fg;$$

also $AD = 2\sqrt{a^2+fg}$, woraus hervorgeht, daß der Abstand AD der Excentricität gleich ist.

II. Es seien H, I, K und H', I', K' die Berührungspunkte der Linien xx', RR', TT' und der beiden von diesen Linien berührten Kreise, die zwischen den Erzeugungslinien RR' und TT' liegen, so ist

$$AH = AI = CK,$$

und daher

$$BH + AH = BK + CK = BC.$$

Nun ist die Linie AD oder BC gleich dem Abstand der Brennpunkte der Curve, also ist der Punkt H ein Brennpunkt. Ebenso ist

$$BH' = BK' = DI',$$

und somit

$$AH' + BH' = AI' + DI' = AD,$$

also H' der andere Brennpunkt.

Man ziehe IL und K'L' parallel mit BD; wegen der ähnlichen Dreiecke AIL und ADB ist

$$AL : AB = AI \text{ (oder } AH) : AD \text{ (oder } HH').$$

Nun sei O die Mitte des Abstandes AB, so gibt diese Proportion folgende:

$$AL : OA = AH : OH.$$

Folglich erhält man dividendo

$$OL : OA = OA : OH, \text{ woraus } OL \times OH = OA^2.$$

Auf ähnliche Weise könnte man finden $OL' \times OH' = OA^2$; also sind (Nro. 372) die Punkte L und L' die Fußpunkte der beiden Directricen.

III. Bei parallelen Durchschnitten bleibt das Verhältniß $\frac{\sqrt{fg}}{a}$ der beiden Axen constant, weßhalb die Hyperbeln ähnliche heißen.

Daraus, daß dieses Verhältniß constant bleibt, folgt, daß die aus diesen Durchschnitten sich ergebenden Hyperbeln parallele Asymptoten haben.

Auch läßt sich leicht erkennen, daß der durch den Scheitel des Kegels geführte parallele Schnitt zwei mit diesen Asymptoten parallele Erzeugungslinien gibt.

IV. Will man eine Hyperbel auf einen gegebenen Kegel legen, so construire man das Dreieck ADB, in welchem der spitzige Winkel D, die dem Abstande der Brennpunkte gleiche Seite AD, und die der ersten oder Quer-Axe gleiche Seite AB gegeben ist; dann errichte man auf der Mitte von BD die Senkrechte SV. Nun ist der gerade Kegel, der SV zur Axe und SA zur Erzeugungslinie hat, gleich dem gegebenen Kegel, und die durch AB senkrecht auf die Ebene ASV gelegte Ebene schneidet diesen Kegel nach der gegebenen Hyperbel.

Da aber die Seite AB kleiner ist als AD, so ist das Dreieck ADB nur in dem Falle möglich, wenn AB nicht kleiner ist, als die Senkrechte AG. Das Dreieck ADG gibt nun

$$AG = AD \sin ADG = AD \cos ASV,$$

also muß

$$AD \cos ASV < AB, \text{ oder } \cos ASV < \frac{AB}{AD}$$

sein (wobei jedoch das Zeichen $<$ die Gleichheit nicht ausschließt).

In der gegebenen Hyperbel ist aber das Verhältniß $\frac{AB}{AD}$ gleich dem Cosinus des von der Asymptote und der ersten Axe gebildeten Winkels (Nro. 411); wird daher dieser Winkel mit $\theta$ bezeichnet, so ist

$$\cos ASV < \cos \theta, \text{ also } ASV > \theta \text{ und } 2ASV > 2\theta.$$

Eine Hyperbel kann also auf einen gegebenen Kegel gelegt werden, wenn nur der von zwei gegenüberliegenden Erzeugungslinien gebildete Winkel nicht kleiner ist, als der aus den Asymptoten der Hyperbel.

**465.** Dritter Fall (Fig. 200). Bei steter Beibehaltung derselben Constructionen ist wieder $y^2 = EP \times PF$.

Da Ax parallel mit ST, so ist $PF = AC = 2g$, und aus den ähnlichen Dreiecken AEP und SAC ergibt sich, wenn $AS = d$ gesetzt wird,

$$EP : x = 2g : d, \text{ woraus } EP = \frac{2gx}{d},$$

folglich ist die Gleichung der Curve

$$y^2 = \frac{4g^2}{d}\, x;$$

und somit ist der Kegelschnitt eine Parabel.

Bemerkungen. I. Der Parameter dieser Parabel ist gleich $\frac{4g^2}{d}$. Fällt man nun aus der Mitte von AC die Senkrechte GH auf Ax, so sind die Dreiecke AGH und AGS ähnlich, und daher

$$AH : g = g : d, \quad \text{woraus } AH = \frac{g^2}{d};$$

AH ist daher ein Viertel des Parameters, und folglich H ein Brennpunkt der Parabel.

II. Von nun an ist klar, daß dieser Brennpunkt eben der Berührungspunkt der Linie xx′ und des Kreises ist, der die beiden Erzeugungslinien RR′ und TT′ und die Gerade xx′ berührt.

Ferner ist leicht einzusehen, wenn man durch den Berührungspunkt der RR′ an demselben Kreise IL parallel mit AC zieht, daß AL = AH ist; also geht die Directrix durch den Punkt L.

III. Es braucht hier nicht bemerkt zu werden, daß die durch parallele Ebenen gegebenen Parabeln ähnlich sind, weil alle Parabeln als ähnlich zu betrachten sind. Dieß gründet sich darauf, daß bei zwei beliebigen Parabeln die durch die Scheitel in gleicher Neigung zu den Axen gezogenen Geraden immer in Proportion stehen. Der Beweis dieses Satzes ist zu leicht, um denselben hier anführen zu müssen.

IV. Um eine gegebene Parabel auf einen gegebenen Kegel zu legen, construire man das rechtwinklige Dreieck GAH, von welchem die Seite AH und der Winkel GAH gegeben sind; dann errichte man GS senkrecht auf AG und mache den Winkel GAS = GAH. Nun ist die durch die Umdrehung von SA um SG beschriebene Fläche die des gegebenen Kegels, und die durch AH senkrecht auf die Ebene ASG gelegte Ebene schneidet diesen Kegel in der gegebenen Parabel. Folglich können alle Parabeln auf einen gegebenen Kegel gelegt werden.

**466.** Die Hauptfolgerung aus dem ganzen Vorhergehenden ist nun, daß die Kegelschnitte Curven der zweiten Ordnung sind, und daß umgekehrt die Curven der zweiten Ordnung Kegelschnitte sind.

## Andere Methode.

**467.** Wir wollen nun die Kegelschnitte mittelst einer andern Methode, bei welcher die drei Curven sich aus einer einzigen Gleichung ergeben, suchen.

Nachdem (Fig. 201) dieselben Constructionen wie in Nro. 463 gemacht sind, wähle man solche gegebene Größen, die sich für alle Lagen der Linie Ax gleich eignen, und setze

$$SA = d, \quad SAx = \alpha, \quad RSV = \beta.$$

Der Kreis EMF gibt nun $y^2 = EP \times PF$.

Im Dreieck APE ist

$$EP : x = \sin PAE : \sin PEA.$$

Aber

$$\sin PAE = \sin \alpha, \text{ und } \sin PEA = \cos \beta,$$

also

$$EP = \frac{x \sin \alpha}{\cos \beta}.$$

Zieht man AC parallel mit EF, und PH parallel mit SF, so ist im Dreieck APH

$$AH : x = \sin APH : \sin AHP;$$

aber

$$\sin APH = \sin (\alpha + 2\beta), \text{ und } \sin AHP = \cos \beta,$$

also

$$AH = \frac{x \sin (\alpha + 2\beta)}{\cos \beta}.$$

Im Dreieck SAG ergibt sich $2AG = AC = 2d \sin \beta$, und zieht man AH von AC ab, so ist

$$PF = 2d \sin \beta - \frac{x \sin (\alpha + 2\beta)}{\cos \beta}.$$

Setzt man endlich für EP und PF ihre Werthe, so ist

$$[S] \qquad y^2 = \frac{2d \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} x - \frac{\sin \alpha \sin (\alpha + 2\beta)}{\cos^2 \beta} x^2;$$

also sind die Kegelschnitte Curven der zweiten Ordnung.

Um den umgekehrten Satz zu beweisen, ist zuerst zu beachten, daß bei rechtwinkligen Coordinaten und wenn der Anfangspunkt im Scheitel liegt, die drei Curven der zweiten Ordnung in der Gleichung enthalten sind

$$[s] \qquad y^2 = 2px + nx^2,$$

wo 2p den Parameter der Curve, und n das Quadrat des Verhältnisses der zweiten zur ersten Axe (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) bezeichnet. Nun ist zu beweisen, wenn die Größen p, n, $\beta$ gegeben sind, daß für die Unbekannten d und $\alpha$ reelle Werthe gefunden werden können, welche die Gleichungen [S] und [s] identisch machen.

Setzt man die betreffenden Coefficienten von x und $x^2$ je einander gleich, so ist

$$[1] \quad \frac{d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta} = p, \quad [2] \quad \frac{\sin\alpha \sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} = -n.$$

Die Gleichung [1] gibt für d einen reellen Werth, wenn $\alpha$ selbst reell ist. Um diesen Winkel zu finden, wollen wir jedoch die Form der Gleichung [2] in eine bequemere verwandeln.

Nimmt man die trigonometrischen Formeln für cos (A + B) und cos (A — B), und zieht die erste von der zweiten ab, so ist (Nro. 38).

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B);$$

nun sei

$$A = \alpha + 2\beta, \text{ und } B = \alpha,$$

so gibt diese Formel

$$2\sin\alpha \sin(\alpha+2\beta) = \cos 2\beta - \cos(2\alpha+2\beta).$$

Für die Gleichung [2] erhält man daher

$$\cos 2\beta - \cos(2\alpha+2\beta) = -2n\cos^2\beta,$$

woraus

$$\cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2\beta + 2n\cos^2\beta.$$

Nun ist

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1,$$

und somit

$$\cos(2\alpha+2\beta) = 2(1+n)\cos^2\beta - 1.$$

In der Ellipse ist das Verhältniß von n negativ und kleiner als 1; folglich liegt der vorige Werth zwischen + 1 und — 1, also ist der Bogen $2\alpha + 2\beta$, und damit auch $\alpha$ reell: ist daher ein gerader Kegel gegeben, so läßt er sich immer nach einer gegebenen Ellipse schneiden.

Bei der Hyperbel ist n positiv und kann beliebig groß sein. Ist der Werth von cos $(2\alpha + 2\beta)$ negativ, so muß er offenbar kleiner als 1 sein, und daher ist $\alpha$ reell. Es verhält sich aber nicht so, wenn dieser Werth positiv ist; dann muß

$2(1+n)\cos^2\beta - 1 < 1$ sein, woraus $\cos\beta < \sqrt{\frac{1}{1+n}}$.

Um diese Bedingung zu erklären, setze man anstatt n das Quadrat des Verhältnisses der Axen, so wird

$$\cos\beta < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Bezeichnet man nun den durch die Asymptoten und die Quer-Axe gebildeten Winkel mit $\theta$, so ist auch

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

also

$$\cos\beta < \cos\theta, \quad \text{daher } \beta > \theta \text{ und } 2\beta > 2\theta.$$

Somit erhält man wieder die Bedingung: wenn man eine Hyperbel auf einen geraden Kegel legen will, so muß der Winkel in dessen Scheitel wenigstens gleich dem der Asymptoten sein.

Bei der Parabel ist $n = 0$, und dann gibt die Gleichung [2] entweder $\sin\alpha = 0$, oder $\sin(\alpha + 2\beta) = 0$. Der erste Werth ist nicht zuläßig; denn wenn er in die Gleichung [1] gesetzt würde, so wäre $p=0$, und die Gleichung [s] würde keine Parabel mehr vorstellen. Man muß also $\sin(\alpha + 2\beta) = 0$ setzen; nun muß aber $\alpha + 2\beta < 360^0$ sein; also ist entweder $\alpha + 2\beta = 0$, oder $\alpha + 2\beta = 180^0$.

Die Gleichung $\alpha + 2\beta = 0$ kann man vernachläßigen, denn sie würde $\alpha$ negativ machen; die Gleichung $\alpha + 2\beta = 180^0$ zeigt aber, daß die Linie Ax (Fig. 201) mit ST parallel laufen muß: dieß muß wirklich bei der Parabel stattfinden. Also lassen sich alle Parabeln finden, indem man denselben geraden Kegel durch Ebenen schneidet.

## Cylinderschnitt.

**468.** Es sei AMB (Fig. 202) der ebene Durchschnitt eines geraden Cylinders; macht man dieselben Constructionen wie für den Kegel (Nro. 463), und bezeichnet den Halbmesser des Cylinders mit r, AB mit 2a, so findet man leicht für die Curve AMB

$$[T] \qquad y^2 = \frac{r^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Diese Gleichung, welche eine Ellipse vorstellt, läßt sich auch von der Gleichung [S] ableiten; man muß jedoch die Linie AG (Fig. 201) in diese zuvor einführen.

Setzt man $AG = r$, so gibt das Dreieck $AGS \cdots r = d\sin\beta$, und somit verwandelt sich [S] in

$$y^2 = \frac{2r\sin\alpha}{\cos\beta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta}x^2.$$

Nimmt man nun $\beta = 0$ an, so werden die Linien RR' und TT' parallel, und der Kegel verwandelt sich in einen Cylinder. Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich die Gleichung in

$$y^2 = 2r\sin\alpha \,.\, x - \sin^2\alpha \,.\, x^2.$$

Dieses Resultat stimmt mit der Gleichung [T] überein; denn $\alpha$ stellt den Winkel R'AB (Fig. 202) vor, und das Dreieck ABC gibt

$$\sin ABC = \sin \alpha = \frac{r}{a};$$

setzt man nun diesen Werth in die obige Gleichung, so verfällt man wieder auf die Gleichung [T].

## Antiparalleler Schnitt des schiefen Kegels.

**469.** Bewegt man eine Gerade so, daß sie immer auf eine Kreislinie zu stehen kommt und durch einen gegebenen Punkt geht, so erzeugt sie einen Kegel, der den Kreis zur Grundfläche, den gegebenen Punkt zur Spitze (Scheitel), und die durch die Spitze und den Mittelpunkt der Basis gezogene Linie zur Axe hat. Der Kegel ist gerade oder schief, je nachdem die Axe senkrecht oder schief auf der Basis steht.

Eine durch die Axe eines schiefen Kegels senkrecht auf seine Basis gelegte Ebene schneidet den Kegel und seine Basis in einem Dreieck, das der Hauptschnitt genannt wird.

Der schiefe Kegel wird, wie der gerade, durch die mit seiner Basis parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten; er hat aber außerdem noch die Eigenschaft, daß er auch von andern Ebenen in Kreisen geschnitten werden kann. Dieß soll nun gezeigt werden.

Es sei SAB (Fig. 203) der Hauptschnitt eines schiefen Kegels, und DMC die aus dem Durchschnitt dieses Kegels mittelst einer auf der Ebene SAB senkrechten Ebene entstandene Curve. Nachdem man MP senkrecht auf CD, und EPF mit AB parallel gezogen hat, lege man durch EF und MP eine Ebene, die mit der Basis des Kegels parallel läuft, und diesen in einem Kreise EMF schneidet. Nun muß offenbar MP auf dem Durchmesser EF senkrecht stehen; also ist $MP^2 = EP \times PF$.

Angenommen, die Curve DMC sei ein Kreis, so ist die Gerade DC ein Durchmesser desselben; und es ist auch

$$MP^2 = DP \times PC;$$

also ist

$$EP \times PF = DP \times PC,$$

oder auch

$$EP : DP = PC : PF.$$

Die beiden Dreiecke EPD und CPF haben aber zwischen den proportionirten Seiten gleiche Winkel; sie sind daher ähnlich, und

$$\text{Winkel } SCD = SEF = SAB.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so muß offenbar der Durchschnitt ein Kreis sein.

Dadurch ist auch die neue Richtung bekannt, welche schneidende Ebenen haben müssen, damit die Durchschnitte des schiefen Kegels Kreise seien. Diese Durchschnitte heißen *antiparallele* oder *entgegengesetzte*; auch bei dem schiefen Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche gibt es einen antiparallelen Durchschnitt.

**470.** *Bemerkung.* Welche Lage auch die Linien CD und EF haben mögen, wenn sie nur mit denen, die den beiden Reihen kreisförmiger Durchschnitte entsprechen, parallel sind, so müssen offenbar die Dreiecke EPD und CPF stets ähnlich sein, und es ist immer

$$EP \times PF = DP \times PC.$$

Daraus läßt sich leicht schließen, daß CD und EF die Sehnen eines und desselben Kreises sind, und daß die kreisförmigen Durchschnitte, welche diese Linien zu Durchmessern haben, auf derselben Kugelfläche liegen, deren größter Kreis eben CD und EF als Sehnen enthält.

# Vierzehntes Kapitel.

## Allgemeine Betrachtung der Tangenten und Asymptoten.

---

### Tangenten an algebraischen Curven.

**471.** Es seien $x'$ und $y'$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer Curve. Für einen andern Punkt habe man die Abscisse $x' + h$ und die Ordinate $y' + k$. Nun ist die Secante, welche durch die beiden Punkte geht, bestimmt, wenn das Verhältniß von $k$ zu $h$ bekannt ist; indessen ist der allgemeine Werth dieses Verhältnisses nicht erforderlich, wenn nur derjenige gefunden ist, welchen dasselbe erhält, wenn der zweite Punkt mit dem ersten zusammenfällt. Denn bezeichnet man diese Grenze mit $\lambda$, so ist offenbar die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \lambda (x - x').$$

Die Grenze $\lambda$ muß aus der Gleichung hervorgehen, welche die Verbindung zwischen der Abscisse und Ordinate ausdrückt, und diese Grenze läßt sich auf folgende Weise finden.

Es sei $Z = 0$ die Gleichung der Curve. Es muß ihr Genüge geleistet werden, wenn man darin $x$ und $y$ durch $x'$ und $y'$ oder durch $x'+h$ und $y' + k$ ersetzt; bezeichnet man also das, was $Z$ durch diese Substitutionen wird, mit $Z'$ und $Z''$, so muß $Z' = 0$, und $Z'' = 0$, also auch $Z'' - Z' = 0$ sein.

Nehmen wir nun an, $Z = 0$ sei eine algebraische Gleichung, so müssen sich offenbar alle Glieder von $Z'$ in $Z''$ finden; denn macht man $h = 0$ und $k = 0$, so verwandelt sich $x'+h$ in $x'$ und $y'+k$ in $y'$, und somit auch $Z''$ in $Z'$. Daraus folgt, daß die Gleichung $Z''-Z'=0$ nur aus Gliedern bestehen kann, die $h$ und $k$ als Factoren, oder auch als Potenzen und Producte aus diesen Größen enthalten. Man setze deßhalb

in dieser Gleichung $k = lk$, leite aus dem Verhältniß $l$ einen allgemeinen Werth ab, und gehe dann zu der Grenze $\lambda$ über, indem man $h = 0$ setzt.

In der Algebra wird bewiesen, daß das Polynom $Z$, wenn man $x$ und $y$ durch $x + h$ und $y + k$ ersetzt, sich in

$$Z + Xh + Yk + \omega \text{ verwandelt,}$$

wo $X$ und $Y$ nach $x$ und $y$ abgeleitete Polynome von $Z$, und $\omega$ eine Reihe von Gliedern vorstellt, die alle Potenzen oder Producte aus $h$ und $k$ zu Factoren haben.

Wenn nun $Z'$, $X'$, $Y'$, $\omega'$ die Größen vorstellen, welche aus $Z$, $X$, $Y$, $\omega$ dadurch entstehen, daß $x$ und $y$ in $x'$ und $y'$ verwandelt werden, so muß offenbar

$$Z'' = Z' + X'h + Y'k + \omega' \text{ sein;}$$

und folglich erhält man anstatt der Gleichung $Z'' - Z' = 0$,

$$X'h + Y'k + \omega' = 0.$$

Nun setze man $k = lh$, dann ergibt sich, wenn man mit $h$ dividirt, und den Quotienten aus $\omega'$ durch $h$ mit $\omega''$ bezeichnet,

$$X' + Y'l + \omega'' = 0, \text{ woraus } l = -\frac{X'}{Y'} - \frac{\omega''}{Y'}.$$

Die Größe $\omega''$ enthält noch in allen Gliedern $h$; sie wird also Null, wenn man, um die Grenze $\lambda$ von $l$ zu erhalten, $h = 0$ annimmt: dann ist einfach

$$\lambda = -\frac{X'}{Y'};$$

und somit ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{X'}{Y'}(x - x'),$$

oder auch in anderer Form, wenn $X'x' + Y'y' = V'$ gesetzt wird,

[t] $$Y'y + X'x = V'.$$

Es ließe sich leicht zeigen, daß sich die Größe $V'$ mittelst der Gleichung $Z' = 0$ immer auf ein Polynom von geringerem Grade als $Z'$ reducirt; wir wollen uns jedoch darauf beschränken, diesen Satz an folgenden zwei Beispielen zu erweisen.

**172.** **Beispiel I.** Man betrachte die Linien der zweiten Ordnung in ihrer allgemeinen Gleichung

[A] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Nun ist

$$Y' = 2Ay' + Bx' + D, \quad X' = By' + 2Cx' + E,$$
$$V' = 2Ay'^2 + 2Bx'y' + 2Cx'^2 + Dy' + Ex'.$$

Die Gleichung [A] gibt aber

$$2Ay'^2 + 2Bx'y' + 2Cx'^2 = -2Dy' - 2Ex' - 2F;$$

also ist

$$V' = -Dy' - Ex' - 2F,$$

und folglich ist die Gleichung der Tangente

$$(2Ay' + Bx' + D)\,y + (By' + 2Cx' + E)\,x + Dy' + Ex' + 2F = 0.$$

Beispiel II. Es sei noch einmal die schon Nro. 183 construirte Gleichung gegeben:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0.$$

Hier ist

$Y' = 3y'^2 - 3ax'$, $X' = 3x'^2 - 3ay'$, $V' = 3y'^3 - 6ax'y' + 3x'^3 = 3ax'y'$, und daher ist die Gleichung der Tangente

$$(y'^2 - ax')\,y + (x'^2 - ay')\,x = ax'y'.$$

## Tangenten an die auf Polar-Coordinaten bezogenen Curven.

**473.** Ist eine Curve CD (Fig. 204) durch eine Polar-Gleichung gegeben, so wird ihre Tangente in einem beliebigen Punkt M durch den Winkel AMT bestimmt, den sie mit dem Radius-Vector AM macht. Um diesen Winkel zu finden, denke man sich die Tangente immer als eine durch zwei Punkte M und M', die in einen einzigen zusammenfallen, gehende Secante. Diese Secante sei M'MS; man beschreibe mit AM einen Kreis, der den Radius-Vector AM' in N trifft, ziehe die Gerade NMH und noch AS parallel mit NH. Nun geben die ähnlichen Dreiecke ASM' und NMM'

$$[1] \qquad \frac{AS}{AM'} = \frac{MN}{M'N}.$$

Wird nun AM' der AM immer näher gebracht, bis sie zusammenfallen, so wird MS zur Tangente MT, und MH steht senkrecht auf AM; also erhält auch die Parallele AS eine auf AM senkrechte Lage AT. Dann verwandelt sich $\frac{AS}{AM'}$ in $\frac{AT}{AM}$; und da das Dreieck AMT in A rechtwinklig ist, so hat man die

$$\text{Grenze von } \frac{AS}{AM'} = \frac{AT}{AM} = \text{tang AMT}.$$

Suchen wir auch, was nun aus dem Verhältniß $\frac{MN}{M'N}$ wird. Es seien $\omega$, $\varrho$ die Polar-Coordinaten des Punktes M, und $\omega + h$, $\varrho + k$

die von M', so daß Winkel MAX = ω, AM = ϱ, Winkel MAN = h, M'N = k ist. Fällt man AI senkrecht auf MN, so ist

$$MN = 2NI = 2\varrho \sin \tfrac{1}{2}h,$$

also

$$\frac{MN}{M'N} = \frac{2\varrho \sin \frac{1}{2}h}{k}.$$

Um die Grenze dieses Verhältnisses zu finden, schreibe man es auf folgende Art:

$$\frac{MN}{M'N} = \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \times \frac{h}{k} \times \varrho.$$

Im Augenblick, wo M' und M zusammenfallen, wird h Null, und dann muß bekanntlich (Nro. 51) das Verhältniß von sin ½h zu ½h gleich 1 sein. Bezeichnen wir ferner das, was aus dem Verhältniß h zu k wird, mit θ, so erhalten wir θϱ als gesuchte Grenze. Also gibt die Gleichung im Augenblick, wo die Secante zur Tangente wird,

[2] $$\text{tang AMT} = \theta\varrho.$$

Die Lage der Tangente MT hängt somit blos von der Größe θ ab, welche die Grenze des Verhältnisses ist, in welchem der Winkel ω und der Radius-Vector wachsen, und offenbar muß sich diese Grenze für jeden besondern Fall aus der Polar-Gleichung der Curve ganz auf dieselbe Weise ableiten lassen, als wenn ω und ϱ mit den Axen parallele Coordinaten wären.

Bei der Anwendung von Polar-Coordinaten heißt der zwischen dem Anfangspunkt und der Tangente liegende Abstand AT, der im Anfangspunkt auf dem Radius-Vector senkrecht errichtet ist, die Subtangente. Dieser Abstand läßt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AMT ableiten, wodurch man erhält

$$AT = \varrho \text{ tang AMT} = \theta\varrho^2.$$

**474.** Beispiel. Nehmen wir die Polar-Gleichung der Curven zweiter Ordnung (Nro. 458)

$$\varrho = \frac{p}{1 - e \cos \omega}.$$

Verwandelt man hier ω in ω + h, und ϱ in ϱ + k, so ist

$$\varrho + k = \frac{p}{1 - e \cos(\omega + h)}.$$

Zieht man ϱ von ϱ + k ab, so ist

$$k = \frac{p}{1 - e\cos(\omega+h)} - \frac{p}{1 - e\cos\omega} = \frac{pe[\cos(\omega+h) - \cos\omega]}{(1 - e\cos\omega)[1 - e\cos(\omega+h)]},$$

und

$$\frac{h}{k} = \frac{h\,(1-e\cos\omega)\,[1-e\cos(\omega+h)]}{pe\,[\cos(\omega+h)-\cos\omega]}.$$

Aber die bekannte Formel (Nro. 39)

$$\cos q - \cos p = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\times\sin\tfrac{1}{2}(p-q)$$

gibt

$$\cos\omega - \cos(\omega+h) = 2\sin(\omega+\tfrac{1}{2}h)\sin\tfrac{1}{2}h;$$

also

$$\frac{h}{k} = -\frac{(1-e\cos\omega)\,[1-e\cos(\omega+h)]}{pe\sin(\omega+\frac{1}{2}h)}\times\frac{\frac{1}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

Um die Grenze $\theta$ dieses Verhältnisses zu erhalten, muß $h = 0$ gesetzt werden, dann ergibt sich

$$\theta = -\frac{(1-e\cos\omega)^2}{pe\sin\omega};$$

und folglich verwandelt sich die Formel [2], indem man für $\varrho$ und $\theta$ ihre Werthe setzt, in

$$\text{tang AMT} = -\frac{1-e\cos\omega}{e\sin\omega}.$$

## Asymptoten der algebraischen Curven.

**475.** Es sei, wie in Nro. 246

$$y = cx + d$$

die Gleichung einer mit den Ordinaten nicht parallelen Asymptote. Nach der Erklärung der Asymptoten muß die Gleichung der Curve einen Werth für y geben, so daß

$$y = cx + d + V$$

ist, wo V zu Null wird, wenn man $x = \pm\infty$ setzt. Aus dieser Gleichung erhält man aber zuerst

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d+V}{x}, \quad d = y - cx - V,$$

und dann ist nach der Voraussetzung $x = \pm\infty$

$$c = \text{Grenze von } \frac{y}{x}, \quad d = \text{Grenze von } (y-cx):$$

dieß sind also die zu bestimmenden Grenzen, welche nun für die algebraischen Grenzen überhaupt gefunden werden sollen.

Betrachten wir beliebige Polynome nach x und y, und es sei

$$U = Ax^py^q + Bx^ry^s + \text{etc.},$$
$$U_1 = A'x^{p'}y^{q'} + B'x^{r'}y^{s'} + \text{etc.},$$
$$U_2 = A''x^{p''}y^{q''} + B''x^{r''}y^{q''} + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

Angenommen alle Glieder von U seien vom mten, die von $U_1$ vom m—1ten Grade, und so fort, so lassen sich die algebraischen Curven der mten Ordnung durch die Gleichung darstellen

[1] $$U + U_1 + U_2 + \text{etc.} = 0.$$

Dieß vorausgesetzt, setze man in [1], um c zu erhalten, $y = cx$, und suche den Werth von c, der $x = \pm\infty$ entspricht. Da nun die Glieder von U vom mten Grad sind, so müssen sie offenbar nach der Substitution von cx alle $x^m$ enthalten, sowie die von $U_1$ alle $x^{m-1}$, u. s. f. Zur Abkürzung setze man

$$T = Ac^q + Bc^s + \text{etc.}, \quad T_1 = A'c^{q'} + B'c^{s'} + \text{etc.}$$
$$T_2 = A''c^{q''} + B''c^{s''} + \text{etc.}, \quad \text{etc.}$$

so verwandelt sich Gleichung [1] in

$$Tx^m + T_1x^{m-1} + T_2x^{m-2} + \text{etc.} = 0;$$

oder auch, indem man durch $x^m$ dividirt, in

$$T + \frac{T_1}{x} + \frac{T_2}{x^2} + \text{etc.} = 0.$$

Nun nehme man $x = \pm\infty$ an, so bleibt $T = 0$, oder

[2] $$Ac^q + Bc^s + \text{etc.} = 0;$$

und dieß ist die Gleichung, deren reelle Wurzeln die Werthe des Coefficienten c sind.

Kennt man c, so gehe man zur Bestimmung von d über. In der Gleichung [1] setze man $y - cx = d$ oder vielmehr $y = cx + d$, und bezeichne die nach c abgeleiteten Polynome mit

$$T', T'' \ldots, T_1', T_1'' \ldots, T_2', T_2'' \ldots \text{etc.},$$

so ist die daraus sich ergebende Gleichung nach x geordnet

$$Tx^m + (T'd + T_1)x^{m-1} + \left(\frac{T''}{1.2}d^2 + \frac{T_1'}{1}d + T_2\right)x^{m-2} + \text{u. s. w.} = 0.$$

Wegen der Gleichung [2] ist $Tx^m$ Null; lassen wir diesen Theil weg, dividiren mit $x^{m-1}$, und nehmen $x = \pm\infty$ an, so bleibt

[3] $$T'd + T_1 = 0,$$

welche Gleichung den Werth von d, der jedem Werthe von c entspricht, ergibt.

So werden die den y nicht parallelen Asymptoten durch die Gleichungen [2] und [3] bestimmt. Die erste, welche c ergibt, hängt einzig von den Coefficienten des Polynoms ab, und die zweite, wodurch d bestimmt wird, läßt sich blos mittelst der Polynome U und $U_1$ bilden, ohne von denen einer niedern Ordnung etwas zu entlehnen.

Es ist jedoch eine wichtige Bemerkung zu machen. Es kann nämlich der Fall sein, daß für einen Werth von c in der Gleichung $Tx^m + \text{etc.} = 0$ nicht nur die Glieder nach $x^m$, sondern auch die nach $x^{m-1}$ verschwinden; in diesem Falle dividire man mit $x^{m-2}$, so ergibt sich für die Bestimmung von d die Gleichung

$$\frac{T''}{1 \cdot 2} d^2 + \frac{T'_1}{1} d + T_2 = 0,$$

welche im Allgemeinen vom zweiten Grade ist.

Im Falle die Glieder nach $x^{m-2}$ auch verschwinden, wendet man diejenigen an, welche $x^{m-3}$ enthalten, und so fort.

Um keine Asymptote auszulassen, darf man auch die nicht vergessen, welche mit den y parallel sind. Sie werden durch die Werthe von x, wodurch y unendlich wird, bestimmt: nehmen wir nun an, die gegebene Gleichung sei nach x geordnet, und sie heiße dann $Vy^n + V_1 y^{n-1} + \text{etc.} = 0$, so dividire man sie durch $y^n$; nun läßt sich sogleich erkennen, daß die Werthe von x, für welche $y = \pm\infty$ ist, durch die Gleichung $V = 0$ gefunden werden.

**476.** Beispiel I. Es sei die allgemeine Gleichung des zweiten Grads gegeben,

[A] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

man soll suchen, was in diesem Falle aus den Gleichungen [2] und [3] wird. Zur bequemern Auffassung beachte man, daß T und $T_1$ nichts anderes sind, als die Polynome U und $U_1$, in welchen x ausgelassen und y in c verwandelt ist.

Dieß vorausgesetzt, ist

$$U = Ay^2 + Bxy + Cx^2, \quad U_1 = Dy + Ex;$$
$$T = Ac^2 + Bc + C, \quad T_1 = Dc + E, \quad T' = 2Ac + B.$$

Somit verwandeln sich die Gleichungen [2] und [3] in

$$Ac^2 + Bc + C = 0, \qquad (2Ac + B)\,d + Dc + E = 0,$$

woraus sich ergibt

$$c = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad d = -\frac{D}{2A} \pm \frac{BD - 2AE}{2A\sqrt{B^2 - 4AC}},$$

welche Werthe auf die in Nro. 248 zurückkommen. Setzt man sie in die Gleichung $y = cx + d$, so erhält man die Asymptoten.

Beispiel II. Es sei die Gleichung gegeben

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

in diesem Falle ist

$U = y^3 + x^3$, $U_1 = -3axy$, $T = c^3 + 1$, $T_1 = -3ac$, $T' = 3c^2$,

und die Gleichungen [2] und [3] sind

$c^3 + 1 = 0$, $3c^2 d - 3ac = 0$, woraus $c = -1$, $d = -a$.

Also hat die Curve eine Asymptote, deren Gleichung

$$y = -x - a$$

ist; dieß ist die Gerade GH (Fig. 205).

**477.** Manche Mathematiker bestimmen die Asymptoten, indem sie dieselben als Grenzen der Tangenten betrachten. Diese Auffassung, welche in Rücksicht auf die Hyperbel (Nro. 406) als richtig erkannt wurde, läßt sich auch allgemein beweisen. Man nehme an, die Berührung finde in unendlicher Entfernung statt, und aus der Tangente MR (Fig. 206) werde GH, deren Gleichung $y = cx + d$ ist. Nun seien $x'$, $y'$ die Coordinaten des Punktes M, und man ziehe AM, deren Gleichung $y = \frac{y'}{x'}x$ ist. Findet die Berührung in unendlicher Entfernung statt, so müssen RM und AM als Parallelen betrachtet werden, und da die Tangente RM mit GH zusammenfällt, so muß auch AM mit GH parallel werden, also ist die Grenze von $\frac{y'}{x'} = c$.

Nun ziehe man die Ordinate MP, die GH in N trifft, und AE parallel mit GH. Nach der Figur ist

$$ME = MP - PE = NE - MN;$$

aber

$$MP = y', \quad PE = cx', \quad NE = AG = d;$$

folglich

$$y' - cx' = d - MN.$$

Wenn sich nun der Punkt M ins Unendliche entfernt, so muß, da die Tangente mit GH zusammenfällt, die Entfernung MN zu Null werden; also ist die Grenze von $(y' - cx') = d$.

Somit sind die Werthe von c und d dieselben für die Grenzen der Tangenten, wie für die Asymptoten.

**478.** Die geraden Linien sind nicht die einzigen, die man zu Asymptoten nehmen kann. Man betrachte z. B. die Curven, die man paraboliſche heißt, und deren Gleichung von der Form

$$y = cx^\alpha + dx^\beta + \text{etc.}$$

ist, und nehme sich vor, c, d, ... so zu bestimmen, daß die parabolische Curve einer andern gegebenen Curve unendlich nahe komme. Zur bestimmtern Auffassung untersuche man die parabolische Curve, deren Gleichung

$$y = cx^2 + dx + e \text{ ist.}$$

Damit diese Gleichung eine Asymptote vorstelle, muß man aus der Gleichung der gegebenen Curve einen Werth für y erhalten, dessen Differenz mit dem vorigen Null ist, wenn x unendlich wird; also muß dieser Werth von der Form sein:

$$y = cx^2 + dx + e + V,$$

wo V eine Größe bezeichnet, die zu Null wird, wenn $x = \pm\infty$ ist. Daraus ergibt sich nun

$$c = \frac{y}{x^2} - \left(\frac{d}{x} + \frac{e}{x^2} + \frac{V}{x^2}\right),$$

$$d = \frac{y - cx^2}{x} - \left(\frac{e}{x} + \frac{V}{x}\right),$$

$$e = y - cx^2 - dx - V,$$

und wenn man $x = \pm\infty$ macht, so werden die Größen in den Klammern zu Null; also ist

$$c = \text{Grenze v.}\frac{y}{x^2},\quad d = \text{Grenze v.}\frac{y-cx^2}{x},\quad e = \text{Grenze v.}(y - cx^2 - dx).$$

Somit setzt man in der Gleichung der gegebenen Curve $y = cx^2$, und sucht den Werth von c, der $x = \pm\infty$ entspricht; dann setzt man $y - cx^2 = dx$, oder $y = cx^2 + dx$, und sucht den entsprechenden Werth von d für $x = \pm\infty$, und endlich setzt man

$$y - cx^2 - dx = e \text{ oder } y = cx^2 + dx + e,$$

und sucht den entsprechenden Werth von e für $x = \pm\infty$.

# Fünfzehntes Kapitel.

## Von den ähnlichen Curven.

### Allgemeine Theorie.

**479.** Zwei Curven heißen ähnlich, wenn man sie so legen kann, daß, wenn man durch denselben Punkt Radien-Vectoren an verschiedene Punkte der beiden Curven zieht, die in derselben Richtung gehenden Radien-Vectoren proportionirt sind.

Man habe z. B. die Curve ab (Fig. 207) in die Lage cd gebracht, und durch den Punkt O nach beliebigen Richtungen Gerade gezogen, welche die Curve AB in M, M′ . . . ., und die Curve cd in N, N′ . . . . treffen; ist nun

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'} = \frac{OM''}{ON''} \cdots,$$

so sind die Curven ab und AB einander ähnlich.

Denken wir uns, die Curve cd wieder in ab, und die Linien ON, ON′ . . . seien om, om′, . . . ., so heißen die Punkte O und o, von welchen nun die proportionirten Radien ausgehen, Aehnlichkeits-Mittelpunkte. Dabei ist klar, daß die Radien der einen Curve dieselben Winkel mit einander bilden, wie die mit ihnen proportionirten Radien der andern Curve; daher man sie homologe heißen kann.

Die Curve ab kann zu AB jede beliebige Lage haben, und ihr doch immer ähnlich sein. Ist ihre Lage so, daß die Radien-Vectoren der einen Curve mit den homologen der andern parallel laufen, so heißen die Curven ähnlich liegende. Haben sie eine Lage wie cd und AB, so daß die homologen Radien von demselben Punkte ausgehen und in derselben Richtung liegen, so haben sie denselben Aehnlichkeits-Mittelpunkt und dieselbe ähnliche Lage.

**480.** Sind zwei Curven ähnlich, so läßt sich zeigen, daß man bei einer derselben jeden beliebigen Punkt als ähnlichen Mittelpunkt annehmen kann, und daß die andere immer einen entsprechenden Mittelpunkt enthalten muß. Aus der Aehnlichkeit der Curven ab und AB folgt, daß es einen Punkt O gibt, so daß, wenn man ab in die gehörige Lage cd bringt, und beliebige Linien OM, OM′ zieht, welche die Curven in M und N, M′ und N′ schneiden, sich verhält

$$OM : ON = OM' : ON'.$$

Der Punkt O ist also ein Aehnlichkeits-Mittelpunkt: dieselben Bedingungen können nun auch in Betreff eines beliebigen andern Punktes G erfüllt werden.

Man ziehe OG, GM, GM′; ferner NH parallel mit GM, und noch HN′. Nun ist

$$OG : OH = OM : ON = OM' : ON',$$

also HN′ parallel mit GM′, und daher Winkel NHN′ = MGM′. Schneidet man nun auf GM und GM′ die Linien GP = HN und GP′ = HN′ ab, und gibt dann der Curve cd eine neue Lage ef, so daß HN mit GP zusammenfällt, so fällt auch HN′ mit GP′ zusammen. Also sind die Bedingungen der Aehnlichkeit auch erfüllt, wenn man den Punkt G anstatt O nimmt, wenn nur die Curve ab auf ef gelegt wird.

Welcher Punkt auch als ähnlicher Mittelpunkt genommen wird, so bleibt das Verhältniß der homologen Radien-Vectoren unveränderlich, da sich GM : GP = OM : ON verhält. Dieses Verhältniß könnte man das Verhältniß der Aehnlichkeit nennen.

**481.** Stellen wir uns nun die Aufgabe, die allgemeine Gleichung der Curven zu finden, die einer gegebenen Curve ähnlich sind.

Es sei AB (Fig. 208) die gegebene Curve, und ihre Gleichung

$$[a] \qquad F(x, y) = 0.$$

Zieht man vom Ursprung aus die Radien OM, OM′, . . . ., und theilt sie proportional in m, m′ . . . ., so ist der Ort der Punkte m, m′ . . . . eine der AB ähnliche Curve ab. Man bezeichne das Verhältniß von OM zu Om mit k, die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Curve AB mit x und y, die des homologen Punktes m mit x′ und y′; nun ist offenbar

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{OM}{Om} = k, \quad \text{woraus } x = kx',\ y = ky'.$$

Setzt man diese Werthe in [a], so enthält die Gleichung

$$[b] \qquad F(kx', ky') = 0,$$

alle mit der gegebenen ähnliche Curven, die man erhält, wenn man für das Verhältniß k alle möglichen Werthe setzt.

Diese Curven haben aber eine besondere Lage; denn der Ursprung ist für sie und die gegebene Curve der Aehnlichkeits-Mittelpunkt, und die homologen Radien-Vectoren laufen ferner in derselben Richtung. Gibt man diesen Curven eine andere Lage, und nimmt zuerst an, die Axen Ox und Oy werden parallel mit sich selbst nach O'x' und O'y' gebracht, so verwandelt sich die Curve ab in cd. Diese hat in Beziehung auf diese neuen Axen dieselbe Gleichung [b] wie für die alten; und will man sie fortwährend auf diese beziehen, so darf man in dieser Gleichung nur $x'$ in $x - a$, und $y'$ in $y - a$ verwandeln, wo a und b die Coordinaten des Punktes O' in Beziehung auf die Axen Ox und Oy ausdrücken. Auf diese Weise findet man die Gleichung

$$[c] \qquad F[k(x-a),\ k(y-b)] = 0,$$

welche alle der gegebenen ähnliche und mit ihr ähnlich liegende Curven vorstellt.

Diese Gleichung steht jedoch noch nicht in ihrer ganzen Allgemeinheit da; um diese zu erreichen, müssen die Axen Ox und Oy, anstatt parallel mit sich selbst in eine andere Lage zu kommen, irgend eine andere Lage in ihrer Ebene erhalten.

Nehmen wir daher an, sie seien O'x', O'y' (Fig. 209), und cd sei die neue Lage der Curve ab: so muß offenbar die Gleichung von cd in Beziehung auf die neuen Axen wieder $F(kx', ky') = 0$ sein, und es handelt sich nun darum, welche Gleichung man erhalten muß, wenn man die neue Curve auf dieselben Axen Ox und Oy, wie AB bezieht.

Um von den ersten Axen auf die letzten zu kommen, hat man (Nro. 189) die Formeln

$$x = a + \frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\alpha')}{\sin\theta},\quad y = b + \frac{x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'}{\sin\theta},$$

wo a und b die Coordinaten OG und GO' des Punktes O', $\theta$ den Winkel yOx, $\alpha$ und $\alpha'$ die Winkel x'O'E und y'O'E, welche O'x' und O'y' mit einer der Axe Ox parallelen Linie bilden, bezeichnen. Hier ist $\alpha' = \theta + \alpha$, folglich verwandeln sich diese Formeln in

$$x = a + \frac{x'\sin(\theta-\alpha) - y'\sin\alpha}{\sin\theta},\quad y = b + \frac{x'\sin\alpha+y'\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}.$$

Umgekehrt erhält man aus diesen Relationen die Werthe für x' und y' in Functionen von x und y, nämlich

$$x' = \frac{(x-a)\sin(\theta+\alpha) + (y-b)\sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$y' = \frac{-(x-a)\sin\alpha + (y-b)\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung $F(kx', ky') = 0$, so ist die Curve cd auf die ursprünglichen Axen bezogen, und man hat so die allgemeinste Gleichung der gegebenen ähnlichen Curven.

## Anwendungen.

**482.** Nehmen wir als erste Anwendung die Parabel, deren Gleichung

$$y^2 = 2px.$$

Verwandelt man y in ky, und x in kx, so ist, wenn $\frac{2p}{k} = 2p'$ gesetzt wird,

$$y^2 = 2p'x,$$

welche Gleichung alle der Parabel ähnliche Curven ergibt, und zeigt, daß diese Curven selbst Parabeln sind. Mit der Veränderung des Werthes von k kann auch der Parameter 2p' jede beliebige Größe erhalten; also sind alle Parabeln ähnlich.

**483.** Betrachten wir allgemeiner eine algebraische Gleichung

$$F(x, y, p) = 0,$$

welche nur eine einzige Constante p enthält, und in Beziehung auf die drei Größen x, y, p gleichartig ist, d. h. bei welcher die Summe der Exponenten dieser drei Buchstaben in allen Gliedern dieselbe ist, wie dieß in der Gleichung $y^3 - 3pxy + x^3 = 0$ der Fall ist.

Durch die Veränderung von x und y in kx und ky erhält man für ähnliche Curven die Gleichung

$$F(kx, ky, p) = 0,$$

und setzt man $p = kp'$, so verwandelt sie sich in

$$F(kx + ky, kp') = 0.$$

Angenommen, die Summe der Exponenten x, y, p sei in jedem Gliede der gegebenen Gleichung gleich m, so ist offenbar $k^m$ der gemeinschaftliche Factor der vorigen Gleichung; folglich erhält man nach vorheriger Division durch $k^m$ die Gleichung

$$F(x, y, p') = 0,$$

welche sich von der gegebenen nur dadurch unterscheidet, daß p' an die Stelle von p getreten ist. Da überdieß p' wegen k jede beliebige Größe erhalten kann, so folgt daraus, daß alle durch die Gleichung F (x, y, p) gegebenen Curven, wenn man für p andere Werthe nimmt, einander ähnlich sind. Dabei läßt sich noch hinzufügen, daß sie eine ähnliche Lage und den Anfangspunkt zum gemeinschaftlichen Aehnlichkeits-Mittelpunkt haben.

**484.** Es sei noch die transcendente Gleichung gegeben

$$y = M \log x,$$

welche eine Familie von Curven darstellt, die man logarithmische heißt. Sie unterscheiden sich von einander wegen des Coefficienten M; sie treffen aber alle die Axe der x in derselben Entfernung OA = 1 (Fig. 210), denn x = 1 gibt y = 0; auch haben sie alle den untern Theil der Axe der y zur Asymptote, denn x = 0 gibt y = $-\infty$. Im Uebrigen haben sie die in der Figur angedeutete Form.

Ersetzt man x und y durch kx und ky, so ist ky = M log kx, woraus man, wenn M = M'k gesetzt wird,

$$y = M' \log kx = M' \log x + M' \log k \text{ erhält.}$$

Verändern wir den Ursprung und versetzen ihn nach O' in eine Entfernung OO' = M' log k. Sind x', y' die neuen Coordinaten, so ist

$$x = x', \quad y = y' + M' \log k,$$

und die vorige Gleichung reducirt sich auf

$$y' = M' \log x'.$$

Diese Gleichung stellt auch noch eine logarithmische Curve dar, und da M' alle möglichen Werthe annehmen kann, so folgt daraus, daß alle logarithmischen Curven ähnlich sind.

**485.** Als letzte Anwendung nehmen wir uns noch vor, die Bedingungen zu suchen, unter welchen zwei Curven der zweiten Ordnung ähnlich und ähnlich liegend sind. Es seien

$$[1] \quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

$$[2] \quad A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0,$$

die Gleichungen zweier Curven. Nach dem, was in Nro. 481 zur Erlangung der Gleichung [c] gesagt wurde, muß man, um alle mit der ersten ähnlichen und ähnlich liegenden Curven zu erhalten, in [1] x und y durch k (x — a) und k (y — b) ersetzen.

Setzt man zur Abkürzung

$$A'' = Ak^2, \quad B'' = Bk^2, \quad C'' = Ck^2, \quad D'' = -2Abk^2 - Bak^2 + Dk,$$

$$E'' = -2Cak^2 - Bbk^2 + Ek, \quad F'' = Ab^2k^2 + Babk^2 + Ca^2k^2 - Dbk - Eak + F,$$

so kann man die sich ergebende Gleichung so schreiben:

$$[3] \quad A''y^2 + B''xy + C''x^2 + D''y + E''x + F'' = 0.$$

Damit die zweite Curve mit der ersten ähnlich und ähnlich liegend sei, müssen die Curven der Gleichungen [2] und [3] durch eine passende Bestimmung von a, b, k identisch gemacht werden können, und damit diese Identität stattfinde, müssen die ähnlichen Glieder, nachdem man die eine

der beiden Gleichungen mit A', die andere mit A'' dividirt hat, gleiche Coefficienten haben. Setzen wir zuerst nur die Coefficienten von xy und $x^2$ einander gleich, so ist

$$\frac{B'}{A'} = \frac{B}{A}, \quad \frac{C'}{A'} = \frac{C}{A}, \quad \text{oder} \quad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}.$$

Somit sind die Bedingungen schon erfüllt, daß die Coefficienten der Glieder des zweiten Grads in den gegebenen zwei Gleichungen einander proportionirt sein müssen.

Nehmen wir nun an, diese Bedingungen seien erfüllt, und es sei

$$A' = A\varrho, \quad B' = B\varrho, \quad C' = C\varrho;$$

man setze ferner

$$D' = d\varrho, \quad E' = e\varrho, \quad F' = f\varrho,$$

so verwandelt sich die mit $\varrho$ dividirte Gleichung [2] in

[4] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Um die Curven vollends identisch zu machen, muß man noch setzen

$$\frac{D''}{A''} = \frac{d}{A}, \quad \frac{E''}{A''} = \frac{e}{A}, \quad \frac{F''}{A''} = \frac{f}{A},$$

und setzt man für A'', D'', E'', F'' wieder ihre Werthe, so erhält man

[5] $-2Abk - Bak + D = dk$, [6] $-2Cak - Bbk + E = ek$,

[7] $$Ab^2k^2 + Babk^2 + Ca^2k^2 - Dbk - Eak + F = fk^2.$$

Werden diese drei Gleichungen addirt, nachdem man sie vorher beziehungsweise mit bk, ak und mit 2 multiplicirt hat, so ergibt sich leicht

[8] $$2fk^2 + dbk^2 + eak^2 + Dbk + Eak - 2F = 0.$$

Diese Gleichung enthält a und b nur in der ersten Potenz, und sie dient vorzugsweise in der Gleichung [7], um in Verbindung mit den Gleichungen [5] und [6] a, b, k zu bestimmen. Die Werthe der Coordinaten a, b müssen reell, und außerdem der des Verhältnisses k positiv sein; suchen wir nun die Bedingungen hievon.

Setzt man der Kürze halber

$$B^2 - 4AC = N, \quad BD - 2AE = G, \quad Bd - 2Ae = g,$$
$$BE - 2CD = H, \quad Be - 2Cd = h,$$

so ergeben die Gleichungen [5] und [6]

$$a = \frac{G - gk}{Nk}, \qquad b = \frac{H - hk}{Nk};$$

und setzt man diese Werthe in [8], so ist nach vollendeter Rechnung

$$k^2 = \frac{2FN - EG - DH}{2fN - eg - dh}.$$

Damit das Verhältniß k reell und positiv sei, muß $k^2$ positiv sein; daraus folgt noch die zweite Bedingung, daß der Zähler und Nenner des vorigen Ausdrucks gleiche Vorzeichen haben müssen.

Da die Werthe a und b reell sind, wenn k reell ist, so geben sie zu keiner weiteren Bedingung Veranlassung.

**486.** Sind die zu vergleichenden Curven Parabeln, so ist N oder $B^2 - 4AC$ Null, und die Werthe a und b scheinen unendlich zu werden. Setzt man aber, ehe man $N = 0$ annimmt, für k seine beiden Werthe, so findet sich unter den zwei Systemen von Werthen, die man für a und b erhält, ein Werth, der auch nach der Voraussetzung $N = 0$ noch aus endlichen Größen besteht.

Indessen ist es doch besser, um diese Rechnungsschwierigkeiten zu vermeiden, wenn man zu den Gleichungen [5], [6] und [8] zurückgeht. Eliminirt man b aus den beiden ersten, so verschwindet auch a, und man findet k sogleich; dann wird a und b mittelst der Gleichungen [5] und [8] bestimmt. Der Werth, den man für k erhält, ist

$$k = \frac{G}{g} = \frac{BD - 2AE}{Bd - 2Ae},$$

und hieraus folgt, daß, für $B^2 - 4AC = 0$, anstatt der letzt erwähnten Bedingung, die Größen BD — 2AE und Bd — 2Ae gleiche Vorzeichen haben müssen.

# Sechszehntes Kapitel.

## Von einigen Anwendungen der Curven.

---

### Construction bestimmter Gleichungen.

**487.** Es soll irgend eine Gleichung mit einer Unbekannten construirt werden. Die Unbekannte sei nämlich eine Länge, welche man mittelst Durchschnittspunkte von Linien, ohne die Auflösung der gegebenen Gleichung auszuführen, bestimmen soll. Die Unbekannte könnte jede Art von Größe, und sogar eine abstracte Zahl vorstellen, ohne daß dadurch die Aufgabe verändert würde: denn offenbar kann man diese Unbekannte immer als eine Linie betrachten, deren Verhältniß zu einer gewissen Längeneinheit so groß ist, als das Verhältniß der gesuchten Größe zu ihrer gleichartigen Einheit. Die gegebene Gleichung sei

$$f(x) = 0,$$

in welcher x eine unbekannte Linie ist: construirt man nun die durch die Gleichung $y = f(x)$ vorgestellte Curve durch Punkte oder auf jede andere Weise, so müssen offenbar die Abscissen der Punkte, wo diese Curve die Axe der x trifft, die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sein. Nehmen wir daher an, die Curve sei die in Fig. 211, und die gesuchten Wurzeln seien $x = AR$, $x = AR'$, $x = -AR''$.

Indem man einen Theil der Glieder in der Gleichung $f(x) = 0$ auf die andere Seite schafft, erhält man eine von der Form

$$\varphi(x) = \psi(x);$$

und man construirt Linien mit den Gleichungen

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x);$$

dann haben die Durchschnittspunkte dieser Linien die gesuchten Werthe zu Abscissen; denn für diese Punkte ist $\varphi(x) = \psi(x)$.

Ueberhaupt lassen sich zwei Linien, aus deren Durchschnittspunkten die Wurzeln einer Gleichung sich ergeben, auf unendlich verschiedene Weise wählen. Eine wesentliche und die einzige Bedingung dabei ist jedoch, daß man durch die Elimination von y aus den Gleichungen dieser Linien die gegebene Gleichung oder wenigstens eine solche erhalte, die alle reellen Wurzeln derselben enthält, und wenn diese resultirende Gleichung andere Wurzeln als die gegebene enthält, so dürfen diese fremden Werthe nach den Constructionen nicht berücksichtigt werden.

**488.** Betrachtet man Linien einer bestimmten Gattung, so läßt sich leicht erkennen, welche Gleichungen zu ihrer Auflösung anwendbar sind. Man darf nur den Grad der letzten Gleichung, die man durch Elimination von y aus den Gleichungen dieser Linien erhält, untersuchen. So gibt die Elimination von y aus den Gleichungen der geraden Linie und des Kreises eine resultirende Gleichung des zweiten Grades, woraus wie in Nro. 171 folgt, daß mit der geraden Linie und dem Kreise nur solche Aufgaben gelöst werden können, deren Gleichung sich auf den zweiten Grad bringen läßt. Zwei beliebige Curven der zweiten Ordnung geben eine Endgleichung des vierten Grades, und man schließt daraus, daß die Durchschnittspunkte dieser Linien nur zur Construction einer Gleichung dienen, die nicht höher als vom vierten Grade ist. Ohne diese Folgerungen weiter fortzusetzen, wollen wir einige Anwendungen vornehmen.

**489.** Es sei zuerst die Gleichung des zweiten Grades zu construiren

$$[1] \qquad x^2 + ax + b = 0.$$

Betrachtet man sie als entstanden durch die Elimination von y aus den Gleichungen

$$y = 0, \quad y = x^2 + ax + b,$$

so muß man die durch die zweite dargestellte Parabel auf beliebigen Axen construiren, und die zwischen dem Anfangspunkt und der Curve auf der Axe der x liegenden Abstände sind die gesuchten Wurzeln.

Man kann sich hiezu einer gegebenen Parabel bedienen; denn die Gleichung [1] ergibt sich auch aus

$$x^2 = ky, \quad ky + ax + b = 0,$$

und der Parameter k kann dabei jede beliebige Größe haben.

Die Verbindung des Kreises und der geraden Linie ist indessen vorzuziehen. Setzt man nun die Gleichungen

$$y = 0, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

und eliminirt y, so ergibt sich

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0;$$

damit diese Gleichung mit [1] identisch sei, muß

$$-2\alpha = a, \quad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = b$$

sein, woraus

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \qquad R^2 = \frac{a^2}{4} - b + \beta^2.$$

Also kann $\beta$ willkührlich genommen werden, wenn nur $R^2$ positiv ist, und dann erhält man einen Kreis, dessen Durchschnitt mit der Linie der x die Wurzeln der Gleichung [1] bestimmt.

**490.** Es sei die Gleichung des dritten Grads zu construiren,

[2] $$x^3 + ax + b = 0;$$

zuerst kann man sie durch folgende ersetzen,

$$y = x^3, \quad y + ax + b = 0:$$

so daß man nach der Construction der Curve $y = x^3$ nur noch eine gerade Linie zu construiren hat; dabei ist zu beachten, daß dieselbe Curve anwendbar ist, welches auch die Coefficienten der Gleichung [2] sein mögen.

Es ist indessen leicht, die Linien von einer höheren als der zweiten Ordnung zu vermeiden. Für die Gleichung [2] kann man z. B. folgende substituiren:

$$ky = x^2, \quad kxy + ax + b = 0.$$

Diese stellen nun eine Parabel und eine Hyperbel vor. Da der Parameter der Parabel willkührlich ist, so kann man immer dieselbe Parabel gebrauchen; die Hyperbel muß aber für jeden besondern Fall der Gleichung [2] eine verschiedene sein.

Findet man es endlich einfacher, die Parabel und den Kreis zu gebrauchen, so kann auch dieses, wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, geschehen.

**491.** Betrachten wir noch die Gleichung des vierten Grades,

[3] $$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

und bestimmen mit Uebergehung der verschiedenen Systeme von Linien, die man etwa gebrauchen könnte, ihre Wurzeln mittelst der Durchschnittspunkte einer Parabel und eines Kreises.

Zu diesem Zwecke nehme man die Gleichungen

$$ky = x^2, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Durch Elimination von y ergibt sich

$$x^4 + k(k - 2\beta)x^2 - 2k^2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)k^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird aber mit [3] identisch, wenn man setzt:

$$k\,(k-2\beta) = a, \quad 2k^2\alpha = -b, \quad (\alpha^2+\beta^2-R^2)\,k^2 = c;$$

man hat also drei Gleichungen zwischen den vier willkührlichen Größen k, $\alpha$, $\beta$, R; folglich kann man eine derselben zur Bestimmung der drei andern gebrauchen. Dadurch findet sich eine Parabel und ein Kreis, deren Durchschnittspunkte die reellen Wurzeln der Gleichung [3] zu Abschiffen haben.

Diese Auflösung enthält auch als besondern Fall die einer Gleichung des dritten Grades; denn für $c = 0$ verwandelt sich die Gleichung [3] in

$$x^4 + ax^2 + bx = 0,$$

oder in

$$x^3 + ax + b = 0,$$

wobei die Wurzel Null weggelassen wird. Dann gibt die letzte der drei obigen Relationen $\alpha^2+\beta^2=R^2$; also geht der Kreis durch den Ursprung, und da die Parabel auch durch denselben geht, so entspricht offenbar die vernachläßigte Wurzel $x = 0$ diesem Durchschnittspunkte.

Es dürfte hier am Orte sein, einige merkwürdige Aufgaben der Alten, welche diese viel beschäftigten, die aber für die Neuern ein bloßes analytisches Spiel sind, anzuführen.

## Von einigen merkwürdigen Aufgaben der Alten.

**492.** Aufgabe I. Zwei mittlere Proportionalen zwischen zwei gegebenen Geraden zu finden.

Die gegebenen Geraden seien a und b, die unbekannten Proportionalen x und y, so ist

$$a : x = x : y, \quad x : y = y : b,$$

und diese Proportionen geben die Gleichungen

[1] $$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

welche zwei Parabeln bestimmen, die in Fig. 212 dargestellt sind, wo $x = AP$ und $y = PM$ ist. Diese Construction hat Menächmus, ein Mathematiker aus Plato's Schule, gegeben.

Multiplicirt man die Gleichungen [1] gliederweise, und dividirt durch ihren gemeinschaftlichen Factor xy, so erhält man $xy = ab$, d. i. die Gleichung einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Man kann diese Curve einer der beiden Parabeln substituiren, und erhält so die in Fig. 213 dargestellte Construction, die ebenfalls Menächmus gegeben hat.

Diese zwei Auflösungen sind insofern als mangelhaft zu betrachten, als dabei zwei Kegelschnitte angewendet werden, während einer in Verbindung mit dem Kreise hinreicht. Denn verbindet man die Gleichungen [1], so ergibt sich

$$y^2 + x^2 = ay + bx,$$

und wenn man diese Gleichung mit rechtwinkligen Axen construirt, so erhält man einen Kreis, dessen Durchschnitt mit einer der Parabeln die beiden mittleren Proportionalen x und y bestimmt (s. Fig. 214).

Ebenso kann man den Kreis mit der Hyperbel anwenden, welche Auflösung dem Apollonius bekannt war.

Auflösung des Diocles. Zur Lösung der Aufgabe von den zwei mittleren Proportionalen hatte Diocles die Cissoide gefunden. Es sei (Fig. 215) mittelst eines beliebigen Kreises ALB eine Cissoide beschrieben. Nach der Construction dieser Curve, Nro. 184 Aufg. I. ist AM = LD, also sind die Dreiecke AMP und LDR congruent, und daher

$$AP = QB = LR, \quad MP = DR, \quad AQ = BP, \quad PN = QL.$$

Ferner folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken

$$AQ : QL = QL : QB, \quad BR : LR = LR : DR;$$

oder wegen der gleichen Linien,

$$BP : PN = PN : AP, \quad PN : AP = AP : MP,$$

oder was dasselbe ist

$$\div BP : PN : AP : MP.$$

Somit sind PN und AP die zwei gesuchten mittleren Proportionalen, wenn BP und MP die gegebenen Linien a und b sind.

Bestimmen wir zuerst den Punkt M auf der Cissoide so, daß

$$BP : MP = a : b;$$

hiezu nimmt man im rechten Winkel $BE = a$, $EF = b$ und zieht BF, welche die Curve im gesuchten Punkte M trifft. Dann ist

$$a = \frac{BP \times b}{MP},$$

und indem man die Glieder der obigen Progression mit b multiplicirt, dann durch MP dividirt, ergibt sich

$$a : \frac{PN \times b}{MP} : \frac{AP \times b}{MP} : b.$$

Also erhält man für die gesuchten mittleren Proportionalen

$$x = \frac{PN \times b}{MP}, \qquad y = \frac{AP \times b}{MP},$$

und man darf nur noch die beiden vierten Proportionalen construiren, was keine Schwierigkeit darbietet.

In Nro. 184 Aufg. II. wurde gezeigt, wie die Cissoide durch eine stetige Bewegung beschrieben wird: diese Vervollständigung von Diocles Auflösung verdankt man Newton. Descartes hat auch ein aus mehreren Linealen bestehendes Werkzeug erfunden, mittelst dessen man mittlere Proportionalen in beliebiger Anzahl construiren kann; doch verdient dieß heutzutage nur noch der Merkwürdigkeit halber einer Erwähnung.

**493.** Aufgabe II. Einen Cubus zu finden, der doppelt so groß ist als ein gegebener Cubus.

Es sei a die Seite des gegebenen, und x die des gesuchten Cubus, so ist die Gleichung zu construiren

[2] $$x^3 = 2a^3.$$

Diese ergibt sich durch die Elimination von y aus den beiden Gleichungen $a^2y = x^3$ und $y = 2a$, von denen die erste leicht durch Punkte construirt wird, und die zweite eine mit der Abscissen-Axe parallele Linie vorstellt; folglich gibt die Abscisse des Durchschnittspunktes $x = AP$ (Fig. 216) die Seite des gesuchten Cubus.

Man kann die Gleichung [2] auch auf folgende Weise schreiben: $x^2 \times x = 2a^3$; dann sieht man, daß sie auch aus den beiden Gleichungen $x^2 = 2ay$ und $xy = a^2$ hervorgehen kann; also läßt sich die Aufgabe auch mittelst des Durchschnitts einer Parabel und einer Hyperbel auflösen.

Führt man die Wurzel $x = 0$ ein, die man nachher vernachläßigen kann, so verwandelt sich die Gleichung in

$$x^4 = 2a^3x.$$

Setzt man nun $x^2 = ay$, so verwandelt sich die letzte in $y^2 = 2ax$; also wird die Aufgabe auch mittelst zweier Parabeln aufgelöst.

Addirt man die Gleichungen dieser zwei Parabeln, so ist

$$y^2 + x^2 = ay + 2ax;$$

also kann man sich auch einer Parabel und eines Kreises bedienen, und dieß ist die einfachste Auflösung.

Diese Aufgabe hat mit der ersten eine auffallende Aehnlichkeit: die Seite des doppelten Cubus ist nämlich so groß als die erste der beiden mittleren Proportionalen zwischen a und 2a. Denn setzt man die Proportionen

$$a : x = x : \frac{x^2}{a}, \quad \text{und } x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : 2a,$$

so folgt daraus die Gleichung [2] $x^3 = 2a^3$.

**494.** Aufgabe III. Einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Es sei BAC (Fig. 217) der gegebene Winkel. Man beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen BC, fälle die Senkrechte CD auf AB: nun kann man AB als Einheit und AD als Cosinus des Bogens BC annehmen; dann ist die Aufgabe gelöst, wenn man $\cos \frac{1}{3}BC$ gefunden hat. Setzt man

$$\cos BC = a, \quad \text{und } \cos \tfrac{1}{3} BC = x,$$

so hängt nach Nro. 33 die Unbekannte x von der Gleichung ab

[3] $$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}a = 0.$$

Obgleich sie verwickelter ist, als die für den doppelten Cubus, so läßt sie sich doch mittelst derselben Curven construiren: denn

1) kann man für sie die beiden Gleichungen setzen

$$y = x^3, \quad y = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}a,$$

welche eine in Fig. 218 construirte Gerade und eine Curve vorstellen.

2) Kann man die Gleichungen

$$kxy - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}a = 0, \quad \text{und} \quad x^2 = ky$$

nehmen, wo k einen beliebigen Parameter bezeichnet, d. h. man kann eine Hyperbel und eine Parabel anwenden.

3) Multiplicirt man die Gleichung [3] mit x, so erhält man

$$x^4 - \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}ax = 0;$$

und diese kann aus den beiden Gleichungen

$$y^2 - \tfrac{3}{4}y - \tfrac{1}{4}ax = 0, \quad \text{und} \quad x^2 = y$$

entstehen; also läßt sich die Aufgabe mittelst zweier Parabeln auflösen, wobei jedoch der Werth $x = 0$ zu vernachläßigen ist.

4) Man kann auch diese zwei letzten Gleichungen addiren, so daß man

$$x^2 = y, \quad x^2 + y^2 - \tfrac{7}{4}y - \tfrac{1}{4}ax = 0$$

erhält, was eine Parabel und einen Kreis anzeigt.

Bemerkung. Außer dem Bogen BC gibt es eine Menge anderer, die a zum Cosinus haben, und wo die Gleichung [3] den Cosinus des Drittels von jedem derselben geben muß. Nun gibt es aber bekanntlich (Nro. 33) drei Bögen, deren Drittel verschiedene Cosinus haben; also müssen die Wurzeln der Gleichung [3] reell und $< 1$ sein.

Die Figur 218 wurde gezeichnet unter der Voraussetzung $a = \frac{4}{5}$. Vernachläßigt man den Werth $x = 0$, so erhält man für x die Werthe

$$x = OP, \quad x = -OP', \quad x = -OP'',$$

und man sieht leicht, daß sich der erste allein für die Aufgabe eignet. Kehrt man nun zur Fig. 217 zurück, nimmt hier $AD = \frac{1}{3}AB$ an, setzt $AE = OP$ und zieht EF senkrecht auf AB, so ist der Bogen BF der dritte Theil des Bogens BC, und der Winkel BAF ist der dritte Theil des Winkels BAC.

## Anwendung der Curven in der Algebra.

**495.** Da die Linien ein leichtes Mittel darbieten, die Stetigkeit der Größen darzustellen und zu veranschaulichen, so lassen sie sich mit vielem Vortheil in rein analytischen Untersuchungen anwenden, was hier gezeigt werden soll.

Es sei $f(x) = 0$ eine Gleichung von der Form

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

in welcher m eine beliebige ganze Zahl, und A, B, C ... beliebige gegebene Zahlen sind. Nehmen wir eine gewisse Länge als Einheit an, und betrachten

$$y = f(x)$$

als Gleichung einer Curve. Setzt man für x jede mögliche Größe, so hat die Ordinate y für jede Abscisse nur einen Werth, der nie imaginär sein kann. Daraus folgt 1) daß die Curve sich in der Richtung der positiven und negativen x ins Unendliche erstreckt; 2) daß zwischen zwei beliebigen Punkten derselben nie eine Unterbrechung stattfindet; 3) daß sie nicht in sich selbst zurückkehren kann, wie dieß in Fig. 219 der Fall ist.

Angenommen, die Coordinaten stehen senkrecht auf einander, und $f'(x)$ bezeichne das von $f(x)$ abgeleitete Polynom, $\alpha$ den Winkel, welcher von der an die Curve gezogenen Tangente und der Abscissen-Axe eingeschlossen wird, so ist nach der Formel für $\lambda$ (Nro. 471)

$$\text{tang } \alpha = f'(x).$$

Dem Wesen des Polynoms $f'(x)$ gemäß kann man für denselben Werth von x auch nur einen einzigen Werth für tang $\alpha$ erhalten, und dieser Werth kann nicht unendlich werden, wenn nicht auch x unendlich ist; also kann die Curve in keinem ihrer Punkte die bei Fig. 220 angegebenen Formen in M und M' haben.

Dagegen kann durch gewisse Werthe von x auch $f'(x) = 0$ werden: dann würde man Tangenten erhalten, die mit den Abscissen parallel laufen, wie dieß in N und N' der Fall ist.

**496.** Nehmen wir nun an, zwei Abscissen, wie AP und AP' (Fig. 221) geben Ordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen MP und M'P', so kann die Curve nicht von M nach M' gehen, ohne die Axe Ax in irgend einem zwischen P und P' liegenden Punkte R zu treffen. Nun ist offenbar die Abscisse $x = AR$ eine Wurzel von der Gleichung $f(x) = 0$; daher der bekannte algebraische Satz: *Wenn zwei in einer gegebenen Gleichung substituirte Größen Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichen geben, so ist wenigstens eine reelle Wurzel zwischen diesen Größen enthalten.*

Der Anblick der Fig. 222 zeigt auch, daß zwischen zwei Ordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen die Curve mehrere Durchschnittspunkte, aber immer in ungerader Anzahl mit der Abscissenlinie Ax haben kann. Haben die zwei Ordinaten gleiche Vorzeichen (Fig. 223), so hat die Curve entweder keinen Durchschnittspunkt zwischen P und P', oder eine gerade Anzahl derselben. *Ist also zwischen zwei Größen eine ungerade Anzahl Wurzeln enthalten und man substituirt dieselben in der Gleichung, so ergeben sich Resultate mit entgegen-*

gesetzten Vorzeichen, und enthalten diese Größen keine Wurzel oder eine gerade Anzahl derselben, so haben die Resultate gleiche Vorzeichen.

**497.** Es gibt jedoch Fälle, wo der letzte Satz fehlerhaft zu sein scheint. Es kann nämlich vorkommen, daß die Curve, nachdem sie die Axe Ax (Fig. 224) in einem Punkte R erreicht hat, nicht sogleich auf die andere Seite derselben übergeht; dann können die Ordinaten MP und M'P' entgegengesetzte Vorzeichen haben, und doch sind die der Curve und der Axe Ax gemeinschaftlichen Punkte in gerader Anzahl vorhanden. Dann ist aber auch zu beachten, daß die Gleichung $f(x) = 0$ eine gerade Anzahl Wurzeln gleich AR enthält, und daß man deßhalb den Punkt R als den Vereinigungspunkt von eben so vielen Durchschnittspunkten, als sie gleiche Wurzeln hat, betrachten kann. Dieß soll noch näher erläutert werden.

Man bezeichne AR mit a; um die Ordinate y', die einer Abscisse $x + h$ entspricht, zu erhalten, substituire man $a + h$ für x in $f(x)$. Denken wir uns nun wie gewöhnlich unter $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ ..... die Größen, die man erhält, wenn in dem Polynom und in seinen Ableitungen $x = a$ gesetzt wird, so ist

$$y' = f(a) + \frac{h f'(a)}{1} + \frac{h^2 f''(a)}{1.2} + \frac{h^3 f'''(a)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Da nun a oder AR eine Wurzel der Gleichung ist, so hat man $f(a) = 0$; also

$$y' = \frac{hf'(a)}{1} + \frac{h^2 f''(a)}{1.2} + \frac{h^3 f'''(a)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Da ferner die Curve nach Erreichung des Punktes R nicht auf die andere Seite der Axe Ax geht, so müssen die diesem Punkte sehr nahe liegenden Ordinaten rechts und links gleiche Vorzeichen haben; folglich muß, wenn man für h auch noch so kleine, positive und negative Werthe setzt, der vorige Ausdruck dasselbe Vorzeichen beibehalten, und damit dieses stattfinde, ist zu beweisen, daß $f'(a) = 0$ sein muß. Man schreibe den Werth von y' in folgender Weise:

$$y' = h\left\{\frac{f'(a)}{1} + \frac{h f''(a)}{1.2} + \frac{h^2 f'''(a)}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}.$$

Nun könnte man offenbar, wenn $f'(a)$ nicht Null wäre, h so klein nehmen, daß die zwischen den Klammern enthaltene Größe das Vorzeichen von $f'(a)$ erhielte, und daher y' sein Vorzeichen zugleich mit h ändern würde; daher ist $f'(a) = 0$. Ebenso können auch mehrere andere der Größen $f''(a)$, $f'''(a)$ ... zu Null werden; aber in Betracht der vorigen Folgerungen muß in den übrigen Gliedern der kleinste Exponent von h immer eine gerade Zahl sein.

Zur anschaulichern Darstellung nehme man an, daß mit $f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$ auch $f''(a) = 0$ und $f'''(a) = 0$ sei, und da vermöge dieser Bedingungen in der Gleichung $f(a) = 0$, wie die Algebra lehrt, vier Wurzeln gleich a vorhanden sind, so ist klar, warum man annehmen kann, der Punkt R stelle vier Durchschnittspunkte vor, die unter besondern Voraussetzungen in einen einzigen zusammenfallen. Dabei ist auch zu beachten, daß die Axe Ax in diesem Punkte die Curve tangirt, da

$$\text{tang } \alpha = f'(a) = 0$$

ist (Nro. 495).

**498.** Die Curve kann zuweilen die Axe Ax erreichen, dann auf die andere Seite derselben gehen, und doch dieselbe Axe zur Tangente haben (Fig. 225). Dieß ist der Fall, wenn die Anzahl der Größen $f'(a)$, $f''(a)$...., welche zugleich mit $f(a)$ Null werden, eine gerade ist. Dann beginnt die Entwicklung von $y'$ mit einer ungeraden Potenz von h, weßhalb sehr kleine Werthe von h mit entgegengesetzten Vorzeichen Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen für $y'$ ergeben, und dieß beweist, daß die Curve in der Nähe des Punktes R zum Theil über, zum Theil unter der Axe Ax liegt. Ueberdieß ist diese Axe auch deßwegen Tangente, weil $f'(a) = 0$. In diesem Falle hat die gegebene Gleichung $f(x) = 0$ eine ungerade Anzahl Wurzeln gleich a, und deßhalb nimmt man an, der Berührungspunkt R entstehe aus einer ungeraden Anzahl Durchschnittspunkte, die in einen einzigen zusammenfallen.

Es ließen sich jetzt schon leicht verschiedene Arten der Berührungen zwischen der Geraden Ax und der Curve je nach der Ordnung der Potenz, mit welcher die Entwickelung von $y'$ beginnt, unterscheiden; diese Betrachtungen gehören aber eigentlich in das Gebiet der Differentialrechnung, von der sie nicht getrennt werden können.

**499.** Es folgen hier noch einige andere interessante Sätze zur Auflösung der numerischen Gleichungen, die man Rolle, dem Verfasser einer unter dem Namen Methode der Unterbrechungen (Méthodes des cascades) bekannten Abhandlung zuschreibt.

Construirt man (Fig. 226) den Ort der Gleichung $y = f(x)$, so muß offenbar zwischen zwei auf einander folgenden Durchschnittspunkten der Curve mit der Axe der x wenigstens ein Punkt, wie M vorkommen, dessen Ordinate MP größer ist als die unmittelbar folgenden oder vorhergehenden, und es soll nun gezeigt werden, daß die Tangente in diesem Punkte mit den Abscissen parallel läuft. Denn es sei $AP = a$; man mache $x = a + h$ in $f(x)$, und bezeichne die zu $a + h$ gehörige Ordinate mit $y'$, so ist, wie in Nro. 497

$$y' = f(a) + \frac{hf'(a)}{1} + \frac{h^2 f''(a)}{1.\ 2} + \text{etc.}$$

Setzt man für h positive oder negative, aber immer sehr kleine Werthe, so erhält man die auf MP unmittelbar folgenden oder ihr vorausgehenden Werthe; nun müssen aber alle diese Ordinaten kleiner als MP oder f (a) sein, also muß die Größe

$$\frac{hf'(a)}{1} + \frac{h^2 f''(a)}{1 \cdot 2} + \text{etc.},$$

die in y' zu f (a) hinzukam, für alle sehr kleinen positiven oder negativen Werthe von h beständig negativ bleiben. Nach den Folgerungen im angeführten Paragraphen kann dieß nur unter der Bedingung stattfinden, daß f' (a) = 0 ist; also ist die Tangente im Punkte M mit den Abscissen parallel. Ueberdieß ist es möglich, daß es zwischen zwei auf einander folgenden Durchschnittspunkten der Curve mit der Axe Ax mehrere Punkte gibt, in welchen die Tangente mit dieser Axe parallel ist, wie z. B. zwischen R'' und R''', und offenbar müssen die Abscissen dieser Punkte immer Wurzeln der Gleichung f' (x) = 0 sein.

Enthält also die Gleichung f (x) = 0 keine gleichen Wurzeln, wenn man eine abnehmende Reihe bildet, die 1) aus der oberen Grenze der positiven Wurzeln dieser Gleichung, 2) aus den reellen Wurzeln der abgeleiteten f' (x) = 0, 3) aus der obern Grenze der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung besteht, so ist jede reelle Wurzel der gegebenen Gleichung zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern dieser Reihe enthalten.

Daraus folgt unmittelbar, was auch aus der Figur hervorgeht, daß die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung um nicht mehr als 1 größer sein kann, als die Anzahl der reellen Wurzeln der abgeleiteten, und daß sogar die Anzahl der reellen Wurzeln, die in der gegebenen Gleichung mit einem gewissen Vorzeichen, + oder —, behaftet sind, nie um mehr als 1 größer sein kann, als die Anzahl der Wurzeln mit demselben Vorzeichen in der abgeleiteten.

Dabei ist wohl zu merken, daß die reellen Wurzeln mit jedem Vorzeichen in der gegebenen Gleichung in geringerer Anzahl vorhanden sein können, als in der abgeleiteten.

**300.** Es soll nun gezeigt werden, welche Methoden die Geometrie an die Hand gibt, um annähernde Wurzeln der Gleichungen zu erhalten.

Nehmen wir wieder die Gleichung

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

von welcher das erste Glied mit f (x) bezeichnet wurde: man nehme an, es sei eine Wurzel von einem gewissen Näherungsgrad bekannt, und man soll einen näheren Werth dafür erhalten.

Es sei MM′ (Fig. 227) die Curve von der Gleichung $y = f(x)$, und AR die Wurzel, von welcher bereits ein erster Näherungswerth $\varrho = AP$ bekannt ist. Man ziehe die Ordinate MP, die Tangente MP′, und berechne die Subtangente PP′. Da $\text{tang } MP'x = f'(\varrho)$, so ist

$$PP' = \frac{MP}{\text{tang } MP'P} = \frac{f(\varrho)}{f'(\varrho)};$$

und durch Addition dieses Werthes zu $\varrho$ erhält man einen neuen Näherungswerth $\varrho = AP'$.

Man ziehe ferner die Ordinate M′P′ und die Tangente M′P″: berechnet man auf ähnliche Weise mittelst $\varrho'$ die Subtangente P′P″, und addirt sie zu $\varrho'$, so erhält man einen dritten Näherungswerth. Dieser Werth dient zur Bestimmung eines vierten, und s. f.

Der Leser hat in diesem Verfahren wohl bereits die Näherungsmethode Newton's erkannt. Bei Fig. 228 sieht man, daß die Fußpunkte P′, P″ ... der Tangenten sich immer weiter von R entfernen; für diesen Fall ist daher das Verfahren mangelhaft. Wenn aber, wie in Fig. 227, die Ordinaten vom Punkte M an bis R abnehmen, und die Curve in diesem Zwischenraum gegen PR immer convex bleibt, so müssen sich offenbar die Fußpunkte P′, P″ ... dem Punkte R immer mehr nähern, und die vorigen Berechnungen geben wirklich immer genauere Werthe. Indessen könnte auch dann noch zu befürchten sein, daß die Fußpunkte der Tangenten, wenn sie sich auch R beständig nähern, doch eine gewisse bestimmte vom Punkte R abweichende Grenze nicht überschreiten können.

**501.** Anstatt der Tangenten könnte man auch Sehnen, und zwar auf folgende Weise, gebrauchen. Nachdem man auf irgend eine Weise gefunden, daß die Größen $\varrho$ und $\varrho'$, in $f(x)$ substituirt, Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichen geben, und daß zwischen denselben nur eine einzige Wurzel enthalten ist, so setze man (Fig. 229) $AP = \varrho$ und $AP' = \varrho'$, und ihre entsprechenden Ordinaten seien

$$MP = f(\varrho) \text{ und } M'P' = f(\varrho').$$

Man ziehe die Sehne MM′, die PP′ in P″ schneidet, berechne PP″ mittelst ähnlicher Dreiecke, und addire das Resultat zu AP oder $\varrho$, so ist AP″, das mit $\varrho''$ bezeichnet werde, bekannt.

Nun suche man, ob der Punkt P″ auf der Seite RP oder RP′ liegt: zu diesem Zweck darf man nur $\varrho''$ in $f(x)$ substituiren und das Vorzeichen des Resultats finden.

Angenommen, es sei negativ, so weiß man gewiß, daß die Wurzel AR zwischen AP und AP″ enthalten ist. Diese Grenzen stehen einander näher als AP und AP′, und durch Fortsetzung desselben Verfahrens erhält man immer nähere Grenzen.

Auch dieses Verfahren ist nicht frei von Mängeln; es ist jedoch nicht unser Zweck, dieselben hier zu erörtern, sondern blos die Hilfsmittel anzudeuten, welche die Analysis der Geometrie entnehmen kann.

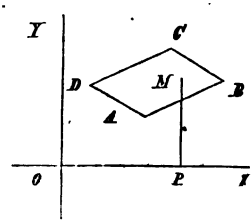
## Lehrsatz von Cauchy.

**502.** Wir geben hier noch diesen schönen Lehrsatz nebst dem Beweise von Sturm und Liouville, der in dem Journal de Mathématiques veröffentlicht wurde.

Es sei $f(z) = 0$ eine algebraische Gleichung von der Form

$$Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

in welcher A, B, C gegebene, reelle oder imaginäre Größen sind. Setzt man $x + y\sqrt{-1}$ anstatt z, so erhält f (z) die Form $P + Q\sqrt{-1}$, wo P und Q Polynome mit x und y sind, die kein $\sqrt{-1}$ enthalten. Um die Gleichung $f(z) = 0$ aufzulösen, muß man für x und y reelle Werthe finden, welche zugleich P und Q zu Null machen.




Nun kann man x und y als die Abscisse OP und die Ordinate PM eines gewissen Punktes betrachten, und die Auflösung der Gleichung $f(z) = 0$ auf die Aufgabe zurückführen, die Punkte zu suchen, deren Coordinaten so beschaffen sind, daß durch ihre Substitution für x und y zugleich P=0 und Q=0 werde. Durch diese Punkte werden gewissermaßen die Wurzeln der Gleichung geometrisch dargestellt, weßhalb wir der Kürze wegen diese Punkte selbst Wurzeln nennen wollen. Ist die Ordinate y gleich Null, so liegt der Punkt M auf der Abscissen-Axe, und die Wurzel ist dann reell.

Man zeichne in der Ebene der Coordinaten x und y eine beliebige geschlossene Figur ABCD. Nun fragt es sich, ob innerhalb dieses Umfangs sich Punkte befinden, für welche P und Q zugleich Null sind, und wie viele es deren gibt: oder kürzer, wie viele Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ innerhalb dieses Umfangs vorhanden sind. Zur Auflösung dieser Aufgabe hat Cauchy folgenden Lehrsatz aufgestellt:

Man setze das Verhältniß $\frac{P}{Q} = R$ und nehme an, es befinde sich auf dem Umfang kein Punkt, für welchen P und Q zugleich Null sind, so hat das Verhältniß R für jeden Punkt dieses Umfangs einen bestimmten Werth. Geht man auf diesem Umfang von einem beliebigen Punkt A aus immer in der Richtung ABCD weiter, bis man wieder auf den nämlichen Punkt A kommt, so nimmt das Verhältniß R nach einander verschiedene Werthe an, und sein Vorzeichen kann sich beim Uebergang durch Null, wenn P Null wird, und durchs unendlich Große, wenn Q Null wird, ändern. Bezeichnet nun i die Zahl, wie viel mal dieses Verhältniß, indem es verschwindet und sein Vorzeichen verändert, vom Positiven zum Negativen

übergeht, und i' die Zahl, wie viel mal dasselbe Verhältniß beim Verschwinden und der Veränderung seines Vorzeichens vom Negativen zum Positiven übergeht: so kann die Zahl i nie kleiner sein als i', und die Differenz $i - i'$ muß doppelt so groß sein als die Anzahl der innerhalb des Umfangs ABCD enthaltenen Wurzeln. Wird daher die Zahl dieser Wurzeln mit $\mu$, und der Ueberschuß $i - i'$ mit $\triangle$ bezeichnet, so muß $\mu = \frac{1}{2} \triangle$ sein.

Dieser Lehrsatz, den die Gleichung $\mu = \frac{1}{2} \triangle$ ausdrückt, soll nun bewiesen werden. Es wird in demselben vorausgesetzt, daß auf keinem Punkte des Umfangs P und Q zugleich Null werden. Auch ist zu bemerken, daß auf die Veränderungen des Vorzeichens, die das Verhältniß R beim Uebergang durchs Unendliche erfahren kann, keine Rücksicht genommen wird, ebenso wenig auf die Fälle, wo dieses Verhältniß, ohne sein Vorzeichen zu ändern, zu Null wird.

**503.** Der Lehrsatz ist klar, wenn innerhalb des Umfangs und auf diesem selbst nie $P = 0$ wird; denn dann ist $\mu = 0$, $\triangle = 0$, und somit auch $\mu = \frac{1}{2}\triangle$.

Dieser Gleichung wird auch noch genügt, wenn innerhalb des Umfangs und auf diesem selbst nie $Q=0$ ist; dann ist wieder die Zahl $\mu=0$, und es läßt sich beweisen, daß auch $\triangle = 0$ ist. Denn hat man den ganzen Umfang durchlaufen und trifft wieder auf den Anfangspunkt, so erhält das Verhältniß R wieder dasselbe Vorzeichen, wie im Anfange der Bewegung; also ist es eben so oft vom Positiven zum Negativen, als vom Negativen zum Positiven übergegangen. Bei jeder Veränderung des Vorzeichens muß überdieß R verschwinden, da der Voraussetzung nach der Nenner Q nicht Null werden kann. Somit ist in dem betreffenden Fall die Differenz $\triangle = 0$, und die Gleichung $\mu = \frac{1}{2}\triangle$ befriedigt.

**504.** Betrachten wir nun einen Punkt M, dessen Coordinaten a und b den Gleichungen $P=0$ und $Q=0$ zugleich Genüge leisten, oder was dasselbe ist, wo der Werth $z = a + b\sqrt{-1}$ eine einfache oder vielfache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist. Um den Punkt M ziehe man einen convexen Umfang; ist nun für jeden Punkt N dieses Umfangs der Radius-Vector MN klein genug, so läßt sich beweisen, daß für diesen Umfang die Gleichung $\mu = \frac{1}{2}\triangle$ stattfinden muß.

Es sei $MN = \varrho$ und $\omega$ der Winkel, den dieser Radius-Vector mit der Axe der x einschließt. Die Coordinaten des Punktes N sind nun

$$x = a + \varrho \cos \omega, \quad y = b + \varrho \sin \omega,$$

und somit verwandelt sich der allgemeine Werth

$$z = x + y\sqrt{-1} \text{ in } z = (a + b\sqrt{-1}) + \varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Setzt man $a + b\sqrt{-1} = k$, und $\varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = \theta$, so läßt sich einfach schreiben $z = k + \theta$, und die Substitution dieses

Ausdrucks verwandelt $f(z)$ in $f(k+\theta)$. Entwickelt man dieses und beachtet, daß $f(k)=0$, so ergibt sich

$$f(k+\theta)=\frac{f'(k)}{1}\theta+\frac{f''(k)}{1.2}\theta^2+\frac{f'''(k)}{1.2.3}\theta^3+\text{u. s. f.}$$

Mittelst der Moivre'schen Formel (Nro. 124) hat man

$$\theta=\varrho\,(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega),$$
$$\theta^2=\varrho^2(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)^2=\varrho^2(\cos 2\omega+\sqrt{-1}\sin 2\omega),$$
$$\theta^3=\varrho^3(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)^3=\varrho^3(\cos 3\omega+\sqrt{-1}\sin 3\omega),$$

u. s. f.

Ferner lassen sich mit den Factoren der verschiedenen Potenzen von $\theta$ beachtenswerthe Umformungen vornehmen. So kann man z. B. mittelst algebraischer Rechnung $f'(k)$ in folgender Form darstellen:

$$\frac{f'(k)}{1}=c+d\sqrt{-1}=\sqrt{c^2+d^2}\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\sqrt{-1}\right).$$

Beachtet man nun, daß die Quadrate der Brüche

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}},\quad\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

eine Summe gleich 1 geben, so kann man diese Brüche als den Cosinus und Sinus desselben Winkels $\alpha_1$ betrachten.

Setzt man ferner $\sqrt{c^2+d^2}=M_1$, so kann man schreiben

$$\frac{f'(k)}{1}=M_1(\cos\alpha_1+\sqrt{-1}\sin\alpha_1);$$

folglich erhält man

$$\frac{f'(k)}{1}\theta=M_1(\cos\alpha_1+\sqrt{-1}\sin\alpha_1)\times\varrho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$$
$$=M_1\varrho[\cos(\omega+\alpha_1)+\sqrt{-1}\sin(\omega+\alpha_1)].$$

Aehnliche Umformungen lassen sich auch mit den Gliedern, welche die verschiedenen Potenzen von $\theta$ enthalten, vornehmen, und man erhält

$$f(x+y\sqrt{-1})=M_1\varrho[\cos(\omega+\alpha_1)+\sqrt{-1}\sin(\omega+\alpha_1)]$$
$$+M_2\varrho^2[\cos(2\omega+\alpha_2)+\sqrt{-1}\sin(2\omega+\alpha_2)]$$
$$+M_3\varrho^3[\cos(3\omega+\alpha_3)+\sqrt{-1}\sin(3\omega+\alpha_3)]$$
$$+\text{u. s. f.}$$

Stellt man in dieser Entwicklung die reellen Glieder zusammen, und ebenso die mit $\sqrt{-1}$ behafteten, so erhält man die mit P und Q bezeichneten Größen, nämlich:

$$P=M_1\varrho\cos(\omega+\alpha_1)+M_2\varrho^2\cos(2\omega+\alpha_2)+\text{u. s. f.}$$
$$Q=M_1\varrho\sin(\omega+\alpha_1)+M_2\varrho^2\sin(2\omega+\alpha_2)+\text{u. s. f.}$$

Ist k oder $a + b\sqrt{-1}$ eine einfache Wurzel, so muß das abgeleitete Polynom f′(k) von Null verschieden sein; also muß wenigstens eine der oben mit c und d bezeichneten Größen, und somit auch $M_1$ von Null verschieden sein. Dieser Fall soll nun zuerst untersucht werden.

**505.** Um zu bestimmen, wie klein der Radius-Vector $\varrho$ sein kann, setze man

$$S = M_2 + M_3 + \text{u. s. f.}$$
$$S' = M_2 \cos(2\omega+\alpha_2) + M_3 \varrho \cos(3\omega+\alpha_3) + \text{u. s. f.}$$
$$S'' = M_2 \sin(2\omega+\alpha_2) + M_3 \varrho \sin(3\omega+\alpha_3) + \text{u. s. f.}$$

Bezeichnet man auch einen beliebigen, im ersten Quadranten willkührlich genommenen Bogen mit $\lambda$, so kann man schreiben

$$P = S\varrho^2 \left\{ \frac{M_1 \cos\lambda}{S\varrho} \times \frac{\cos(\omega+\alpha_1)}{\cos\lambda} + \frac{S'}{S} \right\},$$
$$Q = S\varrho^2 \left\{ \frac{M_1 \sin\lambda}{S\varrho} \times \frac{\sin(\omega+\alpha_1)}{\sin\lambda} + \frac{S''}{S} \right\};$$

hierauf nehme man an, der um den Punkt M gezogene convexe Umfang sei so beschaffen, daß der Radius-Vector $\varrho$ in jedem seiner Punkte kleiner sei, als die kleinste der drei Größen $1$, $\frac{M_1 \cos\lambda}{\lambda}$, $\frac{M_1 \sin\lambda}{S}$.

Nun sind die Glieder, aus denen S besteht, alle positiv und beziehungsweise größer als die ihnen entsprechenden in S′ und S″; folglich sind die Brüche $\frac{S'}{S}$ und $\frac{S''}{S}$ nach ihrer absoluten Größe $< 1$; dagegen sind die Größen $\frac{M_1 \cos\lambda}{S\varrho}$ und $\frac{M_1 \sin\lambda}{S\varrho}$ positiv und $> 1$: also erhält P das Vorzeichen seines ersten Gliedes für alle Werthe von $\omega$, die in ihrer absoluten Größe genommen, $\cos(\omega+\alpha_1) > \cos\lambda$ machen, was der Fall ist, wenn der Winkel $\omega+\alpha_1$ zwischen $H-\lambda$ und $H+\lambda$, oder zwischen $2H-\lambda$ und $2H+\lambda$ (wo H den Halbkreis vorstellt) fällt; ebenso erhält auch Q das Vorzeichen seines ersten Gliedes für alle Werthe von $\omega$, die, in ihrer absoluten Größe genommen, $\sin(\omega+\alpha_1) > \sin\lambda$ machen, was der Fall ist, wenn der Winkel $\omega+\alpha_1$ zwischen $\lambda$ und $H-\lambda$ oder zwischen $H+\lambda$ und $2H-\lambda$ fällt.

Somit läßt sich aus dem Obigen folgende Tabelle bilden:

| Bögen $\omega+\alpha_1$ .... | $\lambda$, | $H-\lambda$, | $H+\lambda$, | $2H-\lambda$, | $2H+\lambda$, |
|---|---|---|---|---|---|
| Vorzeichen von P .... | + | − | − | + | +, |
| Vorzeichen von Q .... | + | + | − | − | +, |
| Vorzeichen von R .... | + | − | + | − | +. |

Hier sieht man sogleich, daß in dem ersten Zwischenraum von $\lambda$ bis $H-\lambda$ das Vorzeichen von P zuerst $+$ ist, und zuletzt $-$ wird, während das Vorzeichen von Q beständig $+$ ist; also muß in diesem Zwischenraum das Verhältniß R beim Verschwinden einmal öfter vom Positiven zum Negativen, als von diesem zu jenem übergehen.

In dem Zwischenraume von $H-\lambda$ bis $H+\lambda$ bleibt P fortwährend negativ und das Vorzeichen Q kann ein oder mehrere mal sich ändern; in dem Lehrsatz sind aber nur die Aenderungen des Vorzeichens von R zu betrachten, welche beim Uebergang von P durch Null stattfinden.

In dem Zwischenraum von $H+\lambda$ bis $2H-\lambda$ ist das Vorzeichen zuerst $-$ und wird zuletzt $+$; in demselben Zwischenraum bleibt aber Q beständig negativ; also kann sich das Vorzeichen des Verhältnisses R nur beim Verschwinden von P ändern, und da es zuerst $+$ und dann $-$ ist, so muß die Zahl der Uebergänge von $+$ auf $-$ um 1 größer sein, als von $-$ auf $+$.

In Betreff des letzten Uebergangs von $2H-\lambda$ auf $2H+\lambda$ beachte man, daß die Aenderung des Vorzeichens von R nicht beim Uebergang durch Null stattfinden kann, da hier P beständig positiv bleibt.

Nachdem also der Radius $\varrho$ einen ganzen Kreisumfang durchlaufen hat, ist einfach $\triangle = 2$; und da innerhalb des Umfangs nur eine Wurzel $\mu = 1$ vorkommt, so ist offenbar der Gleichung $\mu = \frac{1}{2}\triangle$ Genüge geleistet.

**506.** Nun ist zweitens der Fall zu untersuchen, wo die Wurzel $k$ oder $a+b\sqrt{-1}$ ein Vielfaches einer beliebigen Ordnung n ist. Dann sind die n abgeleiteten Polynome $f'(k)$, $f''(k)$ . . . . , $f^n(k)$ Null; folglich sind es auch die Modul $M_1$, $M_2$, . . . . . $M_{n-1}$, und die Werthe für P und Q sind

$$P = M_n \varrho^n \cos(n\omega+\alpha_n) + M_{n+1}\varrho^{n+1}\cos[(n+1)\omega+\alpha_{n+1}] + \text{u. s. f.}$$
$$Q = M_n \varrho^n \sin(n\omega+\alpha_n) + M_{n+1}\varrho^{n+1}\sin[(n+1)\omega+\alpha_{n+1}] + \text{u. s. f.}$$

Dividirt man alle Glieder vom zweiten an mit $\varrho^{n+1}$, und bezeichnet die Summe $M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots$ . mit S, so läßt sich mit Beibehaltung desselben Hilfswinkels $\lambda$ für P und Q folgende Form aufstellen:

$$P = S\varrho^{n+1}\left\{\frac{M_n \cos\lambda}{S\varrho} \times \frac{\cos(n\omega+\alpha_n)}{\cos\lambda} + \frac{S'}{S}\right\},$$
$$Q = S\varrho^{n+1}\left\{\frac{M_n \sin\lambda}{S\varrho} \times \frac{\sin(n\omega+\alpha_n)}{\sin\lambda} + \frac{S''}{S}\right\}.$$

Bei ähnlichen Folgerungen, wie für den Fall, wo die Wurzel kein Vielfaches war, wähle man den die Wurzel einschließenden convexen Umfang so, daß der Halbmesser $\varrho$ in jedem seiner Punkte kleiner werde, als die kleinste der drei Größen 1, $\frac{M_n \cos\lambda}{S}$, $\frac{M_n \sin\lambda}{S}$; nun sieht man leicht,

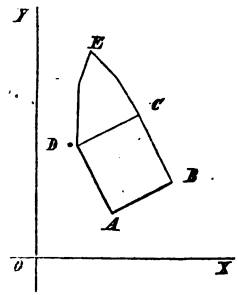
wenn $\cos(n\omega + \alpha_n) > \cos\lambda$, so erhalten die Werthe von P dasselbe Vorzeichen wie sein erstes Glied, und wenn $\sin(n\omega + \alpha_n) > \sin\lambda$, so erhalten auch die Werthe von Q gleiches Vorzeichen mit seinem ersten Gliede.

Es sind also hier noch einmal die in den Zwischenräumen der Reihe $\lambda$, $H-\lambda$, $H+\lambda$, $2H-\lambda$, $2H+\lambda$ enthaltenen Werthe des Bogens $n\omega+\alpha_n$ zu betrachten; hier muß aber, damit der Halbmesser einen ganzen Kreisumfang durchlaufe, diese Reihe bis $2nH-\lambda$ und $2nH+\lambda$ gehen.

Nach den Folgerungen der vorigen Nummer geben die Zwischenräume von gerader Stufe, wie $H-\lambda$ bis $H+\lambda$, für das Verhältniß R Veränderungen des Vorzeichens, die durch das Verschwinden von Q, und nicht von P, entstehen; deßhalb kommen diese Veränderungen hier gar nicht in Betracht. Dagegen ändert sich bei den Zwischenräumen von ungerader Stufe das Vorzeichen von R erst mit dem Verschwinden von P.

Nun ist aber die Zahl dieser Zwischenräume gleich $2n$, und in jedem derselben ist die Anzahl der Uebergänge von $+$ zu $-$ um 1 größer als von $-$ zu $+$; also ist $\triangle = 2n$. Da überdieß die gegebene Gleichung n gleiche Wurzeln für k zuläßt, so muß $\mu = n$ sein, und die Gleichung $\mu = \frac{1}{2}\triangle$ ist wieder erwiesen.

**507.** Findet dieser Lehrsatz für zwei Umfänge ABCDA, DCED, die ein gemeinschaftliches Stück DC haben, statt, so muß er gleichfalls für den ganzen vereinigten Umfang ABCEDA stattfinden. Denn offenbar müssen auf dem Wege ABCDA die Vorzeichen von R, die von C nach D vorkommen, auch stattfinden, jedoch in umgekehrter Ordnung, wenn man auf dem Wege DCED von D nach C geht. Bezeichnet man also die auf die beiden partiellen Umfänge bezüglichen Werthe von $\triangle$ mit $\triangle'$ und $\triangle''$, und den ganzen Umfang wieder mit $\triangle$, so muß




$$\triangle = \triangle' + \triangle'' \text{ sein.}$$

Es sei nun $\mu'$ die Anzahl der vom ersten Umfang, $\mu''$ der vom zweiten, und $\mu$ die Anzahl der von dem ganzen Umfang eingeschlossenen Wurzeln, so ist offenbar $\mu = \mu' + \mu''$. Da aber die Richtigkeit des Lehrsatzes für die beiden Umfänge einzeln genommen, bewiesen ist, so muß auch

$$\mu' = \tfrac{1}{2}\triangle', \quad \mu'' = \tfrac{1}{2}\triangle''$$

sein; also ist

$$\mu' + \mu'' = \tfrac{1}{2}\triangle' + \tfrac{1}{2}\triangle'',$$

und somit $\mu = \frac{1}{2}\triangle$. Folglich ist der Lehrsatz für den ganzen Umfang richtig.

Hätte man eine beliebige Anzahl zusammenhängender Umfänge, und der Lehrsatz würde für jeden derselben Geltung haben, so müßte er auch für den durch ihre Vereinigung entstandenen Gesammtumfang stattfinden; denn nach der Vereinigung zweier zusammenhängender Umfänge in einen einzigen läßt sich dieser neue Umfang mit einem dritten angehängten, dann wieder der neue Umfang mit einem vierten, und so fort, vereinigen, und nach dem oben Bemerkten muß der Lehrsatz immer noch seine Geltung haben.

**508.** Nehmen wir endlich an, ein beliebiger Umfang sei gegeben: nun läßt sich derselbe immer in partielle Umfänge theilen, von denen die einen um jede Wurzel gezogen und von den Bedingungen in Nro. 504 abhängig sind, während die andern keine Wurzel einschließen und den Bedingungen in Nro. 503 unterliegen. Da nun nach der vorigen Nummer der Lehrsatz für jeden partiellen Umfang wahr ist, so muß er auch für den gegebenen Umfang wahr sein; womit der Lehrsatz von Cauchy erwiesen ist.

**509.** Aus diesem Lehrsatze folgt nun, daß die Gleichung $f(z) = 0$, m Wurzeln von der Form $a + b\sqrt{-1}$ hat, und nicht weiter. Denn man ziehe um den Ursprung O einen Kreis mit sehr großem Halbmesser, und suche, wie viel Wurzeln innerhalb dieses Kreises enthalten sind. Es sei $\varrho$ ein beliebiger Halbmesser des Kreisumfangs, und $\omega$ der von diesem Halbmesser mit der Axe der x eingeschlossene Winkel, so ist

$$x = \varrho \cos \omega \text{ und } y = \varrho \sin \omega,$$

also

$$f(x+y\sqrt{-1}) = A\varrho^m [\cos m\omega + \sqrt{-1} \sin m\omega]$$
$$+ B\varrho^{m-1} [\cos (m-1)\omega + \sqrt{-1} \sin (m-1)\omega] + \text{u. s. f.}$$

Jeder der Coefficienten A, B, ... kann in die Form

$$H(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)$$

gebracht werden, und somit läßt sich diese Entwicklung in folgender Weise darstellen:

$$f(x+y\sqrt{-1}) = H\varrho^m \{\cos (m\omega+\alpha) + \sqrt{-1} \sin (m\omega+\alpha)\}$$
$$+ H_1\varrho^{m-1}\{\cos[(m-1)\omega+\alpha_1] + \sqrt{-1} \sin[(m-1)\omega+\alpha_1]\} + \text{u. s. f.}$$

Dadurch erhält man für P und Q,

$$P = H\varrho^m \cos[m\omega+\alpha] + H_1\varrho^{m-1} \cos[(m-1)\omega+\alpha_1] + \text{u. s. f.}$$
$$Q = H\varrho^m \sin[m\omega+\alpha] + H_1\varrho^{m-1} \sin[(m-1)\omega+\alpha_1] + \text{u. s. f.},$$

oder auch, in anderer Form, indem man, wie in Nro. 505, den Hilfswinkel $\lambda$ gebraucht, und die Summe $H_1 + H_2 + \text{u. s. f.}$ mit S bezeichnet,

$$P = S\varrho^{m-1}\left\{\frac{H\varrho\cos\lambda}{S}\times\frac{\cos(m\omega+\alpha)}{\cos\lambda}+\frac{S'}{S}\right\},$$

$$Q = S\varrho^{m-1}\left\{\frac{H\varrho\sin\lambda}{S}\times\frac{\sin(m\omega+\alpha)}{\sin\lambda}+\frac{S''}{S}\right\}.$$

Dabei wird angenommen, daß der Halbmesser größer genommen sei, als die größte der drei Größen 1, $\frac{S}{H\cos\lambda}$, $\frac{S}{H\sin\lambda}$; dann sieht man, daß P mit seinem ersten Gliede jedesmal gleiches Vorzeichen hat, wenn $\cos(m\omega+\alpha) > \cos\lambda$, und ebenso Q mit seinem ersten Gliede jedesmal dasselbe Vorzeichen, wenn $\sin(m\omega+\alpha) > \sin\lambda$.

Betrachtet man deßhalb die Reihe der Bögen

$\lambda$, $H-\lambda$, $H+\lambda$, $2H-\lambda$, $2H+\lambda$, ... $2mH-\lambda$, $2mH+\lambda$,

und macht dieselben Schlüsse, wie in Nro. 506, so findet man die Zahl $\triangle = 2m$, also $\mu = m$; folglich hat die gegebene Gleichung m Wurzeln und nicht weiter.

**510.** Wir übergehen hier das Verfahren, wie der Ueberschuß $\triangle$ für einen gegebenen Umfang gefunden wird, und verweisen in Betreff dieses Punktes auf das Journal de Mathématiques von Liouville, Aug. 1836.

## Siebzehntes Kapitel.

### Einige ausgewählte Aufgaben.

---

**511.** Aufgabe I. Die Gleichung eines Kegelschnitts zu finden, der durch fünf gegebene Punkte geht.

Man wähle die Coordinaten-Axen so, daß jede derselben zwei der gegebenen Punkte enthalte, und bezeichne die Ordinaten der auf der Linie der y (Fig. 230) liegenden Punkte A und B mit $y'$ und $y''$, die Abscissen der auf der Linie der x liegenden Punkte C und D mit $x'$ und $x''$, und die Coordinaten des fünften Punktes E mit $x'''$ und $y'''$.

Nun werden die Bedingungen der Aufgabe ausgedrückt, indem man in der allgemeinen Gleichung

$$[A] \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

für x und y nach einander die Coordinaten jedes dieser Punkte setzt. So erhält man die fünf Gleichungen

$$Ay'^2 + Dy' + F = 0, \quad Ay''^2 + Dy'' + F = 0$$
$$Cx'^2 + Ex' + F = 0, \quad Cx''^2 + Ex'' + F = 0$$
$$Ay'''^2 + Bx'''y''' + Cx'''^2 + Dy''' + Ex''' + F = 0.$$

Die Coefficienten der Gleichung [A] sind hier die unbekannten Größen der Aufgabe. Unter denselben ist immer eine, welche willkührlich bleibt: nehmen wir an, diese sei F, und dividiren alle diese Gleichungen durch F, so findet man

$$\frac{A}{F} = \frac{1}{y'y''}, \quad \frac{D}{F} = \frac{-y'-y''}{y'y''}, \quad \frac{C}{F} = \frac{1}{x'x''}, \quad \frac{E}{F} = \frac{-x'-x''}{x'x''},$$
$$\frac{B}{F} = -\frac{1}{x'''y'''}\left(\frac{y'''(y'''-y''-y')}{y'y''} + \frac{x'''(x'''-x''-x')}{x'x''} + 1\right).$$

Dividirt man auch die Gleichung [A] durch F, und setzt dann diese Werthe für die Coefficienten, so erhält man die verlangte Gleichung.

Wenn unter den gegebenen Punkten keine drei in gerader Linie liegen, so ist keine der Größen $x'$, $x''$, $y'$, $y''$, $x'''$, $y'''$ gleich Null; also sind die vorigen Verhältnisse weder unendlich noch unbestimmt. Ueberdieß hat jedes derselben nur einen einzigen Werth; folglich kann man durch fünf Punkte, von denen nie drei in gerader Linie liegen, immer einen Kegelschnitt ziehen, aber nur einen einzigen.

**512.** Anstatt der Bedingung, daß die Curve durch zwei Punkte geht, kann man die setzen, daß sie eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt. Soll z. B. der Kegelschnitt die Gerade Oy im Punkte A berühren, so setzt man in den vorigen Formeln $y'' = y'$.

**513.** Will man nun die Aufgabe sogleich mit dieser neuen Bedingung behandeln, so muß man in [A] zuerst $x = 0$ setzen, dann ist

$$Ay^2 + Dy + F = 0, \quad \text{woraus } y = -\frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF};$$

dann setzt man diese beiden Werthe gleich $y'$, und erhält so die beiden Gleichungen

$$D^2 - 4AF = 0 \text{ und } -\frac{D}{2A} = y'.$$

**514.** Soll der Kegelschnitt eine Parabel werden, so muß

$$B^2 - 4AC = 0$$

sein, und es sind nur vier Bedingungen zur Bestimmung der Curve nothwendig. Auch kann man diese Voraussetzung sogleich in der Gleichung [A] ausdrücken, indem man (Nro. 233) für die drei ersten Glieder ein Quadrat nimmt; dann hat die Gleichung folgende, nur den Parabeln zukommende Form

$$A^2y^2 + 2ACxy + C^2x^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Aufgabe II. Es seien (Fig. 231) zwei Winkel RAR' und SBS' gegeben, die man um ihre Scheitel so dreht, daß die Schenkel AR' und BS' sich immer auf einer gegebenen Geraden oder Directrix LL' schneiden: man soll die Gleichung der Curve finden, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der beiden andern Schenkel entsteht.

Man nehme die Abscissen auf der Geraden xx', welche durch die Scheitel A und B geht, und die Ordinaten auf der Senkrechten Ay. Da die Directrix LL' gegeben ist, so sei ihre Gleichung

$$y = \alpha(x - \beta),$$

wo $\alpha$ und $\beta$ bekannte Größen sind.

Man setze ferner

$$AB = d, \text{ tang } RAR' = a, \text{ und tang } SBS' = b.$$

Nun denke man sich die Winkel in einer beliebigen Lage, wo sich die Schenkel AR und BS in M schneiden, und die Schenkel AR' und BS' die LL' in demselben Punkte N treffen. Die Coordinaten von M seien x und y, die von N seien x', y'. Nun sind drei Bedingungen auszudrücken: 1) daß der Punkt N auf der Linie LL' liegt; 2) daß die Tangente des Winkels MAN gleich a, und 3) die des Winkels MBN gleich b ist.

So erhält man die drei Gleichungen

$$y' = \alpha (x' - \beta),$$

$$\frac{y'x - x'y}{xx' + yy'} = a,$$

$$\frac{y'(x - d) - y(x' - d)}{(x - d)(x' - d) + yy'} = b,$$

und man darf nur noch die Variablen x' und y' eliminiren, um die Gleichung des gesuchten Orts zu erhalten. Dieser Ort ist eine Curve der zweiten Ordnung, denn nach der Elimination ergibt sich folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$\left[(a-b)\alpha-(a\alpha+1)\frac{d}{\beta}\right]y^2 + \left[(a-b)\alpha+b(\alpha-a)\frac{d}{\beta}\right]x^2$$

$$-\left[(ab-1)\alpha+a+b\right]\frac{d}{\beta}xy - \left[(ab+1)\alpha d-b(a\alpha+1)\frac{d^2}{\beta}\right]y$$

$$-\left[(a-b)\alpha d+b(\alpha-a)\frac{d^2}{\beta}\right]x = 0:$$

**516.** Diese Gleichung ist zu verwickelt, um leicht zu erkennen, ob sie jede der drei Curven geben kann. Folgendes ist indessen ein besonderer, beachtungswerther Fall, der alle Zweifel hebt.

Man nehme die Directrix LL' senkrecht auf AB, den Winkel

$$RAR' = 90^0, \text{ und } SBS' = 0,$$

so ist

$$\alpha = \infty, \quad a = \infty, \quad b = 0.$$

Ehe wir jedoch diese Annahmen in die Gleichung setzen, dividire man dieselbe vorher durch $2\alpha$; dann ergibt sich

$$(\beta - d)y^2 + \beta x^2 - d\beta x = 0;$$

welche Gleichung, so speziell sie auch ist, noch alle drei Curven darstellen kann. Um eine Parabel daraus abzuleiten, dividire man durch d, und setze dann $d = \infty$.

**517.** Kehren wir zur allgemeinen Gleichung zurück. Derselben wird Genüge geleistet durch $x = 0$ und $y = 0$; was beweist, daß der Punkt A der Curve angehört. Man hätte auch den Ursprung der Ordinaten in den Punkt B versetzen können, und hätte dann gefunden, daß die Curve auch durch diesen Punkt geht.

Nach der Aufgabe muß die Curve durch A und B gehen, und es muß sogar die Tangente an jeden ihrer Punkte bestimmt werden können. Denn unter den Lagen, die der Winkel SBS′ einnehmen kann, ist eine, wo BS auf Bx′ fällt, wie Fig. 232 zeigt. Nun sei RAR′ die entsprechende Lage des andern Winkels, so müssen sich offenbar RA und SB im Punkte A schneiden; folglich liegt dieser Punkt auf der Curve. Außerdem sieht man, daß die Linie AR eine Tangente sein muß, denn man kann sie als eine Secante betrachten, deren beide Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammengefallen sind.

Alles, was vom Punkte A gesagt wurde, läßt sich auch auf B anwenden. Nimmt man also an (Fig. 233), der Schenkel AR des Winkels RAR′ liege auf Ax′, und SBS′ sei die entsprechende Lage des andern Winkels, so ist BS im Punkte B Tangente an der Curve.

**518.** *Aufgabe III. Man soll einen Kegelschnitt, von welchem fünf Punkte gegeben sind, durch Punkte oder in einer stetigen Bewegung beschreiben, und dann die Art und die Elemente dieser Curve geometrisch bestimmen.*

Aus der vorigen Aufgabe haben wir ersehen, daß, wenn man zwei Winkel um ihre Scheitel dreht, so daß zwei Schenkel sich immer auf einer geraden Linie schneiden, der Durchschnittspunkt der beiden andern Schenkel eine Curve beschreibt, die durch die Scheitel der beiden Winkel geht. Offenbar lassen sich so zur Erzeugung der Curve so viel Punkte beschreiben, als man will, oder läßt sie sich sogar durch eine stetige Bewegung zeichnen. Es handelt sich also darum, die beiden Winkel und die Directrix so zu bestimmen, daß der Kegelschnitt durch die fünf gegebenen Punkte A, B, C, D, E (Fig. 234) geht.

Man ziehe durch zwei dieser Punkte A und B die Gerade xx′, ziehe AC und BC, und nehme CAx′ und CBx′ als die beweglichen Winkel. Nun drehe man diese Winkel, daß die Schenkel AC und BC zuerst auf AD und BD, dann auf AE und BE zu liegen kommen; und nehme an, die Schenkel Ax′ und Bx′ schneiden sich nach der ersten Drehung in L, und nach der zweiten in L′; dann ziehe man LL′ und nehme sie als Directrix.

Nach der Construction muß offenbar, wenn die Winkel sich um ihre Scheitel drehen, während sich ihre Schenkel Ax′ und Bx′ fortwährend auf der Geraden LL′ treffen, der Durchschnittspunkt der Schenkel AC und BC eine Curve beschreiben, welche durch die Punkte C, D, E geht, außerdem weiß man, daß sie ein Kegelschnitt ist und auch durch die Punkte A und B gehen muß. Diese Curve leistet also der Aufgabe Genüge, und zwar ist es die einzige, denn durch fünf gegebene Punkte kann man nur einen Kegelschnitt beschreiben (Nro. 511).

**519.** Um die Art der Curve zu erkennen, erinnere man sich, daß ihre Tangenten in A und B (Nro. 517) gefunden werden können; auch ist zu bemerken, daß man anstatt B den Punkt C als Scheitel eines der beiden Winkel nehmen, und dann die Tangente in C finden kann. Es seien also (Fig. 235) AG, BG, CH diese drei Tangenten, von denen die erste die zwei andern in G und H schneidet. Im Allgemeinen treffen die an eine Curve der zweiten Ordnung durch die Endpunkte einer Sehne gezogenen Tangenten den Durchmesser, der durch die Mitte dieser Sehne geht, in demselben Punkte: zieht man also durch die Mittelpunkte P und Q der Sehnen AB und AC, und durch die Punkte G und H die Geraden GG′ und HH′, so erhält man zwei Durchmesser des Kegelschnitts. Sind diese Durchmesser parallel, so ist die Curve eine Parabel; schneiden sie sich in einem Punkte O, der von H aus auf der andern Seite von AC liegt, so ist sie eine Ellipse; und sie ist eine Hyperbel, wenn die Punkte O und H auf derselben Seite von AC liegen. Siehe Fig. 236 und 237.

**520.** Bestimmen wir für jeden Fall die Elemente der Curve.

Soll dieselbe eine Parabel (Fig. 238) sein, so zieht man die Durchmesser AA′ und CC′ parallel mit GG′, macht die Winkel HAF und HCF beziehungsweise gleich GAA′ und ICC′, dann ist der Punkt F, wo sich AF und CF schneiden, der Brennpunkt der Parabel (Nro. 438). Verlängert man AA′ um AK gleich dem Radius-Vector AF, und errichtet KK′ senkrecht auf AA′, so hat man die Directrix der Parabel (Nro. 425). Der Brennpunkt und die Directrix sind also die Elemente dieser Curve.

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse (Fig. 239), so ziehe man durch den Mittelpunkt die OK parallel mit CA; dann geben die Linien OH und OK die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser. Um ihre Länge zu erhalten, nehmen wir die Formel (Nro. 322) $OH = \frac{a'^2}{OQ}$, in welcher man a′ als den in der Richtung von OH liegenden halben Durchmesser betrachten kann, und man erhält aus diesem Ausdruck $a' = \sqrt{OH \times OQ}$.

Bezeichnet man den mit a′ conjugirten halben Durchmesser mit b′, zieht CK parallel mit OQ, und verlängert OK bis I, so hat man auch $b' = \sqrt{OK \times OI}$. Also erhält man a′ und b′ durch Construction mittlerer Proportionalen.

Sind zwei conjugirte halbe Durchmesser a′ und b′, und der von ihnen eingeschlossene Winkel HOI bekannt, so findet man leicht die halben Axen. Denn bezeichnet man die halben Axen mit a und b, und setzt $HOI = \gamma$, so ist (Nro. 351)

$$ab = a'b' \sin\gamma, \quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Addirt man zuerst die doppelte erste Gleichung zur zweiten, und zieht ebenso ab, so ist

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\gamma$$
$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\gamma,$$

und daher

$$a+b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\gamma},$$
$$a-b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\gamma}.$$

Diese Wurzelwerthe lassen sich nach den Eigenschaften der schiefwinkligen Dreiecke elegant construiren, und wenn A und B die dadurch vorgestellten Linien sind, so ist

$$a = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B, \quad b = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B.$$

Um die noch unbekannte Richtung der Axen zu bestimmen, darf man nur die Brennpunkte der Ellipsen suchen. Nun haben (Nro. 332) bekanntlich die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Senkrechten zum geometrischen Ort einen Kreis, der aus dem Mittelpunkt der Ellipse mit der halben großen Axe als Halbmesser beschrieben wird: indem man daher diesen Kreis beschreibt, und auf den Tangenten AH und HC in den Punkten, wo er diese schneidet, Senkrechte errichtet, erhält man die Brennpunkte F und F'.

Soll endlich der Kegelschnitt eine Hyperbel sein, so bestimmt man zuerst, wie bei der Ellipse, zwei conjugirte Durchmesser; dann construirt man die Asymptoten (Nro. 406), und hierauf die Axen (Nro. 409).

**521.** Aufgabe IV. Die Curve zu finden, die durch den Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel fortwährend Tangenten an einem Kegelschnitt sind, beschrieben wird.

Betrachten wir zuerst die Ellipse mit ihrer Gleichung

[e] $$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Man bezeichne die Coordinaten der Punkte, wo die Ellipse von den Schenkeln des rechten Winkels berührt wird, mit x', y' und x'', y'', so müssen diese der Gleichung [e] genügen: es ist also

[1] $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, [2] $a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$.

Es seien x und y die Coordinaten der Winkelspitze, so müssen sie den Gleichungen der Tangenten Genüge leisten, und man hat daher auch (Nro. 319)

[3] $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$, [4] $a^2yy'' + b^2xx'' = a^2b^2$.

Da endlich die beiden Tangenten einen rechten Winkel mit einander bilden, und die trigonometrischen Tangenten der Winkel, die sie mit der Axe der x machen, $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ und $-\frac{b^2x''}{a^2y''}$ sind (Nro. 319), so ist noch

$$\frac{b^4x'x''}{a^4y'y''} + 1 = 0. \qquad [5]$$

Man hat also, um alle Bedingungen der Aufgabe auszudrücken, fünf Gleichungen. Dieselben enthalten sechs Variable x, y, x', y', x'', y''; und um die gesuchte Curve zu erhalten, muß man aus diesen fünf Gleichungen die vier Größen x', y', x'', y'' eliminiren.

Zuerst eliminire man y' aus [1] und [3], dann ergibt sich

$$x'^2 - \frac{2a^2b^2x}{a^2y^2 + b^2x^2}x' + \frac{a^4(b^2 - y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2} = 0.$$

Eliminirt man y'' aus [2] und [4], so findet man offenbar eine der vorigen ganz ähnliche Gleichung nach x''; was beweist, daß x' und x'' die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind. Nun ist aber das letzte Glied gleich dem Produkt der beiden Wurzeln, also

$$x'x'' = \frac{a^4(b^2 - y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

Beginnt man die Rechnung mit der Elimination von x', so ergibt sich auf dieselbe Weise

$$y'y'' = \frac{b^4(a^2 - x^2)}{a^2y^2 + b^2x^2},$$

und setzt man diese Werthe in die Gleichung [5], so ergibt sich für die gesuchte Curve

$$y^2 + x^2 = a^2 + b^2:$$

welche Gleichung den Kreis vorstellt, der um das auf den Axen der Ellipse construirte Rechteck (Fig. 240) beschrieben wird.

Um die Aufgabe in Beziehung auf die Hyperbel, deren Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

ist, aufzulösen, darf man nur überall $b^2$ in $-b^2$ verwandeln; dann erhält man

$$y^2 + x^2 = a^2 - b^2,$$

welche Gleichung wieder einen Kreis vorstellt.

Ist $b = a$, so reducirt sich dieser Kreis auf einen einzigen Punkt, und er wird imaginär, wenn $b > a$ ist.

Wendet man die bei der Ellipse angestellten Rechnungen auf die Parabel an, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist, so findet man für die durch die Spitze des rechten Winkels beschriebene Linie $x = -\frac{1}{2}p$, d. h. die Directrix, wie dieß (Nro. 443) vorauszusehen war.

**522.** Aufgabe V. Es sei (Fig. 241) eine Ellipse gegeben, man trage auf der großen Axe vom Mittelpunkt aus eine Länge AB + BD gleich der halben Summe der Axen an, und beschreibe auf AD als Durchmesser einen Kreis; durch den Endpunkt der großen Axe, der dem Mittelpunkt des Kreises am nächsten liegt, ziehe man in diesem Kreise die Sehne HBH', und durch die Endpunkte dieser Sehne die Durchmesser der Ellipse AR und AR'. Nun denke man sich, die Punkte H und H' bewegen sich auf AR und AR', ohne daß HH' seine Größe ändert: so beschreibt der Punkt dieser Linie, der zuerst mit dem Endpunkt B der großen Axe der Ellipse zusammenfiel, eine Curve, deren Gleichung gesucht werden soll.

Es sei HH' (Fig. 242) eine beliebige Lage der Geraden, die sich im Winkel RAR' bewegt, und M die des Punktes, der die Curve beschreibt. Man nehme AR und AR' als Coordinaten-Axen, ziehe MP und MQ parallel mit diesen Axen, und mache

$$AP = x', \quad MP = y', \quad MH = c, \quad MH' = d.$$

Wegen der Parallelen ist nun

$$AH : c + d = x' : d, \quad \text{und} \quad AH' : c + d = y' : c;$$

also

$$AH = \frac{(c+d)\,x'}{d}, \quad AH' = \frac{(c+d)\,y'}{c}.$$

Im Dreieck AHH' ist aber

$$AH^2 + AH'^2 - 2AH \times AH' \times \cos RAR' = HH'^2.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe der Linien, wo

$$HH' = c + d, \quad \text{und macht} \quad RAR' = \theta,$$

so ergibt sich

$$[1] \qquad \frac{y'^2}{c^2} + \frac{x'^2}{d^2} - \frac{2x'y'\cos\theta}{cd} = 1;$$

und man sieht schon, daß die gesuchte Curve eine Ellipse ist, die mit der gegebenen Ellipse gleichen Mittelpunkt hat.

Man setze (Fig. 241)

$$AB = a, \quad BD = b, \quad \text{Winkel } BAR = \alpha,$$

und suche die Werthe für c, d, cos $\theta$. Zu diesem Zweck ziehe man DH, ferner BI parallel mit DH, und BK parallel mit AH. Nun sind die Dreiecke BAI und BDK rechtwinklig, und geben

$$HK = BI = a \sin\alpha, \quad BK = b \cos\alpha.$$

Dann gibt das rechtwinklige Dreieck BHK

$$c = BH = \sqrt{HK^2 + BK^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha};$$

und vermöge der Eigenschaften des Kreises ist

$$d = BH' = \frac{AB \times BD}{BH} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Um jetzt $\cos \theta$ zu finden, berechne man zuerst $\sin BAR'$ und $\cos BAR'$. Bezeichnet man $BAR'$ mit $\alpha'$, und beachtet, daß

$$BAR' = BHK,$$

so ergibt sich für das Dreieck HKB

$$\sin \alpha' = \frac{BK}{BH} = \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha' = \frac{HK}{BH} = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}};$$

aber

$$\cos \theta = \cos (\alpha + \alpha') = \cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha';$$

also ist

$$\cos \theta = \frac{(a - b) \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Substituirt man in der Gleichung [1] die Werthe für c, d, $\cos \theta$, so ergibt sich für die gesuchte Gleichung

$$[2] \qquad \frac{y'^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} + \frac{x'^2 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)}{a^2 b^2} - \frac{2x'y' (a - b) \sin \alpha \cos \alpha}{ab \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} = 1.$$

Um diese Curve mit der gegebenen Ellipse leichter zu vergleichen, beziehe man auch diese letztere auf AR und AR'. Auf ihre Axen BB' und CC' bezogen, ist ihre Gleichung

$$[e] \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

und die Formeln, mittelst welcher man von rechtwinkligen Ordinaten auf schiefwinklige mit gleichem Anfangspunkt übergeht, sind:

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \quad y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha',$$

wo $\alpha'$ denselben Winkel $BAR'$ wie oben bezeichnet, aber

$$\alpha = 360^0 - BAR$$

ist; daher darf man nur, wenn BAR fortwährend mit $\alpha$ bezeichnet werden soll, in den vorigen Formeln $\alpha$ in $360 - \alpha$ verwandeln. Dann ändert

sich $\cos\alpha$ nicht, $\sin\alpha$ wird $-\sin\alpha$, und indem man für $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ ihre Werthe setzt, erhält man

$$x = x'\cos\alpha + \frac{ay'\sin\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}},$$

$$y = -x'\sin\alpha + \frac{by'\cos\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}.$$

Führt man die Substitution dieser Werthe in der Gleichung [e] aus, so ergibt sich ein mit der Gleichung [2] identisches Resultat; also ist die gesuchte Curve keine andere als die gegebene Ellipse.

**523.** Aufgabe VI. Es sei (Fig. 243) ein Winkel $yOx$, und zwei Punkte A und B auf seinen Schenkeln gegeben; man bewege eine Gerade ST so herum, daß die Linien OA und OB immer in der Proportion

$$AP : PO = OQ : QB$$

geschnitten werden: die fortgehenden Durchschnittspunkte der in diesen auf einander folgenden Lagen betrachteten Geraden ST mit sich selbst bestimmen eine Curve, an welcher ST immer Tangente ist, und deren Gleichung gesucht werden soll.

Man theile AO und OB in m gleiche Theile, wo m eine beliebig große Zahl sein kann, und nehme an, AP und OQ enthalte jede eine Anzahl n dieser Theile, und ziehe PQ. Ferner ziehe man die Gerade P'Q', welche auf AO und OB einen Theil weiter, als PQ abschneidet. Nun schneiden sich PQ und P'Q' in einem Punkte M, dessen Lage von den Zahlen m und n abhängt. Eliminirt man zuerst die unbestimmte n aus den Gleichungen dieser zwei Geraden, so bestimmt die sich ergebende Gleichung den geometrischen Ort, der die Eckpunkte des Polygons MM'M'' ... enthält, welches durch die auf einander folgenden Lagen der Linie PQ gebildet wird, wenn man die Punkte P und Q alle Theilungspunkte der Linien AO und OB durchlaufen läßt. Um die Stetigkeit der Bewegung darzustellen, setze man $m = \infty$, und man erhält die gesuchte Curve.

Man nehme die beiden Linien Ox und Oy als Coordinaten, und setze

$$OA = a, \quad OB = b.$$

Nach dem Vorigen hat man

$$AP = \frac{na}{m}, \quad OP = \frac{(m-n)\,a}{m}, \quad OQ = \frac{nb}{m},$$

und hieraus findet sich leicht als Gleichung von PQ

[1] $$m(m-n)\,ay + mnbx = n(m-n)\,ab.$$

Verwandelt man n in $n+1$, so erhält man die Gleichung der Linie P'Q', nämlich

[2] $m(m-n-1)\,ay + m(n+1)\,bx = (n+1)(m-n-1)\,ab.$

Nun ist n aus [1] und [2] zu eliminiren. Um die Rechnung leichter auszuführen, ziehe man zuerst [2] von [1] ab; dieß gibt

$$may - mbx = (2n-m+1)\,ab;$$

hieraus erhält man

$$n = \frac{m(ay-bx) + (m-1)\,ab}{2ab},$$

und daher

$$m - n = \frac{-m(ay-bx) + (m+1)\,ab}{2ab}.$$

Substituirt man diese Werthe in [1], so ergibt sich als Resultat

$$(ay-bx-ab)^2 - 4ab^2x - \frac{a^2b^2}{m^2} = 0.$$

Diese Gleichung gibt die Curve, welche die Eckpunkte des Polygons MM'M'' .... enthält. Um auf die gesuchte Curve zu kommen, muß man $m = \infty$ setzen, dann ist

$$(ay - bx - ab)^2 - 4ab^2x = 0,$$

welche Gleichung eine Parabel vorstellt. Die Curve muß durch A und B gehen, und OA und OB zu Tangenten haben; denn bei $y = 0$ gibt die Gleichung zwei Werthe für x, deren jeder $= a$, und bei $x = 0$ zwei Werthe für y, deren jeder $= b$ ist.

Kennt man zwei Punkte der Parabel und die Tangenten an diesen Punkten, so lassen sich die Elemente dieser Curve (Nro. 520) leicht construiren. Will man dieselben durch die Rechnung finden, so suche man zwei rechtwinklige Axen, welche die Gleichung der Parabel auf die Form $y^2 = 2px$ bringen, was durch eine einfache Transformation der Coordinaten geschieht.

**524.** Wir schließen diesen Theil mit folgenden Aufgaben, zu denen der Leser selbst die Figuren zeichnen mag.

I. Lehrsatz. Nimmt man die Kreise einer Kugel als Grundflächen verschiedener Kegel, und den Endpunkt eines Halbmessers als gemeinschaftliche Spitze dieser Kegel, so schneidet jede auf dem Halbmesser senkrechte Ebene die Kegel in Kreisen.

II. Lehrsatz. Zieht man an die Ellipse oder Hyperbel eine Tangente, so ist das Rechteck aus den Theilen derselben, welche zwischen dem Berüh-

rungspunkt und zwei conjugirten Durchmessern liegen, so groß als das Quadrat des mit dieser Tangente parallelen halben Durchmessers.

III. Lehrsatz. Zieht man durch zwei Punkte A und B einer Linie der zweiten Ordnung eine Secante, und in dieser Curve eine Reihe von parallelen Sehnen, welche die Secante schneiden, so steht das Rechteck aus den entsprechenden Abschnitten der Secante in einem constanten Verhältniß.

IV. Lehrsatz. Wenn eine der Länge nach constante Gerade sich so bewegt, daß ihre Endpunkte immer auf die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels treffen, so beschreibt bekanntlich (Nro. 522) ein beliebig auf dieser Geraden angenommener Punkt eine Ellipse. Man betrachte nun diese Gerade in irgend einer ihrer Lagen, errichte dann in ihren beiden Endpunkten Senkrechte auf die Schenkel des gegebenen Winkels, und ziehe durch den beschreibenden Punkt eine Normale an die beschriebene Curve: so treffen sich diese Normale und die beiden Senkrechten in demselben Punkte.

Anstatt der Geraden, von welchen der Gang der beweglichen Linie abhängt, setze man zwei Polygone, dann für diese Polygone zwei Curven: so muß offenbar der Satz noch stattfinden, wenn man nur, anstatt der auf den leitenden Geraden errichteten Senkrechten die sie ersetzenden Normalen an den Curven nimmt.

V. Lehrsatz. Bei zwei concentrischen Linien der zweiten Ordnung ist die Summe der Quadrate aus zwei beliebigen conjugirten Durchmessern der ersten Linie beziehungsweise dividirt durch die Quadrate der auf den Richtungen dieser Durchmesser liegenden zwei Durchmesser der zweiten Curve eine constante Größe.

Nimmt man als zweite Curve einen Kreis, so findet man wieder einen bekannten Satz (Nro. 350, 400).

VI. Aufgabe. In der Ebene eines Kegelschnitts AMM'A' sei ein Punkt O gegeben; man ziehe durch diesen Punkt Secanten, wie OMM', welche die Curve in M und M' trifft; dann nehme man eine besondere Secante OAA', welche die Curve in A und A' trifft, und ziehe die Geraden AM, A'M', deren Verlängerungen sich in N, und die Geraden AM, A'M', die sich in N' schneiden. Nun soll der geometrische Ort der Punkte N und N' gesucht werden.

VII. Aufgabe. Es sei in der Ebene eines Kegelschnitts ein Punkt O gegeben; man ziehe eine beliebige Secante OMN, welche diese Curve in M und N trifft, dann theile man dieselbe so, daß sich

$$OM : ON = PM : PN$$

verhält: es soll der geometrische Ort der Punkte P gesucht werden.

VIII. Aufgabe. Den geometrischen Ort der Punkte zu finden, welche die durch einen gegebenen Punkt gezogenen und zwischen zwei gegebenen Geraden liegenden Linien in stetiger Proportion theilen.

IX. Aufgabe. In der Ebene eines Polygons den Ort der Punkte zu finden, so daß die Summe der Quadrate aus den Abständen jedes derselben von den Eckpunkten einem gegebenen Quadrate gleich sei.

X. Aufgabe. In der Ebene eines regulären Polygons die Linie zu finden, so daß die Quadrate aus den Abständen jedes Punktes dieser Linie von den Seiten des Polygons zusammen einem gegebenen Quadrate gleich seien.

XI. Aufgabe. Es sei ein Parallelogramm und eine Gerade gegeben; man soll mit dem Lineal und dem Zirkel die Punkte construiren, in welchen die Gerade von einer Ellipse, welche die Seiten des Parallelogramms in ihren Halbirungspunkten berühren soll, geschnitten wird.

XII. Aufgabe. Es sei ein Dreieck DEF und ein Punkt O gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Gerade OABC ziehen, welche die drei Seiten DE, EF und DF oder ihre Verlängerungen in drei Punkten A, B, C so schneidet, daß man erhält $\frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

XIII. Aufgabe. Will man durch einen gegebenen Punkt eine Normale an die Parabel ziehen, so findet man, daß die Aufgabe vom dritten Grad abhängt, und je nach der Lage des gegebenen Punktes drei Auflösungen, oder zwei, oder eine zuläßt. Nun bilden die Punkte, von welchen aus zwei Normalen gezogen werden können, einen geometrischen Ort, dessen Gleichung verlangt wird.

XIV. Lehrsatz. In einer Curve des zweiten Grads ziehe man eine beliebige Sehne MM′ und den Durchmesser OI, der diese Sehne halbirt: fällt man nun vom Brennpunkt F, die Senkrechte FK auf M′M″, so schneidet diese Senkrechte die nächstliegende Directrix in demselben Punkt wie der Durchmesser OI.

XV. Lehrsatz. Zieht man durch den Brennpunkt F einer Curve der zweiten Ordnung zwei beliebige Radien-Vectoren FM und FM′, und durch ihre Endpunkte M und M′ eine Secante, bis sie die nächstliegende Directrix in R trifft: so halbirt die diesen Punkt mit dem Brennpunkt verbindende Gerade RF den Winkel, der von einem der Radien-Vectoren und der Verlängerung des andern gebildet wird.

Die zwei letzten Sätze sind einem Werke Jakob's entnommen, worin sich eine große Zahl ausgewählter Uebungsaufgaben finden.

# Dritter Theil.

# Analytische Geometrie im Raume.

## Erstes Kapitel.

### Von den Projectionen der Linien und Flächen.

#### Linear-Projection eines Systems von Geraden.

**525.** Es sei (Tafel X, Fig. 1) OX eine Axe oder unendliche Gerade, und AB eine Gerade von bestimmter Länge, welche nicht nothwendig in derselben Ebene mit OX zu liegen braucht: zieht man AR parallel mit OX, so ist BAR der Winkel, den die AB mit der Axe OX macht, und fällt man auf diese Axe die Senkrechten AA′ und BB′, so heißt der Abstand A′B′ die Projection von AB auf OX.

Man setze

$$\text{Winkel BAR} = \alpha, \quad AB = l, \quad A'B' = p;$$

ziehe parallel mit AA′ die B′D, welche AR in D trifft, und ziehe BD, so ist das Dreieck ABD rechtwinklig, und man hat

$$[1] \qquad p = l \cos \alpha;$$

also ist die Projection einer Geraden auf eine Axe gleich dem Product aus dieser Geraden und dem Cosinus des von ihr und der Axe eingeschlossenen Winkels.

**526.** Betrachten wir ein System von mehreren auf einander folgenden Geraden, wie ABCD (Fig. 2), und legen durch die Eckpunkte A, B, C, D senkrechte Ebenen auf die Axe OX: so sind die Punkte A′, B′, C′, D′, wo dieselben die Axe schneiden, die Projectionen dieser

Eckpunkte, und die Abstände A'B', B'C', C'D' sind die Projectionen der auf einander folgenden Seiten AB, BC, CD. Zieht man die das Polygon schließende Gerade AD, die wir *resultirende Linie* oder einfach *Resultante* nennen wollen, so ist A'D' selbst die Projection dieser Geraden. Bezeichnet man die auf einander folgenden Seiten mit l, l', l''; die Winkel, welche sie mit den mit OX parallel gezogenen, und wie die Figur zeigt, alle in derselben Richtung laufenden Geraden AR, BR', CR'' einschließen, mit $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$; die Resultante AD mit L, und den Winkel DAR mit $\varphi$: so lassen sich die Projectionen dieser verschiedenen Linien ausdrücken durch

$$l \cos \alpha, \quad l' \cos \alpha', \quad l'' \cos \alpha'', \quad L \cos \varphi.$$

Sind nun die Winkel $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ spitze, so sind alle Cosinus, und daher auch diese Producte positiv; überdieß ist offenbar die Summe der Projectionen A'B', B'C', C'D' gleich A'D'; also ist

$$[2] \qquad l \cos \alpha + l' \cos \alpha' + l'' \cos \alpha'' = L \cos \varphi.$$

Kommen aber stumpfe Winkel vor, und ist z. B. DCR'' oder $\alpha''$ (Fig. 3) stumpf, so muß man, um A'D' zu erhalten, die Projection C'D' von den übrigen abziehen. Dann ist aber auch $l'' \cos \alpha''$ ein negatives Product: folglich gibt die vorige Formel wieder den Werth für A'D' oder $L \cos \varphi$.

Ueberhaupt sieht man leicht, wie groß auch die Zahl der zwischen den äußersten Eckpunkten enthaltenen Seiten ist, daß man, um die Projection der Resultante zu bilden, die Projectionen mit stumpfen Winkeln von denen, die spitzigen Winkeln entsprechen, abziehen muß; und da der Ausdruck für jede Projection an und für sich additiv oder subtractiv ist, je nachdem der Winkel spitzig oder stumpf ist, so folgt daraus, daß die Formel [2] immer unbeschränkte Geltung hat.

Diese Formel ist im Grunde nur die Umschreibung des schon an sich klaren Grundsatzes, *daß die Summe der Projectionen mehrerer auf einander folgender Geraden auf eine beliebige Axe gleich der Projection der resultirenden Linie ist.*

Dieser Grundsatz findet seine Anwendung bei der Umformung der Coordinaten im Raume, und wer die Methoden zur Anwendung der Analyse auf Flächen schnell kennen zu lernen wünscht, kann nun sogleich zum folgenden Kapitel übergehen.

**527.** Wenn die auf einander folgenden Geraden, sie mögen in derselben Ebene liegen oder nicht, ein geschlossenes Polygon bilden, so ist $L = 0$, und daher $L \cos \varphi = 0$; *also ist in jedem geschlossenen Polygon die Summe der Projectionen seiner Seiten auf eine beliebige Axe gleich Null.*

In einem geschlossenen Polygon ist eine Seite die Resultante der andern Seite, und der letzte Satz scheint mit dem vorhergehenden nicht über-

einzustimmen; die Schwierigkeit verschwindet aber, indem man beachtet, daß in den beiden Fällen die von dieser Seite mit der Projections-Axe gebildeten Winkel Supplemente zu einander sind. So ist in Fig. 2, wenn man AD als Resultante betrachtet, DAR der von dieser Linie und der Projections-Axe gebildete Winkel, und betrachtet man AD als Seite des Polygons, so sind ADR''', BAR, CBR', DCR'' die von den vorhergehenden Seiten mit der Axe gebildeten Winkel.

**528.** Bringt man die Projections-Axe in verschiedene Lagen, und nimmt sie zuerst parallel mit der Resultante, so ist

$$\varphi = 0, \text{ und } L \cos \varphi = L:$$

welches der größte Werth ist, den dieses Product erhalten kann. Liegt die Axe in einer mit der Resultante senkrechten Ebene, so ist

$$\varphi = 90^0, \text{ und } L \cos \varphi = 0.$$

Bildet endlich die Axe, während sie ihre Lage ändert, fortwährend denselben Winkel mit der Resultante, so bleibt auch das Product $L \cos \varphi$ immer dasselbe. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Summe der Projectionen mehrerer auf einander folgender Geraden ist die möglichst größte, wenn die Projections-Axe mit der Resultante parallel läuft, und diese größte Summe ist so groß als die Resultante selbst.

2) Die Summe der Projectionen ist auf allen mit der Resultante senkrechten Axen gleich Null.

3) Diese Summe bleibt für alle Axen, die mit der Resultante gleiche Winkel bilden, sich gleich.

Bemerkung. Das Vorige läßt sich auch auf ein System getrennter Geraden ausdehnen: dann muß man aber diese Linien parallel mit sich selbst fortbewegt denken, bis sie in ihren Endpunkten zusammentreffen, und so einen Theil von einem Polygon bilden, von welchem die das Polygon schließende Gerade die Resultante bildet.

## Relationen, die sich aus den Projectionen auf verschiedene Axen ergeben.

**529.** Es sei OG (Fig. 4) eine gegebene Gerade, und OX, OY, OZ drei unter sich senkrechte Axen; legt man durch den Punkt G Ebenen parallel mit den Ebenen YOZ, XOZ, XOY, so erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit der Diagonale OG, dessen zusammenstoßende Kanten OA, OB, OC die Projectionen von OG auf die drei Axen sind. Nun ist das Quadrat der Diagonale des Parallelepipedons gleich der Summe der

Quadrate aus den drei zusammenstoßenden Seiten: also ist die Summe der Quadrate aus den Projectionen einer Geraden auf drei rechtwinklige Axen gleich dem Quadrat dieser Geraden.

Um diesen Satz in einer Formel auszudrücken, sei

$$OG = l, \quad OA = p, \quad OB = q, \quad OC = r;$$

dann ist

[3] $$p^2 + q^2 + r^2 = l^2.$$

**530.** Setzt man $OG = 1$, so ist offenbar

$$OA = \cos GOX, \quad OB = \cos GOY, \quad OC = \cos GOZ,$$

folglich erhält man, wenn diese drei Winkel mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet werden,

[4] $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

d. h. die Winkel einer Geraden mit drei rechtwinkligen Axen müssen immer so beschaffen sein, daß die Summe der Quadrate ihrer Cosinus gleich der Einheit ist.

**531.** Nehmen wir nun ein System von Geraden $l, l', l'', \ldots$ die auf einander folgen oder getrennt sein können, und deren Resultante $L$ heiße, und denken uns $l, l', l'', \ldots$ auf drei rechtwinklige Axen projicirt. Addirt man je die auf eine Axe gemachten Projectionen, so erhält man drei Summen, die den Projectionen von $L$ auf dieselben Axen beziehungsweise gleich sein müssen (Nro. 526): bezeichnet man daher die Projectionen von $L, l, l', \ldots$ auf die erste Axe mit $P, p, p' \ldots$; die auf die zweite mit $Q, q, q' \ldots$, und die Projectionen auf die dritte mit $R, r, r' \ldots$, so ist

$$p + p' + \ldots = P, \quad q + q' + \ldots = Q, \quad r + r' + \ldots = R.$$

Nun ist

$$P^2 + Q^2 + R^2 = L^2 \text{ (Nro. 529)};$$

also

[5] $$(p+p'+\ldots)^2 + (q+q'+\ldots)^2 + (r+r'+\ldots)^2 = L^2.$$

Die drei Summen

$$p + p' + \ldots, \quad q + q' + \ldots, \quad r + r' + \ldots$$

ändern sich zugleich mit den rechtwinkligen Axen; die vorige Gleichung beweist aber, daß die Summe ihrer Quadrate eine constante Größe bildet, die bei jeder Lage der drei rechtwinkligen Axen gleich dem Quadrat der Resultante ist.

Wir haben (Nro. 528) gesehen, daß die Richtung der Resultante $L$ mit den Axen, auf welchen die Summe der Projectionen des Systems

l, l', ... ein Maximum beträgt, parallel ist; und daß die Länge L eben dieses Maximum ausdrückt. Nun läßt sich aber die Größe und die Richtung von L leicht bestimmen, wenn man l, l', ..., und die Winkel dieser Geraden mit den drei rechtwinkligen Axen kennt; denn bezeichnet man diese Winkel mit $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha', \beta', \gamma'$; u. s. w., so ist

$$p = l\cos\alpha, \quad p' = l'\cos\alpha', \text{ u. s. w.}$$
$$q = l\cos\beta, \quad q' = l'\cos\beta', \text{ u. s. w.}$$
$$r = l\cos\gamma, \quad r' = l'\cos\gamma', \text{ u. s. w.}$$

also

$$P = l\cos\alpha + l'\cos\alpha' + \text{u. s. w.}$$
$$Q = l\cos\beta + l'\cos\beta' + \text{u. s. w.}$$
$$R = l\cos\gamma + l'\cos\gamma' + \text{u. s. w.}$$

Also sind die drei Projectionen P, Q, R von L bekannt.

Bezeichnet man die unbekannten Winkel, welche L mit den Axen bildet, mit $\varphi, \varphi', \varphi''$, so ist

$$L\cos\varphi = P, \quad L\cos\varphi' = Q, \quad L\cos\varphi'' = R;$$

und außerdem hat man nach Nro. 529 auch

$$L^2 = P^2 + Q^2 + R^2.$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man

$$L = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}, \quad \cos\varphi = \frac{P}{L}, \quad \cos\varphi' = \frac{Q}{L}, \quad \cos\varphi'' = \frac{R}{L}.$$

Die erste Formel gibt die Länge der resultirenden Linie, und die drei andern bestimmen ihre Richtung. Jedoch ist zu beachten, daß, wenn die Projectionen auf parallele Axen einander gleich sind, diese Bestimmungen nicht eine einzige Axe, sondern vielmehr unendlich viele unter sich parallele Axen ergeben.

**532.** Kehren wir wieder zum Parallelepipedon (Fig. 4) zurück, in welchem OG eine gegebene Gerade, und OA, OB, OC die Projectionen dieser Geraden auf drei rechtwinklige Axen sind. Projicirt man diese drei Kanten oder die ihnen gleichen OA, AD, DG auf eine beliebige Gerade OV, so ist offenbar (Nro. 526) die Summe dieser drei Projectionen gleich der Projection von OG auf dieselbe Gerade. *Kennt man also die Projectionen einer Geraden auf drei rechtwinklige Axen, so erhält man ihre Projectionen auf eine beliebige Axe, wenn man diese drei Projectionen auf letztere Axe projicirt, und diese neuen Projectionen addirt.*

Um diesen Satz als Formel darzustellen, denken wir uns wie oben, die Projectionen einer Geraden l auf die drei Axen seien p, q, r, bezeichnen

ihre Projection auf der neuen Axe mit s, und die Winkel dieser Axe mit den rechtwinkligen Axen mit $\lambda, \mu, \nu$; so ist nach dem oben Gesagten

[6] $$s = p \cos \lambda + q \cos \mu + r \cos \nu.$$

Ueberhaupt ist die Summe der Projectionen beliebig vieler Geraden immer gleich der Projection ihrer Resultante, welches auch die Projections-Axen sein mögen (Nro. 526), woraus folgt, daß man die Formel [6] auf eine beliebige Anzahl von Geraden ausdehnen kann.

Sind also P, Q, R die Projectionen eines Systems von Geraden auf drei rechtwinklige Axen, und S ihre Projection auf die neue Axe, so ist

[7] $$S = P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu.$$

**533.** Die Formel [6] führt auch auf eine merkwürdige Relation zwischen den Winkeln. Man bezeichne den Winkel GOV der Geraden l mit der neuen Axe, auf welcher die Projection von l gleich s ist, mit $\theta$, so ist $s = l \cos \theta$: überdieß ist

$$p = l \cos \alpha, \quad q = l \cos \beta, \quad r = l \cos \gamma.$$

Setzt man daher diese Werthe in [6], und läßt den Factor l weg, so ist

[8] $$\cos \theta = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu:$$

vermittelst welcher häufig gebrauchten Formel der Winkel von zwei Geraden gefunden wird, wenn die Winkel, welche jede derselben mit drei rechtwinkligen Axen bildet, bekannt sind.

Setzt man $\cos \theta = 0$, so gibt diese Formel

[9] $$\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = 0;$$

und diese Bedingung muß stattfinden, wenn die beiden Geraden einen rechten Winkel bilden.

Die Formel für $\sin \theta$ ist viel verwickelter; denn es ist

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta;$$

nun ist wegen der oben gefundenen Relation [4]

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\,(\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) = 1;$$

also

$$\sin^2\theta = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)\,(\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu) - (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu)^2,$$

und bei Ausführung der Rechnungen findet man leicht

$$\sin \theta = \sqrt{(\cos\alpha \cos\mu - \cos\lambda \cos\beta)^2 + (\cos\alpha \cos\nu - \cos\lambda \cos\gamma)^2 + (\cos\beta \cos\nu - \cos\mu \cos\gamma)^2}.$$

**534.** Der Grundsatz der Projectionen Nro. 526, Formel [2], führt noch auf sehr merkwürdige Relationen zwischen den Theilen eines schiefen Parallelepipedons, die für die Praxis von großem Nutzen sind.

Es sei Fig. 5 das betreffende Parallelepipedon: man setze

$$OG = l, \quad OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z, \quad GOX = \alpha,$$
$$GOY = \beta, \quad GOZ = \gamma, \quad XOY = \lambda, \quad XOZ = \mu, \quad YOZ = \nu;$$

nun projicire man die gebrochene Linie OADG, oder $x + y + z$, zuerst auf die Diagonale OG, und dann auf jede der drei zusammenstoßenden Kanten OX, OY, OZ. Dadurch erhält man vier Summen, die den Projectionen von OG oder l auf dieselben Linien beziehungsweise gleich sein müssen, und es ergeben sich so die vier Gleichungen:

$$[10] \quad \begin{cases} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l, \\ x + y\cos\lambda + z\cos\mu = l\cos\alpha, \\ x\cos\lambda + y + z\cos\nu = l\cos\beta, \\ x\cos\mu + y\cos\nu + z = l\cos\gamma. \end{cases}$$

Dieß sind die aufzustellenden Relationen; alle andern, die man zwischen den zehn Größen $l, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, oder zwischen einigen derselben etwa noch finden könnte, wären Folgerungen aus diesen. Man kann sich davon schon durch die Bemerkung überzeugen, daß das Parallelepipedon durch seine drei Seiten x, y, z und drei Winkel $\lambda, \mu, \nu$ bestimmt ist; also können dann auch die Diagonale l und die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ bestimmt werden, wozu nur vier Gleichungen nöthig sind.

**535.** Eliminirt man $\alpha, \beta, \gamma$ aus diesen Gleichungen, zu welchem Zwecke man die erste mit l multiplicirt, und dann für $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$ ihre Werthe setzt, so ist

$$[11] \quad l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos\lambda + 2xz\cos\mu + 2yz\cos\nu;$$

diese Formel gibt die Diagonale des Parallelepipedons. Doch findet man sie auch auf andere Weise; denn man ziehe OD, so ergibt das Dreieck ODG für $OG^2$ oder

$$l^2 = OD^2 + z^2 + 2z \cdot OD \cdot \cos COD.$$

Aber aus dem Dreieck OAD erhält man einerseits

$$OD^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\lambda,$$

und anderseits muß das Product $OD \times \cos COD$, das die Projection von OD auf OC ausdrückt, gleich der Summe der Projectionen von OA und AD auf dieselbe Gerade OC sein: also ist

$$OD \times \cos COD = x\cos\mu + y\cos\nu.$$

Substituirt man diese Werthe für $OD^2$ und $OD \times \cos COD$ in den Werth für $l^2$, so ergibt sich wieder die Formel [11].

**536.** Sucht man zwischen den von einer Geraden mit drei schiefen Axen gebildeten Winkeln eine Relation ähnlich der in Nro. 530, so müssen l, x, y, z, oder vielmehr die Verhältnisse $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$, $\frac{z}{l}$ aus den Gleichungen [10] eliminirt werden.

Wird der Winkel zwischen zwei Geraden als Function derjenigen, die sie mit den schiefen Axen bilden, gesucht, so projicire man den Umfang $x + y + z$ und den von OG oder l auf eine andere Gerade OV, und setze dann die beiden Ausdrücke einander gleich. Für

$$VOX = \alpha', \quad VOY = \beta', \quad VOZ = \gamma', \quad GOV = \theta,$$

erhält man die neue Gleichung

$$l \cos \theta = x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma',$$

in welcher man nur die aus den Gleichungen [10] genommenen Werthe x, y, z substituiren darf; der Factor l verschwindet von selbst, und man hat dann den Ausdruck für $\cos \theta$. Die Ausführung der Rechnung bleibe dem Leser überlassen.

## Projectionen ebener Flächen.

**537.** Fällt man aus den verschiedenen Punkten des Umfangs einer ebenen Figur Senkrechte auf eine Ebene, so entsteht auf dieser Ebene eine zweite Figur; welche die Projection der ersten ist.

Nehmen wir zuerst ein Dreieck, von welchem eine Seite mit der Ebene, auf welche man projicirt, parallel läuft, so kann man, ohne den Umfang der Projection zu ändern, diese Ebene parallel mit sich selbst fortbewegt denken, bis die mit ihr parallele Seite in derselben liegt. Es sei nun (Fig. 6) ABC ein Dreieck, dessen eine Seite BC in der Projections-Ebene UV liegt: man fälle AA' senkrecht auf diese Ebene, so ist A'BC die Projection dieses Dreiecks. Man fälle A'H senkrecht auf BC, und ziehe AH; nun steht auch die Linie AH senkrecht auf BC, und folglich mißt der Winkel AHA' die Neigung der Ebene ABC zur Ebene UV: dieser Winkel heiße $\varphi$.

Die beiden Dreiecke A'BC und ABC haben gleiche Grundlinie; deßhalb verhalten sie sich zu einander wie A'H : AH; da aber das Dreieck AA'H rechtwinklig ist, so ist dieses Verhältniß $= \cos \varphi$, also auch

$$\frac{A'BC}{ABC} = \cos \varphi,$$

woraus

$$A'BC = ABC \times \cos \varphi.$$

Die Lage des Dreiecks ABC (Fig. 7) mag aber sein, welche sie wolle, so kann man immer annehmen, die Projections-Ebene gehe durch eine der Spitzen B. Es sei A′BC′ die Projection des Dreiecks ABC; man verlängere AC bis zu ihrem Durchschnittspunkte D mit der Ebene UV, so liegt der Punkt D in der Richtung der Linie A′C′, und die Dreiecke A′BD und C′BD sind die Projectionen von ABD und CBD. Nach dem Vorigen ist daher

$$A'BD = ABD \times \cos\varphi, \quad C'BD = CBD \times \cos\varphi,$$

und folglich ist ihre Differenz

$$A'BC' = ABC \times \cos\varphi.$$

Um nun auf das Polygon überzugehen, zerlege man dasselbe in Dreiecke. Bezeichnet man diese Dreiecke mit T, T′, T″, . . . . , und ihre Projectionen mit t, t′, t″, . . . , so ist

$$t = T\cos\varphi, \quad t' = T'\cos\varphi, \ldots .;$$

also ist, wenn man beiderseits addirt,

$$t + t' + t'' + \ldots . = (T + T' + T'' + . .)\cos\varphi.$$

Die Summe T + T′ + T″ . . . ist aber dem Polygon, und t + t′ + t″ + . . . . seiner Projection gleich; bezeichnet man daher diese beiden Flächen mit A und a, so ist

[12] $$a = A\cos\varphi.$$

Dieses Resultat läßt sich auch auf eine von krummen Linien begrenzte ebene Figur anwenden; denn man kann diese Linien als Polygone von unendlich vielen Seiten betrachten: also ist überhaupt die Projection einer ebenen Figur auf eine Ebene gleich dem Product aus jener Figur und dem Cosinus ihres Neigungswinkels.

**538.** Die vorige Relation ist dieselbe, wie zwischen einer Geraden und ihrer Projection auf eine Axe (Nro. 525); und ferner läßt sich in der Geometrie leicht beweisen, daß der Winkel, den zwei auf zwei Ebenen senkrecht stehende Geraden einschließen, gleich dem Supplement des Neigungswinkels dieser Ebenen ist; daraus ergibt sich folgender Schluß:

Liegen mehrere Flächen A, A′, A″, . . . in beliebigen Ebenen, und man errichtet auf diesen Ebenen Senkrechte, deren Längen l, l′, l″ . . . . zugleich mit den Flächen A, A′, A″, . . . in Proportion stehen; projicirt man ferner alle diese Flächen auf eine Ebene, und alle diese Geraden auf eine mit dieser Ebene senkrechte Axe: so verhalten sich die Linear-Projectionen zu einander, wie die Flächen-Projectionen.

**539.** Damit ergibt sich sogleich noch eine andere wichtige Folgerung: es lassen sich nämlich die auf Projectionen ebener Flächen bezüglichen Unter-

suchungen nunmehr auf ganz ähnliche Untersuchungen zurückführen, in welchen man für die Flächen und ihre Projectionen Gerade substituirt, die auf denselben senkrecht stehen und ihnen proportionirt sind.

Sucht man z. B. die Ebene, auf welcher die Summe der Projectionen mehrerer Flächen ein Maximum ist, so beschreibe man ein Stück von einem Polygon, dessen Seiten mit diesen Flächen in Proportion und senkrecht auf denselben stehen. Die das Polygon schließende Gerade, die Resultante genannt wurde, ist nun die Axe, auf welcher die Summe der Projectionen der Vielecksseiten ein Maximum (Nro. 528) ist, und daraus folgt, daß auf der zu dieser Linie senkrechten Ebene auch die Flächen-Projectionen eine größte Summe ausmachen. Dabei ist zu bemerken, daß dieses Maximum zu jeder Fläche dasselbe Verhältniß hat, wie die resultirende Linie zu der auf jener Fläche senkrechten Seite. Diese Bemerkung genügt zur Bestimmung der größten Summe von Flächen-Projectionen, welche Summe man auch resultirende Fläche nennen könnte.

Alles, was von Linear-Projectionen gesagt wurde, läßt sich nun ohne Schwierigkeit auf Flächen-Projectionen übertragen. Es soll hier nur noch die Eigenschaft angeführt werden, die der in Nro. 532 analog ist: um nämlich eine ebene Figur auf eine gegebene Ebene zu projiciren, kann man sie zuerst auf drei rechtwinklige Ebenen projiciren, dann projicirt man die drei Projectionen auf die gegebene Ebene und addirt hierauf die drei neuen Projectionen.

**540.** Der in Nro. 527 aufgeführte Grundsatz ist dem für die Polyeder (körperlichen Vielecke) analog. Unter Polyeder versteht man hier eine Verbindung von ebenen Flächen, die einen nach allen Richtungen begrenzten Raum einschließen; und der darauf bezügliche Grundsatz läßt sich so ausdrücken: In jedem Polyeder ist die Summe der Projectionen der verschiedenen Flächen auf eine beliebige Ebene gleich Null.

Dieser Satz erfordert offenbar, daß gewisse Projectionen negativ genommen werden, und es ist zuerst zu zeigen, wie die Vorzeichen zu vertheilen sind.

Angenommen, die Projectionen mehrerer auf einander folgender Flächen seien (Fig. 8) **ABCD**, **ABEFG**, **AGHI**, . . . .; nun kann man einer derselben ein beliebiges Vorzeichen geben, und es erhalte **ABCD** das Vorzeichen +. Um das der unmittelbar darauf folgenden Projection **ABEFG** zu bestimmen, ist darauf zu achten, ob sie von der Seite **AB** aus, in welcher sie mit der ersten zusammentrifft, nach außen oder nach innen von dieser liegt: hier findet der erste Fall statt, und hiezu dient das Zeichen +. Die Projection der dritten Fläche ist **AGHI**; diese ist von der Seite **AG** aus auf die vorige überschlagen, und erhält deßwegen das entgegengesetzte Vorzeichen. So fährt man fort, die Projection jeder Fläche

mit der Projection der unmittelbar vorhergehenden, mit welcher sie eine Seite gemeinschaftlich hat, zu vergleichen, und gibt ihr dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem sie jenseits oder diesseits der gemeinschaftlichen Seite zu liegen kommt.

Hat man sich diese Regel gehörig aufgefaßt, so denke man sich die Flächen eines convexen Polyeders, ähnlich denen in der Elementar-Geometrie auf eine beliebige Ebene projicirt. Nun sieht man leicht, daß jeder Theil des diese Projectionen einschließenden Raumes zu betrachten ist, als enthalte er zwei gleiche Projectionen mit entgegengesetzten Vorzeichen, so daß, wenn man die Projectionen aller Flächen mit den ihnen zukommenden Vorzeichen addirt, das Resultat gleich Null wird. Wenn das Polyeder einwärts gehende Winkel hat, so muß, da es nach allen Seiten geschlossen ist, jeder Theil der von den Projectionen bedeckten Fläche eine gerade Anzahl Projectionen, von denen je zwei gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben, enthalten; folglich ist die Summe der Projectionen aller Flächen wieder gleich Null.

In Fig. 9 ist für die Polygone ein Fall dargestellt, der dem eben besprochenen analog ist. Der Theil pq der Projections-Axe OX ist hier von vier Projectionen bedeckt, von denen je zwei gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben, nämlich die von ab und cd, und von ef und gh. Die geistige Auffassung muß aber hier weiter gehen, als die wörtliche Erklärung, und das klare Bewußtsein gewinnen, daß der Natur der geschlossenen Vielecke gemäß die Summe der projicirten Flächen immer gleich Null ist.

**541.** Man bezeichne die auf einander folgenden Flächen eines geschlossenen Polyeders mit A, A′, A″, . . .; ziehe eine Reihe auf einander folgender Geraden L, L′, L″, . . ., die auf diesen Flächen senkrecht und mit denselben in Proportion stehen, und wähle ihre Lage so, daß die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich den Neigungswinkeln ihrer Flächen sind: dann läßt sich beweisen, daß diese Geraden ein geschlossenes Polygon bilden.

Angenommen, dem sei nicht so, und die Seite, welche das Polygon schließt, heiße X. Nun projicire man das ganze Polygon auf eine beliebige Axe, und das Polyeder auf eine auf dieser Axe senkrechten Ebene: so bilden die Flächen A, A′, A″, . . . . mit dieser Ebene dieselben Winkel, wie die proportionirten Geraden L, L′, L″, . . . mit der Axe; und da die Summe dieser Flächen-Projectionen gleich Null sein muß, so ist auch die der Linear-Projectionen dieser Geraden gleich Null. In dem von der Seite X geschlossenen Polygon ist aber die Summe der Linear-Projectionen Null (Nro. 527); also ist die Projection von X auch Null. Diese Folgerung findet bei jeder Projections-Axe statt, was nur dann möglich ist, wenn $X = 0$ ist; also bestimmen die Linien L, L′, L″, . . . ein geschlossenes Polygon.

Dieser Satz ist wichtig; denn er zeigt, daß alle Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Polygons auch auf die Polyeder anwendbar sind.

**542.** Betrachten wir noch besonders eine dreieckige Pyramide, deren Flächen mit A, A′, A″, A‴ bezeichnet werden, und es sei ABCD (Fig. 10) das entsprechende Viereck, dessen Seiten AB, BC, CD, DA auf diesen Flächen senkrecht und mit denselben in Proportion stehen. Diese Seiten können nicht in derselben Ebene liegen; denn wenn dieß der Fall wäre, so müßte diese Ebene auf allen Flächen und also auch auf allen Kanten der Pyramide senkrecht stehen.

Daraus folgt, wenn man das Parallelogramm ABCE vollendet und die Linien BF, AG und EH gleich und parallel mit CD zieht, so entsteht ein Parallelepipedon; folglich muß die Formel [11] in Nro. 535 auch zwischen AB, AE, AG, AD und den Winkeln BAE, BAG, GAE stattfinden. Diese Winkel sind Supplemente zu ABC, ECD, BCD, und diese letzteren sind gleich den Neigungswinkeln zwischen A und A′, A und A″, A′ und A″. Bezeichnet man daher diese Neigungswinkel mit $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, so kann man in der angeführten Formel die Winkel durch

$$180^0 - \alpha, \quad 180^0 - \alpha', \quad 180^0 - \alpha'',$$

und die Linien durch die Flächen A, A′, A″, A‴, welche mit den Linien AB, AE, AG und AD in Proportion stehen, ersetzen. So erhält man die Formel

[13] $A'''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2 - 2AA'\cos\alpha - 2AA''\cos\alpha' - 2A'A''\cos\alpha'',$

welche die Relation zwischen einer beliebigen Fläche der Pyramide, den drei andern Flächen und den gegenseitigen Neigungen dieser drei Flächen ausdrückt.

# Zweites Kapitel.

## Von der Ebene und der geraden Linie im Raume.

---

### Allgemeine Vorbemerkungen über die Bestimmung der Punkte, Flächen und Linien im Raume.

**543.** Um die Lage verschiedener Punkte im Raume zu bestimmen, bezieht man sie auf drei feste Ebenen, die einen körperlichen Winkel bilden. Gewöhnlich stehen diese Ebenen senkrecht auf einander; doch wollen wir hierüber vorerst keine besondere Voraussetzung aufstellen.

Es seien (Fig. 11) xOx′, yOy′, zOz′ die Durchschnittslinien je zweier dieser Ebenen, und M irgend ein im Raume liegender Punkt. Durch diesen Punkt und parallel mit den drei festen Ebenen lege man drei Ebenen, nämlich MM′PM″, welche die Linie x′x in P schneidet, parallel mit der Ebene yOz, MM′QM‴, welche y′y in Q schneidet, parallel mit xOz, und endlich MM″RM‴, welche z′z in R schneidet, parallel mit xOy. Der Punkt M ist vollkommen bestimmt, wenn die Punkte P, Q, R bekannt sind; denn zieht man durch diese Punkte mit den festen Ebenen parallele Ebenen, so schneiden sie sich im Punkte M. Diese drei Punkte lassen sich selbst mittelst der Abstände OP, OQ, OR, welche nach ihrer Lage zum Punkte O das Vorzeichen + oder — erhalten, leicht bestimmen.

Die Abstände OP, OQ, OR mit den ihnen zukommenden Vorzeichen behaftet, heißen nun die Coordinaten des Punktes M. Die Geraden x′x, y′y, z′z sind die Linien oder Axen dieser Coordinaten; der Punkt O, wo sie zusammentreffen, ist ihr Ursprung oder Anfangspunkt, und die Ebenen xOy, xOz, yOz heißen selbst Coordinaten-Ebenen. Oft bezeichnet man die Coordinaten allgemein mit x, y, z, und x′x heißt dann die Axe der x, xOy die Ebene der xy u. s. w. Die Ebenen und Axen der Coordinaten muß man als unbegrenzt betrachten; um jedoch keine

Verwirrung zu verursachen, kommen in den Figuren gewöhnlich nur die Theile der Axen vor, auf welchen die positiven Coordinaten genommen werden.

**544.** Die drei durch den Punkt M gelegten Ebenen bilden mit den Coordinaten-Ebenen ein Parallelepipedon; deßhalb kann man als Coordinaten des Punktes M beliebig entweder die auf den Axen liegenden Abstände OP, OQ, OR nehmen, oder die Abstände MM‴, MM″, MM′, die vom Punkte M ausgehen und mit den Axen parallel laufen, oder auch die Abstände OP, PM′, M′M, welche die zwischen dem Punkte M und dem Anfangspunkt gezogene gebrochene Linie OPM′M bilden.

**545.** Bezeichnet man drei positive oder negative Längen mit a, b, c, und setzt

$$x = a, \quad y = \pm b, \quad z = c,$$

so bestimmen diese Werthe nach dem Vorigen vollständig die Lage eines Punktes.

Ist eine der Coordinaten Null, so liegt der Punkt in der Ebene der beiden andern; ist z. B.

$$x = a, \quad y = b, \quad z = 0,$$

so liegt er in der Ebene xy. Sind zwei Coordinaten Null, so liegt der Punkt auf der Axe der dritten; ist daher

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

so liegt er auf der Axe der x. Der Punkt liegt endlich im Anfangspunkte selbst, wenn zugleich $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ist.

**546.** Die Punkte M′, M″, M‴, in welchen die vom Punkte M parallel mit den Axen gezogenen Linien die Coordinaten-Ebenen treffen, heißen die Projectionen dieses Punktes, und diese Projectionen heißen verticale (orthogonale) oder schiefe, je nachdem sie durch senkrechte oder schiefe Linien entstanden sind.

Sind die Coordinaten des Punktes M gleich a, b, c, so hat man offenbar

$x = a$, $y = b$, $z = 0$ für die Projection von M′ auf der Ebene xy;

$x = a$, $y = 0$, $z = c$ für die Projection von M″ auf der Ebene xz;

$x = 0$, $y = b$, $z = c$ für die Projection von M‴ auf der Ebene yz.

Soll eine der Projectionen, z. B. M′, bezeichnet werden, so gibt man zuweilen nur die zwei Gleichungen $x = a$, $y = b$ an; dabei ist aber die dritte $z = 0$ hinzuzudenken, worauf man bei den Folgerungen wohl zu achten hat.

**547.** Es ist nun zu erklären, wie die Flächen bestimmt werden. Man betrachte eine beliebige Fläche, und nehme zwei beliebige Coordinaten an, z. B. $x = OP$, und $y = PM'$ (Fig. 11): zieht man die Gerade $M'M$ parallel mit der Axe $Oz$, so muß sie die Fläche in einem Punkte $M$, oder in mehreren völlig bestimmten Punkten treffen. Daraus ergibt sich eine Relation zwischen $x$, $y$, $z$, vermittelst welcher, wenn zwei dieser Linien gegeben sind, die Werthe der dritten daraus abgeleitet werden können. Die diese Relation ausdrückende Gleichung heißt die Gleichung der Fläche, und umgekehrt ist die Fläche der Ort der Gleichung.

So wird man darauf geleitet, eine Gleichung zwischen $x$, $y$, $z$ als Darstellung einer Fläche zu betrachten. Dieser Satz läßt sich übrigens auch auf folgende Weise ableiten.

Es sei $F(x, y, z) = 0$ die betreffende Gleichung. Man nehme (Fig. 12) auf der Axe der $z$ eine beliebige Entfernung $OO' = c$, und lege die Ebene $x'O'y'$ parallel mit $xOy$, so schneidet dieselbe die Ebenen $xOz$ und $yOz$ in den Geraden $O'x'$ und $O'y'$ parallel mit den Axen $Ox$ und $Oy$. Unter den Punkten, welche der gegebenen Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

genügen, betrachte man nur die in der Ebene $x'O'y'$ liegenden, und es sei $M$ irgend einer dieser Punkte. Zieht man $MN$ parallel mit $O'y'$, und setzt

$$O'N = x', \quad NM = y',$$

so sind die Coordinaten des auf die Linien $O'x'$ und $O'y'$ bezogenen Punktes $M$ gleich $x'$ und $y'$. Die drei Coordinaten desselben auf die drei Axen $Ox$, $Oy$, $Oz$ bezogenen Punktes $M$ sind

$$x = O'N = x', \quad y = MN = y', \quad z = OO' = c.$$

Diese Größen müssen aber der Gleichung $F(x, y, c) = 0$ Genüge leisten; führt man daher die Substitutionen aus, so enthält die sich ergebende Gleichung

$$F(x', y', c) = 0$$

nur die zwei Veränderlichen $x'$ und $y'$, und stellt eine auf die Axen $O'x'$ und $O'y'$ bezogene Linie dar.

Es mag also der Ort der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

sein, welcher er wolle, so wird dieser Ort durch Ebenen, die mit der Ebene $xy$ parallel sind, in Linien geschnitten. Diese Eigenschaft kann nur einer Fläche zukommen; also stellt eine Gleichung zwischen $x, y, z$ eine Fläche dar.

Da es jedoch der Fall sein kann, daß die Gleichung nach $x'$ und $y'$ nur einen oder mehrere Punkte vorstellt, oder gar unmöglich ist, so wird es auch in gewissen Fällen vorkommen, daß die Gleichung nach $x$, $y$, $z$ nur eine Linie, einen oder mehrere einzelne Punkte gibt, oder daß sie sogar unmöglich ist.

**548.** Enthält die gegebene Gleichung nur zwei Coordinaten, z. B. x und y, so stellt sie einen mit der Axe der z parallelen Cylinder vor. Denn betrachtet man vorerst nur die Punkte der Ebene xy, so bestimmt diese Gleichung auf dieser Ebene im Allgemeinen eine Linie AB (Fig. 13). Zieht man dann durch jeden Punkt M dieser Linie eine Gerade MM' parallel mit z, so müssen offenbar die Werthe von x und y für alle Punkte dieser Geraden dieselben sein, wie für den Punkt M. Nur bei der dritten Coordinate z wird ein Unterschied stattfinden, und da z nicht in der gegebenen Gleichung vorkommt, so müssen alle Punkte von MM' diese Gleichung gleichfalls befriedigen, d. h. mit andern Worten, diese Gleichung bestimmt einen mit der Axe der z parallelen Cylinder. Der Name Cylinder ist hier im weitesten Sinne genommen, und bedeutet jede Fläche, die durch eine parallel mit sich selbst bewegte Gerade erzeugt wird.

**549.** Enthält eine Gleichung nur eine einzige Coordinate, so erhält man für diese constante Werthe, und jeder dieser Werthe bestimmt, wenn er reell ist, eine Ebene, die mit den der beiden andern Coordinaten parallel ist. Denn ist $z = c$ einer dieser Werthe, und legt man parallel mit der Ebene xy eine Ebene, welche die Axe der z in einem Abstand c vom Anfangspunkt, oberhalb und unterhalb desselben je nach dem Vorzeichen von c, trifft, so ist für alle Punkte dieser Ebene offenbar z gleich c, und für alle Punkte außerhalb dieser Ebene ist z von c verschieden.

Daraus folgt, daß die Gleichungen

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

einzeln genommen, drei mit den Coordinaten-Ebenen parallele Ebene vorstellen; zusammen bestimmen sie also den Durchschnittspunkt der drei Ebenen. Dieß ist gerade der Punkt, der a, b, c zu Coordinaten hat, und deßhalb nennt man

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

die Gleichungen dieses Punktes.

**550.** Um endlich von Linien zu sprechen, so besteht die einfachste Bestimmung einer Linie im Raume darin, daß man sie als den Durchschnitt zweier Flächen im Raume betrachtet. So ist eine Gerade durch den Durchschnitt zweier Ebenen, und ein Kreis durch den einer Ebene und einer Kugel, oder auch zweier Kugeln gegeben. Die Gleichungen zweier Flächen, die eine Linie bestimmen, heißen zusammen genommen die Gleichungen dieser Linie.

Wie es unendlich viele verschiedene Flächen gibt, die durch dieselbe Linie gehen, so gibt es auch unendlich viele Gleichungen, die zu je zwei, diese Linien darstellen können. Diese Unbestimmtheit verschwindet, wenn man anstatt der beiden Flächen Cylinder nimmt, die je zwei der Coordinaten-Axen parallel sind. Ist der erste Cylinder der Linie der y parallel, so ent-

hält seine Gleichung kein y (Nro. 548), und ist der zweite Cylinder der Linie der x parallel, so enthält seine Gleichung kein x; bezeichnet man daher eine Function von x und z ohne y mit F (x, z), und eine Function von y und z ohne x mit F (y, z), so kann man als Gleichungen einer beliebigen Linie setzen

[1] $F(x, z) = 0$, [2] $F_1(y, z) = 0$.

**551.** Es sei AB (Fig. 14) die betreffende Linie. Zieht man durch alle Punkte M, M', ... von AB Parallelen mit Oy, so sind die Punkte m, m', ..., wo sie die Ebene xOz treffen, die Projectionen der Punkte M, M', ...; die Linie A'B', welche den Ort aller dieser Projectionen andeutet, ist die Projection der Linie AB, und der Cylinder ABB'A' heißt der projicirende Cylinder. Die Gleichung [1] muß offenbar die dieses Cylinders sein, und sie gibt, blos auf die Punkte der Ebene xOz beschränkt, die Projection A'B'; ebenso gibt die Gleichung [2], wenn man sie blos auf die in der Ebene yOz liegenden Punkte beschränkt, die Projection von AB auf diese Ebene. Wir sehen also, daß die Gleichungen [1] und [2] auch als die der Projectionen einer Linie auf die Ebenen xz und yz betrachtet werden können.

Eliminirt man z zwischen [1] und [2], so erhält man eine Gleichung nach x und y, die derselben Linie AB angehören muß; es ist dieß die Gleichung eines mit z parallelen Cylinders, und sie stellt, blos auf die Punkte der Ebene zOy beschränkt, die Projection von AB auf diese Ebene vor.

**552.** Sind überhaupt die Gleichungen einer gegebenen Linie

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0,$$

so führt die Elimination einer der Coordinaten, z. B. von y, auf eine Gleichung, welche eine mit dieser Coordinate parallele cylindrische Fläche darstellt; und da diese Fläche die gegebene Linie enthalten muß, so muß auch ihre Gleichung blos auf die Punkte der Ebene xz angewandt, auf dieser Ebene eine Linie bestimmen, die gerade die Projection der gegebenen Linie ist.

Eliminirt man daher nach einander jede Coordinate, so erhält man die Projectionen der Curve auf die drei Coordinaten-Ebenen.

## Gleichung der Ebene.

**553.** Zuerst soll gezeigt werden, daß die Gleichung des ersten Grades zwischen den Coordinaten x, y, z immer eine Ebene darstellt; und wir wollen zu diesem Zweck den schon in Nro. 547 bei dem Beweise, daß eine Gleichung eine Fläche bestimmen könne, befolgten Gang einschlagen.

Es sei die allgemeine Gleichung

[A] $$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Setzt man zuerst $y = 0$, so ist

$$Ax + Cz + D = 0, \quad \text{oder } z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}.$$

Diese Gleichung gibt die Spur (trace) AB der Fläche (Fig. 15) auf der Ebene xz; also ist diese Spur eine gerade Linie.

Wird ferner $x = 0$ gesetzt, so gibt die Gleichung [A]

$$By + Cz + D = 0, \quad \text{oder } z = -\frac{B}{C}y - \frac{D}{C};$$

also hat die Fläche auf der Ebene yz wieder eine Gerade AC zur Spur, welche die Axe der z in demselben Punkte A wie die andere Spur trifft.

Legen wir nun eine beliebige Ebene parallel mit der Ebene xz, und nehmen an, sie treffe die Axe Oy in einem Abstand $OO' = \beta$, und die beiden Ebenen yOx, yOz in den Linien O'x', O'z' parallel mit Ox und Oz. Es sei M ein beliebiger Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Fläche der Gleichung [A]: bezieht man diesen Punkt auf die beiden Axen O'x' und O'z', und bezeichnet seine auf diesen Axen genommenen Coordinaten O'P und PM mit x' und z', während seine drei auf die Axen Ox, Oy, Oz bezüglichen Coordinaten O'P, OO', PM fortwährend x, y, z heißen, so muß offenbar

$$x = x', \quad y = \beta, \quad z = z'$$

sein, und diese Werthe müssen überdieß der Gleichung [A] genügen; also ist

$$Ax' + B\beta + Cz' + D = 0, \quad \text{oder } z' = -\frac{A}{C}x' - \frac{D+B\beta}{C}.$$

Diese Gleichung zwischen x' und z' gibt den Durchschnitt A'B' der Fläche mit der Ebene z'O'x', und da sie vom ersten Grade ist, so muß dieser Durchschnitt eine gerade Linie sein. Da ferner x' denselben Coefficienten hat, wie x in der Gleichung für die Spur AB, so muß A'B' mit O'z' denselben Winkel einschließen, wie AB mit Oz. Nun würde die durch die beiden Spuren AB und AC gelegte Ebene von z'O'x' in einer Geraden geschnitten, die durch den Punkt A' ginge und mit O'z' auch denselben Winkel machen würde; also könnte sie von A'B' nicht verschieden sein. Somit wird die Fläche der Gleichung [A] von allen mit zOx parallelen Ebenen in Geraden geschnitten, die ganz in der Ebene BAC liegen; folglich ist jene Fläche keine andere, als diese Ebene selbst.

**354.** Besondere Fälle. Bei der Gleichung [A] können auch Glieder fehlen; dann erhält die dadurch bestimmte Ebene in Beziehung auf die Axen eine besondere Lage.

1) Es sei $D = 0$, so ist die Gleichung [A]

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Die Ebene geht dann durch den Anfangspunkt, und es wird ihr durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ Genüge geleistet.

2) Für $A = 0$ reducirt sich die Gleichung der Ebene auf

$$By + Cz + D = 0;$$

nun wird die Spur der Ebene auf der Ebene xz parallel mit der Axe der x; denn setzt man $y = 0$, so ist für diese Spur $z = -\frac{D}{C}$. Also ist die Ebene selbst parallel mit der Axe der x: d. h. die Gleichung des ersten Grades, welche blos zwei Coordinaten enthält, stellt überhaupt eine mit der Axe der dritten Coordinate parallele Ebene vor.

3) In dem besondern Falle noch, wo zugleich $A = 0$ und $B = 0$ angenommen wird, ist die Gleichung [A]

$$Cz + D = 0.$$

Dann sind die Spuren AB und AC beziehungsweise parallel mit Ox und Oy, und die Ebene BAC ist parallel mit xOy, welcher Schluß schon dadurch klar ist, daß die Gleichung für alle Punkte der Ebene einen constanten Werth für z, nämlich $z = -\frac{D}{C}$ gibt.

Daraus folgt, daß die Gleichung des ersten Grades, welche nur eine Coordinate enthält, eine mit der Ebene der beiden andern Coordinaten parallele Ebene darstellt.

**355.** Es genügt jedoch nicht, erkannt zu haben, daß die Gleichung des ersten Grades immer eine Ebene darstellt, es ist auch noch zu beweisen, daß sie alle möglichen Fälle enthalten kann.

Enthält erstens die Gleichung die Veränderliche z, so hat man für die Spuren der Ebene auf den Ebenen xz und yz

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C} \quad \text{und} \quad z = -\frac{B}{C}y - \frac{D}{C}.$$

Diese beiden Spuren treffen die Axe der z in dem Abstand $-\frac{D}{C}$, und indem man für D verschiedene Werthe setzt, können diese Spuren durch jeden beliebigen Punkt der Axe der z gehen. Gibt man hierauf A und B verschiedene Werthe, so erhält man auch für diese Spuren beliebige Richtungen; also kann die Gleichung [A] alle Ebenen darstellen, welche die Linie der z treffen.

Ist zweitens C Null, so ist die Gleichung [A]

$$Ax + By + D = 0;$$

dann stellt sie eine mit z parallele Ebene vor, deren Spur auf der Ebene xy auch $Ax + By + D = 0$ zur Gleichung hat. Diese Gleichung kann aber alle Geraden geben, die man in der Ebene xy ziehen kann; also kann die Gleichung [A] alle mit z parallelen Ebenen vorstellen.

Es gibt also keine Ebene, die nicht durch eine Gleichung des ersten Grades gegeben wäre.

**556.** Die Gleichung der Ebene wird unter verschiedenen Formen angewendet. Beachten wir zuerst, daß die Gleichung [A] immer durch den Coefficienten eines seiner Glieder dividirt werden kann, so hat man eigentlich nur drei Unbestimmte zur Verfügung, um die Ebene nach den gegebenen Bedingungen zu construiren. Enthält z. B. die Gleichung z, so kann man sie durch C dividiren, und so schreiben

$$z = fx + gy + h.$$

Diese Form kommt aber den Ebenen nicht zu, die mit der Axe der z parallel sind, und man zieht es deßhalb oft vor, sich der Gleichung [A] zu bedienen, die außerdem den Vortheil gewährt, daß sie auf mehr symmetrische Formeln führt.

**557.** Trifft eine Ebene die drei Axen, so erhält ihre Gleichung eine sehr elegante Form, wenn man die drei Abstände OA, OB, OC (Fig. 16), vom Anfangspunkt bis an die drei Durchschnittspunkte dieser Axen mit der Ebene, einführt. Diese Abstände lassen sich leicht aus der Gleichung [A] ableiten: z. B. für den Durchschnittspunkt mit der Axe der x ist $y = 0$, $z = 0$, und die Gleichung [A] gibt daher

$$OA = -\frac{D}{A};$$

ebenso ergibt sich

$$OB = -\frac{D}{B}, \qquad OC = -\frac{D}{C};$$

bezeichnet man daher diese drei Abstände mit a, b, c, so ist

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

woraus

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Setzt man diese Werthe in [A] und dividirt durch D, so erhält man

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \text{oder} \quad bcx + acy + abz = abc.$$

**558.** Eine Ebene ist bestimmt, wenn man die Größe und Lage der vom Ursprung auf diese Ebene gefällten Senkrechten OH (Fig. 16) kennt.

Es sei

$$OH = \delta, \quad HOx = \alpha, \quad HOy = \beta, \quad HOz = \gamma:$$

so geben die drei rechtwinkligen Dreiecke HOA, HQB, HOC

$$OA = a = \frac{\delta}{\cos\alpha}, \quad OB = b = \frac{\delta}{\cos\beta}, \quad OC = c = \frac{\delta}{\cos\gamma};$$

und substituirt man diese Werthe für a, b, c, so erhält die Gleichung auch folgende bemerkenswerthe Form

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \delta.$$

Man kann hiezu auch unmittelbar mittelst der Eigenschaft gelangen, daß die Summe der verticalen Projectionen mehrerer auf einander folgender Geraden auf eine beliebige Axe gleich der Projection ihrer Resultante ist (Nro. 526). Angenommen, die Coordinaten des in der Ebene ABC beliebig genommenen Punktes M seien

$$OQ = x, \quad QP = y, \quad PM = z,$$

und man ziehe OM als Resultante des Umfangs OQPM; da nun die OH senkrecht auf der Ebene ABC steht, so erhält man, wenn OM auf OH projicirt wird, als Projection die mit $\delta$ bezeichnete Linie OH selbst. Projicirt man hinwiederum x, y, z auf OH, so erhält man

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

als Summe der drei Projectionen; also hat man vermöge des angeführten Grundsatzes

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \delta;$$

und da diese Relation für alle Punkte der Ebene stattfindet, so ist sie die Gleichung dieser Ebene.

## Gleichungen der geraden Linie.

**559.** Nach dem in Nro. 550 Bemerkten könnte man als Gleichungen einer gegebenen Geraden die zweier Ebenen nehmen, welche dieselbe enthalten; es ist jedoch einfacher, sie durch ihre Projectionen auf zwei der drei Coordinaten-Ebenen zu bestimmen. Zieht man durch alle Punkte dieser Geraden Parallelen mit der Axe der y (Fig. 17), so liegen sie in derselben Ebene, und ihre Fußpunkte liegen auf der Ebene zx in gerader Linie. Eben diese gerade Linie ist auf der Ebene zx die Projection der betreffenden Geraden; ebenso ist ihre Projection auf der Ebene yz eine

gerade Linie: soll daher eine Gerade durch diese zwei Projectionen bestimmt werden, so kann man ihre Gleichungen unter folgender Form darstellen:

[1] $$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Sind die Coordinaten rechtwinklig, so sind a und b die Tangenten der von den beiden Projectionen und der Axe der z eingeschlossenen Winkel; im Allgemeinen sind aber diese Coefficienten Sinus-Verhältnisse.

**560.** Es muß hier bemerkt werden, daß diese Gleichungen, jede einzeln in ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet, nicht nur die Projectionen der Geraden, sondern auch zwei beziehungsweise mit x und y parallele Ebenen darstellen. Es sind dieß die projicirenden Ebenen der Geraden; und eben weil sie diese Gerade enthalten, wird sie durch die Gleichungen [1] bestimmt. Uebrigens wird dadurch nur diese Gerade allein bestimmt; denn alle den beiden Ebenen gemeinschaftlichen Punkte gehören zu der Geraden.

**561.** Eliminirt man z aus den Gleichungen [1], so ergibt sich

$$y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha).$$

Dieß ist die Gleichung einer mit z parallelen Ebene, welche die Gerade enthält. Sie stellt also die dritte projicirende Ebene, oder auch die Projection der Geraden auf der Ebene xy (Nro. 552) dar.

**562.** Besondere Fälle. Betrachten wir jetzt die gerade Linie in einigen besondern Lagen.

1) Geht dieselbe durch den Ursprung, so gehen auch ihre Projectionen durch denselben, und ihre Gleichungen heißen einfach

$$x = az, \quad y = bz.$$

2) Geht sie durch einen Punkt, der auf einer der Axen, z. B. auf y liegt, so geht nur ihre Projection auf der Ebene xz durch den Ursprung, und die Gleichungen der Geraden sind dann

$$x = az, \quad y = bz + \beta.$$

3) Ist eine Gerade mit einer der Coordinaten-Ebenen, z. B. mit xy, parallel, so fallen die Ebenen, wodurch sie auf die beiden andern projicirt wird, zusammen, und sie haben als einzige Gleichung $z = \delta$, wo $\delta$ eine Constante ist. Dann muß man sich an die dritte Projection halten, und für die Gerade die Gleichungen nehmen

$$z = \delta, \quad y = cx + \gamma.$$

4) Ist die Gerade mit einer der Axen parallel, z. B. mit z, so sind ihre Gleichungen

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Sie heißen endlich

$$x = \alpha, \quad z = \gamma,$$

oder auch

$$y = \beta, \quad z = \gamma,$$

je nachdem die Gerade mit y oder x parallel ist.

**363.** Will man aus den Gleichungen [1] den Durchschnitt der Geraden mit der Ebene zweier Coordinaten ableiten, so beachte man, daß in dieser Ebene die dritte Coordinate Null ist. Auf diese Weise erhält man

$z=0, \quad x = \alpha, \quad y = \beta,$ für den Durchschnitt mit der Ebene xy;

$y=0, \quad z = -\frac{\beta}{b}, \quad x = \alpha - \frac{a\beta}{b},$ für den Durchschnitt mit der Ebene xz;

$x=0, \quad z = -\frac{\alpha}{a}, \quad y = \beta - \frac{b\alpha}{a},$ für den Durchschnitt mit der Ebene yz.

# Drittes Kapitel.

## Aufgaben über die Ebene und die gerade Linie.

### Erster Theil: Aufgaben, deren Lösung von der Wahl der Axen unabhängig ist.

**564.** Aufgabe I. Die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Es seien $x'$, $y'$, $z'$ und $x''$, $y''$, $z''$ die Coordinaten der beiden Punkte. Die beiden Gleichungen müssen von der Form sein

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Damit die Gerade durch den ersten Punkt gehe, muß diesen Gleichungen Genüge geschehen, wenn man $x'$, $y'$, $z'$ anstatt $x$, $y$, $z$ setzt; dann erhält man

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + \beta.$$

Zieht man diese Gleichungen von den beiden vorhergehenden ab, so wird $\alpha$ und $\beta$ eliminirt, und es ist

$$x - x' = a\,(z - z'), \quad y - y' = b\,(z - z'),$$

Die durch diese Gleichungen dargestellte Gerade erfüllt bereits die Bedingung, daß sie durch den ersten Punkt geht. Damit sie auch durch den zweiten Punkt gehe, muß diesen Gleichungen genügt werden, indem man $x''$, $y''$, $z''$ für $x$, $y$, $z$ setzt; dann ergibt sich

$$x'' - x' = a\,(z'' - z'), \quad y'' - y' = b\,(z'' - z'),$$

woraus

$$a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}, \qquad b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}.$$

Setzt man für a und b diese Werthe, so erhält man die gesuchten Gleichungen, nämlich:

$$x - x' = \frac{x''-x'}{z''-z}(z-z'), \quad y - y' = \frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z').$$

**365.** Aufgabe II. Die Gleichung einer Geraden zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht, und mit einer gegebenen Geraden parallel lauft.

Die Gleichungen der gegebenen Geraden seien

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta;$$

und $x'$, $y'$, $z'$ seien die Coordinaten des gegebenen Punktes. Da die gesuchte Gerade durch diesen Punkt gehen muß, so läßt sich ihren Gleichungen die Form geben

$$x-x' = a'(z-z'), \quad y-y' = b'(z-z'),$$

wo $a'$ und $b'$ noch unbekannt sind.

Wenn zwei Gerade parallel sind, so sind auch die durch diese Geraden parallel mit der Axe der y gelegten Ebenen unter sich parallel, und folglich sind auch ihre Durchschnittslinien mit der Ebene xz parallel. Diese Durchschnitte sind aber die Projectionen zweier Geraden auf der Ebene xz; also müssen die Coefficienten von z in den Gleichungen dieser beiden Projectionen einander gleich sein. Dasselbe ist der Fall mit den Projectionen auf der Ebene yz; damit also die Geraden parallel sind, müssen die Bedingungen stattfinden:

$$a' = a, \quad b' = b.$$

Folglich sind die Gleichungen der verlangten Parallele

$$x - x' = a(z-z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

Liegt der gegebene Punkt im Anfangspunkte, so reduciren sie sich auf folgende:

$$x = az, \quad y = bz.$$

**366.** Aufgabe III. Den Durchschnittspunkt zweier Geraden zu bestimmen, deren Gleichungen bekannt sind.

Im Allgemeinen müssen sich zwei Linien im Raume nicht nothwendig treffen; damit sie sich treffen, muß es Werthe für x, y, z geben, die ihren vier Gleichungen genügen. Nun muß offenbar bei der Elimination der drei Coordinaten x, y, z aus den vier Gleichungen eine Gleichung übrig bleiben, welche die Bedingung ausdrückt, ohne welche die beiden Linien keinen gemeinschaftlichen Punkt haben können.

Es seien

$$[1] \quad x = az + \alpha \qquad [3] \quad x = a'z + \alpha'$$
$$[2] \quad y = bz + \beta \qquad [4] \quad y = b'z + \beta'$$

die Gleichungen der beiden Geraden. Aus [1] und [3] ergibt sich

$$[5] \quad z = \frac{\alpha' - \alpha}{a - a'}, \qquad x = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'};$$

und aus [2] und [4] erhält man

$$[6] \quad z = \frac{\beta' - \beta}{b - b'}, \qquad x = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'}.$$

Um die vier Gleichungen durch dieselben Coordinaten zu befriedigen, müssen die zwei gefundenen Werthe für z gleich sein, und offenbar genügt diese Bedingung; also ist

$$\frac{\alpha' - \alpha}{a - a'} = \frac{\beta' - \beta}{b - b'},$$

oder auch $(\alpha' - \alpha)(b - b') - (\beta' - \beta)(a - a') = 0.$

Diese Relation muß stattfinden, damit die beiden Geraden sich schneiden, und in diesem Falle wird der Durchschnittspunkt durch die Formeln [5] und [6] bestimmt.

Sind die Geraden parallel, so ist $a' = a$, und $b' = b$ (Nro. 565). Dann wird der Bedingungsgleichung genügt; und die Werthe für x, y, z sind unendlich.

**367.** Aufgabe IV. Eine Ebene durch drei gegebene Punkte zu legen.

Die Coordinaten der drei Punkte seien $x', y', z'$; $x'', y'', z''$; $x''', y''', z'''$, und es sei

$$[1] \quad Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der gesuchten Ebene. Damit diese Ebene durch die drei Punkte gehe, muß ihrer Gleichung für die Coordinaten jedes derselben genügt werden, also hat man

$$Ax' + By' + Cz' = D, \quad Ax'' + By'' + Cz'' = D, \quad Ax''' + By''' + Cz''' = D.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch D, so drücken die Verhältnisse von A, B, C zu D die darin enthaltenen Unbekannten aus, und die Werthe dieser Verhältnisse werden aus jenen gefunden. Bezeichnet man diese Werthe mit A', B', C', so ist

$$A = A'D, \quad B = B'D, \quad C = C'D;$$

und mittelst dieser Substitution und Vereinfachung erhält man für die Gleichung [1]

$$A'x + B'y + C'z = 1.$$

**568.** Aufgabe V. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel mit einer gegebenen Ebene zu legen.

Es sei

[1] $$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung einer gegebenen Ebene, und

[2] $$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

die einer Parallelebene.

Da nun die Durchschnitte zweier parallelen Ebenen durch eine dritte einander parallel sind, so müssen auch die Spuren auf der Ebene xz, sowie auf der Ebene yz, je einander parallel sein. Die Gleichungen dieser Spuren sind

$Ax + Cz + D = 0$, $A'x + C'z + D' = 0$ auf der Ebene xz,

$By + Cz + D = 0$, $B'x + C'z + D' = 0$ auf der Ebene yz;

und damit die beiden ersten, sowie die beiden letzten unter sich parallel sind, muß

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}, \quad \text{oder auch} \quad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} \text{ sein.}$$

Wenn die Ebenen die Axe der z treffen, so sind diese Bedingungen zu ihrer parallelen Lage hinreichend; denn dann schneiden sich die Spuren der ersten Ebene auf der Axe der z, und sind mit denen der zweiten Ebene, die sich auch auf dieser Axe schneiden, parallel. Sind aber die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind bekanntlich auch ihre Ebenen parallel.

Wenn aber die beiden Ebenen mit der Axe der z parallel sind, was mit der Voraussetzung $C = 0$ und $C' = 0$ zusammenfällt, so ist die einzige zu erfüllende Bedingung, daß die Spuren auf der Ebene xy parallel seien, weßhalb dann

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}, \quad \text{oder} \quad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \text{ sein muß.}$$

Somit ist in allen Fällen die nothwendige und hinreichende Bedingung für den Parallelismus zweier Ebenen, daß die Coefficienten der Veränderlichen x, y, z in den Gleichungen dieser Ebenen in Proportion stehen.

Angenommen, diese Bedingungen seien erfüllt, und es sei $\frac{A'}{A} = k$, so ist

$$A' = Ak, \quad B' = Bk, \quad C' = Ck;$$

setzt man nun diese Werthe in die Gleichung [2], und dividirt mit k, indem zugleich $D''k = D'$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$Ax + By + Cz + D'' = 0.$$

Diese Gleichung stellt alle mit der Ebene der Gleichung [1] parallelen Ebenen dar, und unterscheidet sich von der ersteren blos durch das constante Glied D''.

Bis jetzt blieb D'' unbestimmt; soll aber die parallele Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen, dessen Coordinaten x', y', z' sind, so muß

$$Ax' + By' + Cz' + D'' = 0$$

sein; und zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so ist für die gesuchte Ebene

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0.$$

Ist der gegebene Punkt der Ursprung, so wird

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

und man hat für die parallele Ebene

$$Ax + By + Cz = 0.$$

**569.** Aufgabe VI. Eine Ebene durch einen Punkt und eine gegebene Gerade zu legen.

Es seien x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punktes, ferner

[1] $$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, und

[2] $$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene.

Die Bedingung, daß sie durch den gegebenen Punkt geht, wird ausgedrückt durch

[3] $$Ax' + By' + Cz' + D = 0;$$

und damit sie die gegebene Gerade enthalte, muß, wenn man in die Gleichung der Ebene die aus den Gleichungen dieser Geraden gezogenen Werthe für x und y setzt, die sich ergebende Gleichung für jede beliebige Coordinate z befriedigt werden. Nun erhält man durch die Substitution dieser Werthe

$$(Aa + Bb + C)z + A\alpha + B\beta + D = 0,$$

und damit diese Gleichung ohne besondere Bestimmung von z stattfinde, setze man.

[4] $$Aa + Bb + C = 0,$$

[5] $$A\alpha + B\beta + D = 0.$$

Nun sind alle Bedingungen der Aufgabe in den Gleichungen [3], [4], [5] enthalten.

Eliminirt man D aus [3] und [5], so ist

$$A(x'-\alpha) + B(y'-\beta) + Cz' = 0,$$

und indem man diese Gleichung mit [4] verbindet, findet man leicht

$$A = \frac{(y'-bz'-\beta)\,C}{b\,(x'-\alpha)-a(y'-\beta)}, \qquad B = -\frac{(x'-az'-\alpha)\,C}{b\,(x'-\alpha)-a(y'-\beta)}.$$

Zieht man aber die Gleichung [3] von der Gleichung [2] ab, so ergibt sich

$$A\,(x-x') + B\,(y-y') + C\,(z-z') = 0,$$

und indem man die Werthe für A und B substituirt, erhält man nach allen Reductionen

$$[6]\quad [y' - bz' - \beta]\,(x - x') - [x' - az' - \alpha]\,(y - y') + [b(x' - \alpha) - a\,(y' - \beta)]\,(z - z') = 0,$$

welches die Gleichung der gesuchten Ebene ist.

**370.** Die Berechnungen können auch auf andere Weise stattfinden. Mittelst der Gleichungen [4] und [5] kann man aus der Gleichung der Ebene zwei der Größen A, B, C, D eliminiren. Zieht man nämlich die Gleichung [4], nachdem sie vorher mit z multiplicirt wurde, von der Gleichung der Ebene ab, ebenso die Gleichung [5], so werden C und D eliminirt, und man findet dann

$$A\,(x-az-\alpha) + B\,(y-bz-\beta) = 0.$$

Da hier nur auf die Relationen [4] und [5] Rücksicht genommen wurde, so gehört diese Gleichung irgend einer Ebene an, die durch die gegebene Gerade geht.

Damit sie auch durch den gegebenen Punkt gehe, muß diese Gleichung Geltung haben, wenn darin x', y', z' für x, y, z gesetzt wird; also ist dann

$$A\,(x'-az'-\alpha) + B\,(y'-bz'-\beta) = 0,$$

woraus

$$\frac{B}{A} = -\frac{x' - az' - \alpha}{y' - bz' - \beta}$$

folgt, und somit ergibt sich für die gesuchte Ebene

$$[7]\qquad x - az - \alpha = \frac{x' - az' - \alpha}{y' - bz' - \beta}\,(y-bz-\beta).$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung [6] nur durch ihre Form. Man erkennt sogleich, daß sie eine Ebene darstellt, welche durch die gegebene Gerade geht; denn es wird ihr offenbar zugleich mit den Gleichungen [1] Genüge geleistet.

**371.** Aufgabe VII. Durch eine von zwei gegebenen Geraden eine Ebene so zu legen, daß sie mit der andern parallel laufe.

Es seien

$$\begin{cases} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a'z + \alpha', \\ y = b'z + \beta', \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Geraden, und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene.

Damit die zweite Gerade mit der Ebene parallel sei, muß sie, wenn beide parallel mit sich selbst in den Anfangspunkt versetzt werden, ganz in die Ebene fallen. Dann hat man die Gleichungen

[1] $x = a'z$, $y = b'z$ für die Gerade (Nro. 565),

[2] $Ax + By + Cz = 0$ für die Ebene (Nro. 568);

und setzt man die Werthe von [1] in die Gleichung [2], indem man den gemeinschaftlichen Factor $z$, der unbestimmt bleiben muß, wegläßt, so erhält man

[3] $$Aa' + Bb' + C = 0;$$

und dieß ist die Bedingung des Parallelismus.

Damit die Ebene die erste Gerade enthalte, muß bekanntlich (nach Nro. 569)

[4] $$Aa + Bb + C = 0,$$

[5] $$A\alpha + B\beta + D = 0 \text{ sein.}$$

Die Gleichung [4], welche der Gleichung [3] ähnlich ist, drückt aus, daß die Ebene mit der ersten Geraden parallel ist. Die Gleichung [5] drückt aus, daß die Ebene durch den Punkt geht, wo diese Gerade die Ebene $xy$ trifft; denn für diesen Punkt ist

$$z = 0, \quad x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Die Gleichungen [3] und [4] geben

$$B = -\frac{A(a'-a)}{b'-b}, \quad C = -\frac{A(ab'-ba')}{b'-b}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Ebene, und $\frac{D(b'-b)}{A} = D'$, so ist

$$(b'-b)x - (a'-a)y - (ab'-ba')z + D' = 0,$$

wo $D'$ unbestimmt ist. Da hier nur auf die Bedingungen [3] und [4] Rücksicht genommen wurde, so stellt diese Gleichung alle mit den zwei gegebenen Geraden parallelen Ebenen dar; da ferner die Coefficienten von $x$, $y$, $z$ kein $D'$ enthalten, so müssen sie constant bleiben: also sind alle diese Ebenen, wie dieß vorauszusehen war, unter sich parallel (Nro. 568).

Eliminirt man aber zuerst D, indem man die Gleichung [5] von der Gleichung der Ebene abzieht, so ergibt sich

$$A(x-\alpha)+B(y-\beta)+Cz=0,$$

und setzt man dann für B und C ihre Werthe, so ist

$$(b'-b)(x-\alpha)-(a'-a)(y-\beta)-(ab'-ba')z=0$$

die Gleichung der Ebene, welche allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

**572.** Aufgabe VIII. Die Gleichungen zweier Ebenen sind gegeben, man soll die Projectionen ihrer Durchschnittslinien finden.

Nach den in Nro. 542 angestellten allgemeinen Betrachtungen muß man, um die Gleichungen dieser Projectionen zu erhalten, aus den Gleichungen der beiden Ebenen nach einander x, y, z eliminiren. Angenommen, die Gleichungen dieser Ebenen seien

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'y+B'y+C'z+D'=0;$$

so findet man für die drei Projectionen ihres Durchschnitts

$$(AC'-CA')x+(BC'-CB')y+DC'-CD'=0,$$
$$(BA'-AB')y+(CA'-AC')z+DA'-AD'=0,$$
$$(CB'-BC')z+(AB'-BA')x+DB'-BD'=0.$$

**573.** Aufgabe IX. Den Durchschnitt einer Geraden und einer Ebene, deren Gleichungen gegeben sind, zu finden.

Diese Aufgabe reducirt sich offenbar darauf, die Werthe für x, y, z zu finden, welche den Gleichungen der Geraden und der Ebene Genüge leisten, was durch die Auflösung dreier Gleichungen des ersten Grades geschieht. Angenommen, man habe die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}x&=az+\alpha\\y&=bz+\beta\end{aligned}\right\}\text{ für die Gerade, und}$$
$$Ax+By+Cz+D=0\text{ für die Ebene.}$$

Daraus erhält man sogleich durch Elimination von x und y,

$$(Aa+Bb+C)z+A\alpha+B\beta+D=0.$$

und somit erhält man als Coordinaten des Durchschnittspunktes

$$z=-\frac{A\alpha+B\beta+D}{Aa+Bb+C},$$
$$x=\alpha-\frac{a(A\alpha+B\beta+D)}{Aa+Bb+C},$$
$$y=\beta-\frac{b(A\alpha+B\beta+D)}{Aa+Bb+C}.$$

Ist $Aa + Bb + C = 0$, so sind diese Werthe unendlich groß; dann ist die Gerade mit der Ebene parallel (Nro. 571). Ist zugleich auch $A\alpha + B\beta + D = 0$, so werden diese Werthe unbestimmt; dieß muß wirklich der Fall sein, denn die Gerade liegt dann ganz in der Ebene (Nro. 569).

## Zweiter Theil: Aufgaben, deren Lösung mit rechtwinkligen Axen einfacher ist.

**574.** Aufgabe X. Die Coordinaten zweier Punkte sind gegeben, man soll die Länge ihrer Verbindungslinie finden.

Es seien x, y, z und x′, y′, z′ die Coordinaten der beiden Punkte M und M′ (Fig. 18), und man soll nun den Abstand MM′ finden. Durch jeden der Punkte lege man mit den Coordinaten-Ebenen drei parallele Ebenen, so entsteht ein Parallelepipedon. Man bezeichne die Diagonale MM′ mit $\delta$, und die anstoßenden Seiten M′F, M′G, M′H mit f, g, h; so sind diese Seiten die Differenzen aus den Coordinaten der Punkte M und M′, nämlich

$$f = x - x', \quad g = y - y', \quad h = z - z'.$$

Sind nun die Coordinaten rechtwinklig, so ist es auch das Parallelepipedon, und dann ist das Quadrat der Diagonale $\delta$ gleich der Summe der Quadrate aus den drei Seiten f, g, h; also

$$\delta^2 = f^2 + g^2 + h^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Liegt der Punkt M′ im Anfangspunkt, so ist $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, und man hat blos

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

**575.** Sind die Coordinaten schief, so ist der Ausdruck für $\delta^2$ verwickelter. Bezeichnet man in diesem Fall die Winkel zwischen den Axen mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so erhält man nach Nro. 535 die Formel

$$\delta^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos\alpha + 2fh\cos\beta + 2gh\cos\gamma;$$

man darf also nur noch für f, g, h ihre Werthe setzen, so erhält man

$$\delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(x-x')(y-y')\cos\alpha + 2(x-x')(z-z')\cos\beta + 2(y-y')(z-z')\cos\gamma.$$ *

---

* Folgendes ist noch ein sehr einfacher Beweis dieser Formel. Man bezeichne die drei Diagonalen M′M, FK, IH mit $\delta$, $\delta'$, $\delta''$. Da nun M′FMK ein Parallelogramm ist, so ist die Summe der Quadrate seiner beiden Diagonalen $\delta$ und $\delta'$ gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten; d. h. es ist $\delta^2 + \delta'^2 = 2M'F^2 + 2M'K^2$. Nun ist $M'F = f$, und im Dreieck GM′K ist $M'K^2 = g^2 + h^2 + 2gh\cos\gamma$; also

[α] $$\delta^2 + \delta'^2 = 2f^2 + 2g^2 + 2h^2 + 4gh\cos\gamma.$$

**576.** Aufgabe XI. Aus einem gegebenen Punkte eine Senkrechte auf eine Ebene zu fällen, und dann den Fußpunkt und die Länge der Senkrechten zu bestimmen.

Um einfachere Resultate zu erhalten, nehme man in dieser und in allen folgenden Aufgaben rechtwinklige Axen an.

Zuerst suche man, welche Relationen zwischen den Coefficienten in den Gleichungen einer Geraden und einer Ebene, wenn die Gerade auf der Ebene senkrecht steht, stattfinden. Angenommen, in der Ebene xz (Fig. 19) sei AC die Spur einer Ebene ACB, und QN die Projection einer auf dieser Ebene Senkrechten MQ. Da MQ senkrecht auf der Ebene ACB steht, so ist auch die Ebene MQN senkrecht auf ACB, und überdieß ist nach dem Wesen der Projectionen die Ebene MQN senkrecht auf der Ebene xOz. Umgekehrt müssen die Ebenen ACB und xOz, und daher auch ihr Durchschnitt AC senkrecht auf der Ebene MQN stehen; also steht AC senkrecht auf Linie NQ, die in der Ebene MQN liegt. Somit stehen überhaupt die Projectionen der Senkrechten auf den Spuren der Ebene senkrecht.

Dieß vorausbemerkt, stelle man die Coordinaten des gegebenen Punktes durch $x'$, $y'$, $z'$, und die Ebene durch die Gleichung dar

$$[1] \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Die Gleichungen der gesuchten Senkrechten haben die Form

$$[2] \qquad x - x' = a\,(z - z'), \quad y - y' = b\,(z - z'),$$

wo a und b unbekannt sind. Für die Spuren der gegebenen Ebene auf den Ebenen xz und yz hat man die Gleichungen

$$x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}, \quad y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}.$$

So eben wurde aber gezeigt, daß diese Spuren auf den Projectionen der gesuchten Geraden senkrecht stehen müssen; also ist

$$-\frac{C}{A} \times a + 1 = 0, \quad -\frac{C}{B} \times b + 1 = 0.$$

---

Ebenso gibt das Parallelogramm M'IMH auch $\delta^2 + \delta''^2 = 2M'H^2 + 2M'I^2$; setzt man h für M'H, und für $M'I^2$ seinen aus dem Dreieck M'FI erhaltenen Werth $f^2 + g^2 + 2fg \cos\alpha$, so ist

$$[\beta] \qquad \delta^2 + \delta''^2 = 2f^2 + 2g^2 + 2h^2 + 4fg \cos\alpha.$$

Ebenso gibt das Parallelogramm FIKH, in welchem $FI = g$, und $FH^2 = f^2 + h^2 - 2fh \cos\beta$,

$$[\gamma] \qquad \delta'^2 + \delta''^2 = 2f^2 + 2g^2 + 2h^2 - 4fh \cos\beta.$$

Addirt man nun die Gleichungen $[\alpha]$ und $[\beta]$, und zieht dann von ihrer Summe die Gleichung $[\gamma]$ ab, so gelangt man leicht zu der betreffenden Formel.

Daraus ergibt sich

$$[3] \qquad a = \frac{A}{C}, \qquad b = \frac{B}{C}, \quad \text{und } A = aC, \quad B = bC.$$

Setzt man diese Werthe für a und b in die Gleichung [2], so erhält man für die Senkrechte die Gleichungen

$$[4] \qquad x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \qquad y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

Um die Coordinaten des Fußpunktes dieser Senkrechten zu bekommen, darf man nur die Gleichungen [1] und [4] nach x, y, z auflösen, und hierauf, um die Länge der Senkrechten zu finden, die Werthe dieser Coordinaten in der Formel

$$[5] \qquad \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$ substituiren.

Es ist jedoch einfacher, die Differenzen $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ unmittelbar zu finden. Zu diesem Zweck schreibe man zuerst die Gleichung [1] in der Form

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

oder vielmehr, indem $Ax' + By' + Cz' + D = D'$ gesetzt wird, in folgender

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + D' = 0.$$

In dieser Gleichung substituire man für $x-x'$ und $y-y'$ die Werthe aus [4], so erhält man eine Gleichung, um $z - z'$ zu finden; hierauf berechnet man $x-x'$ und $y-y'$.

Auf diese Weise findet man

$$x-x' = \frac{-AD'}{A^2+B^2+C^2}, \quad y-y' = \frac{-BD'}{A^2+B^2+C^2}, \quad z-z' = \frac{-CD'}{A^2+B^2+C^2}.$$

Bezeichnet man ferner die Senkrechte mit P, so gibt die Formel [5]

$$P = \frac{D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Da der Werth von P nothwendig positiv sein muß, so ist der Zähler immer ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen zu nehmen.

Liegt der gegebene Punkt im Ursprung, so ist $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, und daher

$$P = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Liegt der Punkt in der gegebenen Ebene, so müssen seine Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ der Gleichung dieser Ebene Genüge leisten; also ist

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

folglich muß auch $P = 0$ sein.

**577.** Aufgabe XII. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht.

Angenommen, die Coordinaten des gegebenen Punktes seien $x'$, $y'$, $z'$, und die Gleichungen der gegeben Geraden

[1] $$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Da die gesuchte Ebene durch den gegebenen Punkt gehen muß, so ist ihre Gleichung von der Form

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0;$$

und da sie auf der Geraden senkrecht stehen soll, so muß (Nro. 576) $A = aC$, $B = bC$ sein. Somit ist die Gleichung dieser Ebene

[2] $$a(x-x') + b(y-y') + z-z' = 0.$$

Sucht man nun aus den Gleichungen [1] und [2] die Werthe für $x$, $y$, $z$, so erhält man die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ebene; und setzt man der Abkürzung wegen

$$n = \frac{a(x'-\alpha) + b(y'-\beta) + z'}{a^2 + b^2 + 1},$$

so findet man

$$z = n, \quad x = an + \alpha, \quad y = bn + \beta.$$

**578.** Aufgabe XIII. Durch einen gegebenen Punkt eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade zu fällen, und dann den Fußpunkt und die Länge dieser Senkrechten zu bestimmen.

Legt man durch den gegebenen Punkt zwei Ebenen, von denen die eine auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, und die andere durch diese Gerade geht, so enthalten sie beide die verlangte Senkrechte; die Gleichungen dieser Ebenen können daher zusammengenommen als die der Senkrechten selbst betrachtet werden. Nach Nro. 577 und 569 sind diese Gleichungen

[1] $$a(x-x') + b(y-y') + z-z' = 0,$$

[2] $$(y' - bz' - \beta)(x - x') - (x' - az' - \alpha)(y - y') + [b(x'-\alpha) - a(y'-\beta)](z-z') = 0.$$

Die Coordinaten des Fußpunktes der Senkrechten sind aber nichts anderes, als die in der vorigen Aufgabe gefundenen Werthe

$$z = n, \quad x = an + \alpha, \quad y = bn + \beta.$$

Somit ist die Länge der Senkrechten

$$p = \sqrt{(x'-\alpha-an)^2 + (y'-\beta-bn)^2 + (z'-n)^2}.$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen läßt sich auch so schreiben:

$$x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2-2[a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z']n+(a^2+b^2+1)n^2.$$

Aber nach dem Werthe von n ist der Theil dieses Ausdrucks, der die doppelten Producte enthält, gleich $-2(a^2+b^2+1)n^2$; folglich erhält man

$$p = \sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2-(a^2+b^2+1)n^2}.$$

Wollte man die Projectionen der Senkrechten suchen, so könnte man sie leicht aus den Gleichungen [1] und [2] ableiten. Man findet sie jedoch auch, wenn man beachtet, daß zwei Punkte dieser Linie, nämlich der gegebene Punkt und der Fußpunkt der Senkrechten bekannt sind, welche beziehungsweise folgende Coordinaten haben:

$$x', y', z' \quad \text{und} \quad n, an+\alpha, \quad bn+\beta.$$

Somit sind die Gleichungen der gesuchten Projectionen

$$x - x' = \frac{x' - \alpha - an}{z'-n}(z-z'),$$

$$y - y' = \frac{y' - \beta - bn}{z'-n}(z-z').$$

**379.** Aufgabe XIV. Die Gleichungen zweier Geraden sind gegeben; man soll 1) die Gleichungen der Geraden, welche ihren kürzesten Abstand mißt, 2) den Ausdruck für diesen kürzesten Abstand finden.

Es seien (Fig. 20) AB und CD die zwei gegebenen Geraden, und PQ ihr kürzester Abstand. Nun ist einmal die Linie PQ eine gerade, sonst wäre die Gerade, welche die Punkte P und Q verbindet, kürzer. Dann steht die Linie PQ auf AB und CD senkrecht; denn wäre sie z. B. auf CD nicht senkrecht, so müßte die von P auf CD gefällte Senkrechte kürzer sein als PQ. Da also PQ auf AB und CD senkrecht steht, so muß, wenn durch die Gerade AB eine Ebene UV parallel mit CD gelegt wird, die PQ auf dieser Ebene senkrecht stehen; also liegt sie in den beiden Ebenen ABR und CDS, die durch AB und CD senkrecht auf UV gelegt sind. Die Linie PQ ist also der Durchschnitt dieser Ebenen, und ihre Gleichungen sind die dieser Ebenen selbst.

Betreffend die Länge von PQ, so ist sie gleich der von einem beliebigen Punkte der Geraden CD auf die Ebene UV gefällten Senkrechten. Somit ist der in der Rechnung einzuschlagende Gang vollständig angedeutet.

Es seien

[1] $\begin{cases} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{cases}$ [2] $\begin{cases} x = \alpha' z + \alpha', \\ y = b' z + \beta', \end{cases}$

die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden. Sie schneiden die Ebene xy in Punkten, die wir mit T und T′ bezeichnen wollen, und deren Coordinaten sind

$$z = 0, \quad x = \alpha, \quad y = \beta \text{ für den Punkt T;}$$
$$z = 0, \quad x = \alpha', \quad y = \beta' \text{ für den Punkt T'.}$$

Man suche zuerst die Gleichung der Ebene, welche die erste Gerade enthält und mit der zweiten parallel ist. Da diese Ebene durch den Punkt T gehen muß, so läßt sich ihre Gleichung also schreiben:

[3] $$A(x-\alpha) + B(y-\beta) + z = 0,$$

wo A und B unbekannt sind. Damit diese Ebene die erste Gerade enthalte, müssen die Werthe [1] von x und y der Gleichung [3] für jede Coordinate z Genüge leisten; somit erhält man die Bedingung

$$Aa + Bb + 1 = 0;$$

und damit sie mit der zweiten parallel laufe, muß die Bedingung stattfinden (Nro. 571)

$$Aa' + Bb' + 1 = 0.$$

Diese beiden Relationen bestimmen A und B, und man erhält

$$A = \frac{b - b'}{ab' - ba'}, \qquad B = \frac{a' - a}{ab' - ba'}.$$

Nun lege man durch die gegebenen Geraden Ebenen, welche auf der Ebene der Gleichungen [3] senkrecht stehen; von diesen Ebenen muß deßhalb jede eine auf letzterer Ebene senkrechte Gerade enthalten. Die Gleichungen der beiden durch die Punkte T und T′ auf diese Ebene gefällten Senkrechten sind Nro. 576

$$x = Az + \alpha, \quad y = Bz + \beta \text{ für die erste,}$$
$$x = Az + \alpha', \quad y = Bz + \beta' \text{ für die zweite.}$$

Die Gleichung einer Ebene, welche durch die erste gegebene Gerade und durch die erste Senkrechte geht, hat die Form

[A] $$A'(x-\alpha) + B'(y-\beta) + z = 0:$$

und zur Bestimmung von A′ und B′ hat man die beiden Gleichungen

[4] $$AA' + BB' + 1 = 0, \quad aA' + bB' + 1 = 0.$$

Ebenso ist die Gleichung der Ebene, die durch die zweite Gerade und durch die zweite Senkrechte geht

[A′] $$A''(x-\alpha') + B''(y-\beta') + z = 0,$$

wo A″ und B″ durch die beiden Gleichungen

[5] $$AA'' + BB'' + 1 = 0, \qquad a'A'' + b'B'' + 1 = 0$$

gegeben sind.

Zieht man aus den Gleichungen [4] und [5] A', B' und A'', B'', und setzt dann für A und B ihre Werthe, so ergibt sich

$$A' = \frac{a-a'+b(ab'-ba')}{a(a'-a)+b(b'-b)}, \qquad B' = \frac{b-b'-a(ab'-ba')}{a(a'-a)+b(b'-b)};$$

$$A'' = \frac{a-a'+b'(ab'-ba')}{a'(a'-a)+b'(b'-b)}, \qquad B'' = \frac{b-b'-a'(ab'-ba')}{a'(a'-a)+b'(b'-b)}.$$

Setzt man diese Werthe in [A] und [A'], so erhält man die Gleichungen der gesuchten Geraden, welche den kürzesten Abstand mißt. Man findet nämlich

$$[a-a'+b(ab'-ba')](x-\alpha)+[b-b'-a(ab'-ba')](y-\beta)+[a(a'-a)+b(b'-b)]z=0,$$

$$[a-a'+b'(ab'-ba')](x-\alpha')+[b-b'-a'(ab'-ba')](y-\beta')+[a'(a'-a)+b'(b'-b)]z=0.$$

Dabei ist zu bemerken, daß die zweite Gleichung auch aus der ersten hätte abgeleitet werden können, wenn man a, b, $\alpha$, $\beta$ in a', b', $\alpha'$, $\beta'$, und a', b' in a, b verwandelt hätte.

Es ist jetzt nur noch die Länge des kürzesten Abstandes zu finden. Nach der obigen Erklärung muß man von einem Punkt der zweiten Geraden eine Senkrechte auf die Ebene der Gleichung [3] fällen. Größerer Einfachheit halber fällt man sie vom Punkte T' aus, für welchen

$$z=0, \quad x=\alpha', \quad y=\beta' \text{ ist};$$

dann gibt die allgemeine Formel (Nro. 576), welche den Abstand eines Punktes von einer Ebene ausdrückt:

$$P = \frac{A(\alpha'-\alpha)+B(\beta'-\beta)}{\sqrt{A^2+B^2+1}};$$

und setzt man darin die Werthe für A und B, so ergibt sich

$$P = \frac{(\alpha'-\alpha)(b-b')-(\beta'-\beta)(a-a')}{\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2}}$$

als Ausdruck für den kürzesten Abstand der beiden Geraden.

Wenn sich zwei Gerade treffen, so ist der auf der gemeinschaftlichen Senkrechten zwischen diesen beiden Linien enthaltene Theil gleich Null; also hat man

$$(\alpha'-\alpha)(b-b')-(\beta'-\beta)(a-a')=0,$$

welche Gleichung schon (Nro. 566) gefunden wurde, um den Durchschnitt zweier Geraden auszudrücken.

**380.** Aufgabe XV. Die Gleichungen einer Geraden sind gegeben; man soll die Winkel bestimmen, welche diese Gerade mit den Coordinaten-Axen bildet.

Durch den Anfangspunkt O (Fig. 21) ziehe man OM parallel mit der gegebenen Geraden; nun handelt es sich darum, die Winkel MOx, MOy, MOz, die mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet seien, zu bestimmen.

Man setze OM = 1 und fälle auf die Axen die Senkrechten MP, MQ, MR: nun sind die Abstände OP, OQ, OR mit den ihnen zukommenden Vorzeichen zugleich die Coordinaten des Punktes M und die Cosinus der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Es seien

$$x = az, \quad y = bz$$

die Gleichungen der Parallele OM, und x' y', z' die Coordinaten des Punktes M; da dieser Punkt auf OM liegt, und diese Linie gleich 1 gesetzt wurde, so ist

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1;$$

und aus diesen Gleichungen findet man die Werthe für x', y', z', oder für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

So erhält man die Formeln:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Die Parallele OM und ihre Verlängerung OM' bilden mit den Axen verschiedene Winkel; da wir aber den Werth z' positiv genommen haben, so müssen diese Formeln Winkel geben, die auf der Seite der positiven Coordinaten von dem Theil der Parallele gebildet sind, der in Beziehung auf die Ebene xy mit den positiven z auf derselben Seite liegt.

**581.** Aufgabe XVI. Den Winkel zu finden, den zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden einschließen.

Zieht man durch den Anfangspunkt Parallelen mit diesen zwei Geraden, so ist der zwischen diesen Parallelen enthaltene Winkel gleich dem gesuchten. Es seien (Fig. 22) OM und OM' diese beiden Parallelen, und

$x = az$, $y = bz$ die Gleichungen der ersten;

$x = a'z$, $y = b'z$ die Gleichungen der zweiten.

Auf der Seite der positiven z nehme man OM = OM', und setze den unbekannten Winkel MOM' = V; nun gibt das Dreieck MOM'

$$\cos V = \frac{OM^2+OM'^2-MM'^2}{2OM \times OM'} = \frac{2 - MM'^2}{2}.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes M mit x', y', z', und die des Punktes M' mit x'', y'', z'', so ist

$$MM'^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2.$$

Entwickelt man diese Quadrate, und beachtet daß

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \text{ und } x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1,$$

so erhält man

$$MM'^2 = 2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'');$$

und somit

$$\cos V = x'x'' + y'y'' + z'z''.$$

Nun erhält man leicht $x'$, $y'$, $z'$, $x''$, $y''$, $z''$; denn da der Punkt M auf der ersten Parallele liegt, und OM gleich 1 ist, so hat man

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

und hieraus ergibt sich

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Ebenso findet man

$$x'' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}, \quad y'' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}, \quad z'' = \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Folglich erhält man cos V, indem man für $x'$, $y'$ ꝛc. ihre Werthe setzt, nämlich:

$$\cos V = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Da die Werthe für $z'$ und $z''$ positiv genommen sind, so muß diese Formel den Winkel ergeben, der von den obern Theilen der mit den gegebenen Geraden Parallelen eingeschlossen ist, und dieser Winkel ist spitzig oder stumpf, je nach dem Vorzeichen des Zählers $aa' + bb' + 1$.

**582.** Bilden die beiden gegebenen Geraden einen rechten Winkel, so ist $\cos V = 0$, und daher

$$aa' + bb' + 1 = 0.$$

Es ist wohl zu beachten, daß aus dieser Bedingung das Zusammentreffen der gegebenen Geraden noch nicht folgt; denn sie drückt blos aus, daß die mit diesen Geraden Parallelen einen rechten Winkel bilden. Dieß hat man auch wirklich darunter zu verstehen, wenn gesagt wird, daß zwei im Raume befindlichen Geraden senkrecht auf einander stehen.

Soll eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade gefällt werden, so muß zur vorigen Gleichung diejenige, wodurch der Durchschnitt zweier Geraden bestimmt wird (Nro. 566) hinzugefügt werden. Man kann so neue Auflösungen für die Aufgaben XIII und XIV erhalten.

**383.** Sind die Geraden parallel, so muß $V = 0$ oder $= 180^0$ sein, also $\cos V = \pm 1$; daher

$$\pm \sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{a'^2+b'^2+1} = aa' + bb' + 1.$$

Erhebt man den Ausdruck ins Quadrat, und bringt ihn auf eine Seite, so ergibt sich

$$(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (ab'-ba')^2 = 0.$$

Mit dieser Bedingung ist noch eine andere zu verbinden, daß nämlich die Größen a, b, a', b', reell sind. Dann können die Quadrate, aus denen die obige Gleichung besteht, nicht negativ sein, und ihre Summe wird erst Null, wenn man jedes derselben gleich Null setzt; so erhält man

$$a' = a, \quad b' = b, \quad ab' = a'b.$$

Diese Bedingungen, von denen die dritte eine Folge der beiden ersten ist, drücken wirklich aus, daß Gerade parallel sind.

**384.** Läßt man die Linie OM' nach einander mit jeder der Axen zusammenfallen, so gibt die allgemeine Formel die Cosinus der von der Geraden OM mit den Axen eingeschlossene Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Die Gleichungen der Axe der x sind

$$z = 0, \quad y = 0;$$

und die der Linie OM' lassen sich so schreiben

$$z = \frac{1}{a'}x, \quad y = \frac{b'}{a'}x;$$

damit sie also mit der Axe der x zusammenfalle, setzt man

$$\frac{1}{a'} = 0, \qquad \frac{b'}{a'} = 0.$$

Ehe jedoch diese Annahmen in den allgemeinen Ausdruck für cos V eingeführt werden, bringe man denselben in folgende Form

$$\cos V = \frac{a + b\frac{b'}{a'} + \frac{1}{a'}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{1 + \frac{b'^2}{a'^2} + \frac{1}{a'^2}}};$$

und dann erhält man mittelst der obigen Annahmen

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Ebenso leicht findet man die Werthe für cos $\beta$ und cos $\gamma$, ähnlich denen in Aufgabe XV.

**385.** Nehmen wir noch einmal den oben (Nro. 581) gefundenen Ausdruck $\cos V = x'x'' + y'y'' + z'z''$, und bezeichnen die Winkel der Geraden OM und OM' mit den Axen mit $\alpha, \beta, \gamma$, und $\alpha', \beta', \gamma'$. Da $OM = OM' = 1$ gesetzt wurde, so ist

$$x' = \cos\alpha, \quad y' = \cos\beta, \quad z' = \cos\gamma \text{ u. s. w.:}$$

so kommt man wieder auf die schon (Nro. 533) bekannte Formel

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Da außerdem

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \quad \text{und} \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1,$$

so findet man hier wieder die aus Nro. 530 bekannten Formeln, nämlich $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$.

**386.** Aufgabe XVII. Die Gleichung einer Ebene sei gegeben; man soll die Winkel finden, die sie mit den Coordinaten-Ebenen bildet.

Diese Winkel sind gleich denjenigen, welche eine auf der Ebene stehende Senkrechte mit den drei Axen bildet. Es seien nun

$Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der gegebenen Ebene,

$x = az$, $y = bz$ die der Senkrechten:

Die Cosinus der von dieser Geraden mit den Axen gebildeten Winkel sind durch die Formeln in Nro. 580 gegeben. Es ist aber (Nro. 576) $a = \frac{A}{C}$, $b = \frac{B}{C}$; setzt man nun diese Werthe in die angeführten Formeln, so erhält man für die gesuchten Winkel

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Auch erhält man, wie für die Gerade,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

welche Relation übrigens schon durch die frühern Werthe befriedigt wurde.

**387.** Aufgabe XVIII. Den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen. Der Winkel zweier Ebenen ist gleich dem Supplement des von zwei auf diesen Ebenen stehenden Senkrechten gebildeten Winkels.

Es seien nun

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

die Gleichungen der beiden Ebenen, und

$$x = az, \quad y = bz, \quad \text{und } x = a'z, \quad y = b'z$$

die Gleichungen der Senkrechten. Nun ist Nro. 576

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}, \qquad a' = \frac{A'}{C'}, \quad b' = \frac{B'}{C'},$$

und durch Substitution dieser Werthe in der Formel, in welcher der Winkel von zwei Geraden bestimmt wird (Nro. 581), ergibt sich für den Winkel zwischen den Ebenen

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

**588.** Sollen die Ebenen senkrecht auf einander stehen, so muß $\cos V = 0$ sein, d. h. es ist dann

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

**589.** Sollen die Ebenen parallel sein, so muß $\cos V = \pm 1$ werden, dann ist

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2} = AA' + BB' + CC';$$

woraus sich bei ähnlichen Schlüssen, wie in Nro. 583, ableiten ließe

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

**590.** Da die Winkel, welche eine Ebene mit den Coordinaten-Ebenen bildet, dieselben sind, wie die, welche eine auf dieser Ebene stehende Senkrechte mit den drei Axen bildet, so ist für den Winkel zweier Ebenen, wie für den zweier Geraden

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

wo $\alpha, \beta, \gamma$ und $\alpha', \beta', \gamma'$ die von diesen Ebenen mit den Coordinaten-Ebenen gebildeten Winkel sind. Auch muß zwischen diesen Winkeln die Relation stattfinden

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1.$$

**591.** Aufgabe XIX. Den Winkel zu finden, den eine Gerade mit einer Ebene bildet.

Fällt man eine Senkrechte auf die Ebene, so bildet sie mit der gegebenen Geraden einen Winkel, der gleich dem Complement des gesuchten Winkels ist.

Es seien

$Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der Ebene,

$x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ die Gleichungen der Geraden.

Die Gleichungen einer auf der Ebene stehenden Senkrechten sind

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta',$$

wo $a' = \frac{A}{C}$, $b' = \frac{B}{C}$ gesetzt ist. Bringt man diese Werthe in die Formel, welche den Cosinus des Winkels zweier Geraden ausdrückt (Nro. 581), so erhält man den Sinus des gesuchten Winkels. Heißt man diesen Winkel U, so findet man:

$$\sin U = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Läuft die gegebene Gerade mit der Ebene parallel, so ist $\sin U = 0$, also $Aa + Bb + C = 0$, welches die bekannte Bedingung ist (Nro. 571).

Steht die Gerade senkrecht auf der Ebene, so ist $\sin U = 1$, dann findet man wieder mittelst der nämlichen Folgerungen wie in Nro. 583, $A = aC$, $B = bC$ (Nro. 576).

# Viertes Kapitel.

## Transformation der Coordinaten im Raume.

---

### Besondere Formeln für die verschiedenen Fälle.

**392.** Formeln für den Uebergang zu parallelen Axen. Es seien (Fig. 23) Ox, Oy, Oz die alten Axen, und O′x′, O′y′, O′z′ parallele Axen. Man bezeichne die Coordinaten des neuen auf die früheren Axen bezogenen Ursprungs O′ mit f, g, h; die eines beliebigen Punktes M in Beziehung auf diese Axen mit x, y, z, und die Coordinaten desselben, aber auf die neuen Axen bezogenen Punktes mit x′, y′ z′. Angenommen, die Ebene z′O′y′ treffe die Axe Ox im Punkte A, und eine durch den Punkt M gelegte parallele Ebene schneide dieselbe Axe in P, und die ihr parallele Axe in P′. Nun ist $OA = f$, $OP = x$, $O'P' = AP = x'$, und offenbar ist nun $x = x' + f$. Ebenso findet sich

$$y = y' + g, \quad \text{und} \quad z = z' + h.$$

Um daher zu parallelen Axen überzugehen, hat man die Formeln

[1] $$x = x' + f, \quad y = y' + g, \quad z = z' + h,$$

wo jede Coordinate mit dem ihrer Lage zukommenden Vorzeichen zu nehmen ist.

**393.** Bemerkung. Zieht man durch den Punkt O′ drei Axen in neuen Richtungen, und es sollen x, y, z in Coordinaten x″, y″, z″, die auf diesen letzteren Axen genommen sind, ausgedrückt werden, so genügt es offenbar, daß man die Werthe von x′, y′, z′ in Functionen von x″, y″, z″ ausdrückt und hiezu noch die Größen f, g, h addirt. Deßwegen nehmen wir im Verlaufe dieses Kapitels an, der Anfangspunkt bleibe immer derselbe.

**594.** Allgemeine Formeln für die Veränderung der Axen-Richtung.

Es seien (Fig. 24) Ox, Oy, Oz drei beliebige Axen, und Ox', Oy', Oz' drei andere Axen; x, y, z die Coordinaten eines beliebigen auf erstere bezogenen Punktes M, und x', y', z' die des nämlichen auf letztere Axen bezogenen Punktes. Man ziehe parallel mit der Axe der z die Gerade MQ, welche die Ebene xy in Q trifft, dann parallel mit der Axe der y die Gerade QP, welche die Axe der x in P trifft: nun ist

$$OP = x, \quad PQ = y, \quad QM = z.$$

Auf ähnliche Weise läßt sich

$$OP' = x', \quad P'Q' = y', \quad Q'M = z'$$

construiren.

Durch den Ursprung denke man sich (ohne sie zu ziehen, damit die Figur nicht zu verwickelt werde) drei Gerade oder Hilfsaxen OA, OB, OC gezogen, nämlich OA senkrecht auf die Ebene yz, OB senkrecht auf xz, und OC senkrecht auf xy; dann projicire man auf jede dieser Axen die beiden Umfänge $x + y + z$, und $x' + y' + z'$. Da nun die Axe OA senkrecht auf y und auf z steht, so sind die Projectionen dieser Coordinaten auf dieser Axe Null; somit reducirt sich die Projection des ersten Umfangs auf $x \cos xOA$. Die des zweiten Umfangs ist

$$x' \cos x'OA + y' \cos y'OA + z' \cos z'OA$$

(Nro. 526). Aber die beiden Projectionen müssen offenbar einander gleich sein; also ist

$$x \cos xOA = x' \cos x'OA + y' \cos y'OA + z' \cos z'OA.$$

Aus dieser Formel erhält man x als Function von x', y', z'; ähnliche ergeben sich für y und z, wenn man die Projectionen auf OB und OC nimmt.

Man bezeichne nun überhaupt den Winkel zwischen zwei Geraden dadurch, daß man die zu diesen Geraden gehörigen Buchstaben in Klammern setzt, so daß z. B. die Winkel xOA, x'OA u. s. w. durch (xA), (x'A) u. s. w. ausgedrückt werden.

Dann lassen sich die drei Formeln also schreiben:

$$[2] \quad \begin{cases} x\cos(xA) = x'\cos(x'A) + y'\cos(y'A) + z'\cos(z'A), \\ y\cos(yB) = x'\cos(x'B) + y'\cos(y'B) + z'\cos(z'B), \\ z\cos(zC) = x'\cos(x'C) + y'\cos(y'C) + z'\cos(z'C). \end{cases}$$

Da es selten nöthig ist, daß man schiefe Axen in andere schiefe Axen umändert, so wird von diesen Formeln auch wenig Gebrauch gemacht.

**595.** Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in schiefe. Bei dem Vorigen kann man die Axen der x, y, z als senkrecht

gegen einander annehmen; dann fallen die Hilfslinien OA, OB, OC mit diesen Axen zusammen, und es ist

$$\cos(xA) = 1, \quad \cos(yB) = 1, \quad \cos(zC) = 1;$$

ferner muß man statt der Buchstaben A, B, C überall x, y, z setzen.

Zur Abkürzung setze man

$$\cos(x'x) = a, \quad \cos(x'y) = a', \quad \cos(x'z) = a'',$$
$$\cos(y'x) = b, \quad \cos(y'y) = b', \quad \cos(y'z) = b'',$$
$$\cos(z'x) = c, \quad \cos(z'y) = c', \quad \cos(z'z) = c'';$$

dann heißen die gesuchten Formeln

$$[3] \qquad \begin{cases} x = ax' + by' + cz', \\ y = a'x' + b'y' + c'z', \\ z = a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Die drei Winkel, welche die Richtung von jeder der neuen Axen bestimmen, sind nicht ganz willkührlich; denn nach bekannten Relationen (Nro. 530, 585) muß

$$[a] \qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \text{ sein.} \end{cases}$$

**596.** Bemerkung. Löst man die Gleichungen [3] nach x', y', z' auf, so erhält man passende Formeln für die Verwandlung schiefwinkliger Coordinaten in rechtwinklige.

Ferner können diese neuen Formeln in Verbindung mit den vorhergehenden [3] zum Uebergang von schiefwinkligen Axen zu andern schiefwinkligen gebraucht werden. Denn man darf nur zwei auf einander folgende Umformungen vornehmen: die erste zur Verwandlung des schiefwinkligen Systems in ein rechtwinkliges, und die zweite, um das letztere in ein anderes schiefwinkliges System umzuformen.

**597.** Verwandlung rechtwinkliger Axen in andere rechtwinklige. Hiezu gebraucht man dieselben Formeln, wie in Nro. 595:

$$[4] \qquad \begin{cases} x = ax' + by' + cz', \\ y = a'x' + b'y' + c'z', \\ z = a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Die neuen Axen müssen aber auch als rechtwinklige dargestellt werden; deßhalb setzt man die Ausdrücke $\cos(x'y')$, $\cos(x'z')$, $\cos(y'z')$ als Functionen der Cosinus a, b, c u. s. w. gleich Null (Nro. 533, 585). Stellt man diese neuen Bedingungsgleichungen mit den drei schon vorhandenen zusammen, so hat man im Ganzen sechs, nämlich:

$$[a]\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \end{cases} \qquad [b]\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man aus den neun Cosinus a, a′, a″, b, .... sechs finden. Wir werden indessen sogleich neue Relationen kennen lernen, welche aus jenen abgeleitet und vielfach angewendet werden.

**598.** Beachten wir zuerst, daß die beiden Axensysteme rechtwinklig sind, so folgt daraus, daß sich x′, y′, z′ durch ähnliche Formeln wie die vorigen [4] in x, y, z ausdrücken lassen. Denn beachtet man, welche Cosinus mit a, a′, a″, b, b′, b″, c, c′, c″ bezeichnet wurden, und projicirt die drei Coordinaten x, y, z auf die Axe Ox′, dann auf die Axe Oy′, dann auf die Axe Oz′, so ergibt sich

$$[5]\quad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z, \\ y' = bx + b'y + b''z, \\ z' = cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

Diese Werthe lassen sich auch mittelst der Gleichungen [4] finden. Um z. B. x′ zu erhalten, multiplicirt man sie beziehungsweise mit a, a′, a″, und addirt sie, so erhält man mit Berücksichtigung der Relationen [a] und [b] $x' = ax + a'y + a''z$. Auf dieselbe Weise ergibt sich y′ und z′.

**599.** Zwischen den Coefficienten dieser Werthe müssen ebenfalls sechs Relationen stattfinden, die den zwischen den Coefficienten der Werthe [4] von x, y, z gefundenen analog sind; diese Relationen lassen sich übrigens auch direct finden. Einmal ist klar, daß a, b, c die Cosinus der von der Axe der x mit den Axen der x′, y′, z′ gebildeten Winkel sind, und da diese rechtwinklig sind, so muß $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ sein. Dasselbe gilt von a′, b′, c′, und a″, b″, c″. Dann hat der Winkel (xy) zum Cosinus $aa' + bb' + cc'$; da aber dieser Winkel ein rechter ist, so ist $aa' + bb' + cc' = 0$. Ebenso ist es bei den Winkeln (xz) und (yz). Zugleich mit den Gleichungen [a] und [b] hat man also die folgenden:

$$[c]\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{cases} \qquad [d]\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{cases}$$

Auf geometrischem Wege könnte man auch noch zu andern Gleichungen gelangen; dabei würden sich aber in Betreff einiger zweideutiger Vorzeichen Schwierigkeiten ergeben. Man führt sie deßhalb lieber als Folgerungen aus den Gleichungen [a] und [b] auf, was der Zweck des folgenden Lehrsatzes ist, in welchem sich auch die letzten Gleichungen [c] und [d] wieder finden.

## Von den Bedingungsgleichungen zwischen den neun Coefficienten a, a′ u. s. w.

**600.** Lehrsatz. Welches auch die neun Größen a, a′, a″, b, b′, b″, c, c′, c″ sein mögen, und sie genügen den sechs Gleichungen:

$$[a]\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad [b]\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0; \end{cases}$$

so müssen sie auch den folgenden Genüge leisten:

$$[c]\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad [d]\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0; \end{cases}$$

ferner noch den zehn folgenden, in welchen entweder die obern Vorzeichen, oder auch die untern zusammen zu nehmen sind:

$$[e]\quad \begin{cases} b'c'' - c'b'' = \pm a, & cb'' - bc'' = \pm a', & bc' - cb' = \pm a'', \\ c'a'' - a'c'' = \pm b, & ac'' - ca'' = \pm b', & ca' - ac' = \pm b'', \\ a'b'' - b'a'' = \pm c, & ba'' - ab'' = \pm c', & ab' - b'a = \pm c'', \\ ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = \pm 1. \end{cases}$$

Zum Beweise dieses Satzes nehmen wir mit Poisson drei Unbestimmte x′, y′, z′ an, und setzen

$$[\alpha]\quad \begin{cases} ax' + by' + cz' = x, \\ a'x' + b'y' + c'z' = y, \\ a''x' + b''y' + c''z' = z, \end{cases}$$

wo auch x′ y′ z unbestimmte Größen sind. Erhebt man diese Gleichungen ins Quadrat und addirt sie, so ergibt sich, mit Berücksichtigung der Relationen [a] und [b]

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Man kann auch $x'^2 + y'^2 + z'^2$ erhalten, indem man aus den Gleichungen [α] die Werthe für x′, y′, z′ sucht und ihre Quadrate addirt. Diese Werthe selbst lassen sich nun auf zwei verschiedene Arten berechnen.

Erstens kann man die Gleichungen [α] beziehungsweise mit a, a′, a″ multipliciren und dann addiren; so findet man mit steter Berücksichtigung der Relationen [a] und [b] $x' = ax + a'y + a''z$. Ebenso würde sich y′ und z′ durch Addition derselben Gleichungen ergeben, nachdem sie vorher beziehungsweise mit b, b′, b″, oder mit c, c′, c″ multiplicirt werden. So erhält man

$$\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z, \\ y' &= bx + b'y + b''z, \\ z' &= cx + c'y + c''z, \end{aligned}$$

und somit ist

$$x'^2+y'^2+z'^2=(a^2+b^2+c^2)x^2+(a'^2+b'^2+c'^2)y^2+(a''^2+b''^2+c''^2)z^2$$
$$+2(aa'+bb'+cc')xy+2(aa''+bb''+cc'')xz+2(a'a''+b'b''+c'c'')yz.$$

Dieser Ausdruck muß mit dem oben gefundenen identisch sein; also müssen die Coefficienten von $x^2$, $y^2$, $z^2$ gleich der Einheit, und die der Producte $xy$, $xz$, $yz$ gleich Null sein. Somit ist die Richtigkeit der Relationen [c] und [d] bewiesen.

Zweitens kann man, wie Lacroix gethan, aus den Gleichungen [α] die Werthe $x'$, $y'$, $z'$ entnehmen, wie dieß gewöhnlich bei der Auflösung dreier Gleichungen des ersten Grades geschieht, und auf diese Weise, indem man

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=\lambda$$

setzt, erhält man

$$x'=\frac{b'c''-c'b''}{\lambda}x+\frac{cb''-bc''}{\lambda}y+\frac{bc'-cb'}{\lambda}z,$$

$$y'=\frac{c'a''-a'c''}{\lambda}x+\frac{ac''-ca''}{\lambda}y+\frac{ca'-ac'}{\lambda}z,$$

$$z'=\frac{a'b''-b'a''}{\lambda}x+\frac{ba''-ab''}{\lambda}y+\frac{ab'-ba'}{\lambda}z.$$

Diese Werthe müssen mit den oben erhaltenen identisch sein; somit hat man

$$b'c''-c'b''=a\lambda,\quad cb''-bc''=a'\lambda,\quad bc'-cb'=a''\lambda,$$
$$c'a''-a'c''=b\lambda,\quad ac''-ca''=b'\lambda,\quad ca'-ac'=b''\lambda,$$
$$a'b''-b'a''=c\lambda,\quad ba''-ab''=c'\lambda,\quad ab'-ba'=c''\lambda.$$

Um die Relationen [e] zu erhalten, ist also nur zu zeigen, daß $\lambda=\pm 1$. Zu diesem Zwecke addire man die Quadrate der Gleichungen, aus welchen die erste Reihe der neun obigen Gleichungen besteht, und beachte, daß $a^2+a'^2+a''^2=1$, so ergibt sich

$$\lambda^2=(b'c''-c'b'')^2+(cb''-bc'')^2+(bc'-cb')^2$$
$$=(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2)-(bc+b'c'+b''c'')^2.$$

Aber wegen der gegebenen Relationen [a] und [b] reducirt sich das letzte Glied auf die Einheit, also ist $\lambda=\pm 1$, und folglich sind auch die Gleichungen [e] bewiesen.

Es ist wohl zu beachten, daß in diesem ganzen Beweis die Größen $a$, $a'$, $a''$, ... nur den in den Gleichungen [a] und [b] ausgedrückten Bedingungen untergeordnet wurden, so daß sie überdieß ohne Unterschied positiv oder negativ, größer oder kleiner als die Einheit, imaginär oder reell sein können. Es wäre also eine unnöthige Beschränkung, wenn man sie, wie es einige Schriftsteller gethan, als Cosinus betrachten wollte.

### Euler'sche Formeln, um mittelst dreier Winkel $\varphi, \theta, \psi$ von rechtwinkligen Axen auf andere rechtwinklige überzugehen.

**601.** Da die Verwandlung rechtwinkliger Axen in andere rechtwinklige am häufigsten angewendet wird, so haben die Mathematiker die für diese Fälle geeigneten Formeln in sehr verschiedener Gestalt aufgestellt. Die oben (Nro. 597) gegebenen sind zwar sehr einfach, und haben den Vortheil, daß sie auf symmetrische Rechnungen führen: es ist jedoch mit denselben der Uebelstand verbunden, daß sie immer auf Bedingungsgleichungen beruhen, die in der Rechnung zu berücksichtigen sind. Dieß kommt einzig daher, weil diese Werthe neun constante Größen enthalten, während zur Bestimmung der neuen Axen-Richtung deren eigentlich nur drei nöthig sind. Deßhalb wollen wir uns genau auf diese Anzahl von gegebenen Größen beschränken, und mit Euler drei Winkel $\varphi, \theta, \psi$ annehmen, nämlich (Fig. 25)

$\varphi$ = Winkel ROx zwischen der Axe der x und der Spur OR der Ebene x'y' auf xy;

$\theta$ = Neigungswinkel der Ebene x'y' mit der Ebene xy.

$\psi$ = Winkel ROx' zwischen der Axe der x' und der Spur OR.

Um zu den Formeln zu gelangen, welche nur diese gegebenen Größen enthalten, gibt es nun mehrere Mittel; das folgende besteht darin, daß man die Werthe der neun Cosinus in Functionen der drei Winkel $\varphi, \theta, \psi$ sucht.

Man nehme O als den Mittelpunkt einer Kugel an, deren Oberfläche von den Linien Ox, OR, Ox', Oy, Oz in den Punkten A, B, C, D, E getroffen wird, und construire die sphärischen Dreiecke ABC, BDC, BCE. Denkt man sich die Bögen und Winkel in Graden ausgedrückt, so ist

$$AB = \varphi, \quad BD = 90^0 - \varphi, \quad BC = \psi, \quad BE = 90^0,$$
$$CBD = \theta, \quad CBA = 180^0 - \theta, \quad CBE = 90^0 - \theta.$$

Nehmen wir nun die bekannte Formel (Nro. 93)

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

in welcher $\alpha, \beta, \gamma$ die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks, und A der Gegenwinkel von $\alpha$ ist. Bei der Anwendung dieser Formel auf die Dreiecke ABC, BDC, BCE erhält man leicht cos CA, cos CD, cos CE, d. h. a, a', a'', nämlich

$$a = \cos CA = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,$$
$$a' = \cos CD = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,$$
$$a'' = \cos CE = \sin\psi\sin\theta.$$

Aus diesen Werthen lassen sich die von b, b', b'', c, c', c'' leicht ableiten. Denn verwandelt man zuerst $\psi$ in $90 + \psi$, so fällt die Linie

Ox′ auf Oy′, und dadurch verwandeln sich die Werthe von a, a′, a″ in die von b, b′, b″, nämlich

$$\begin{aligned} b &= -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\theta, \\ b' &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta, \\ b'' &= \cos\psi \sin\theta. \end{aligned}$$

Setzt man hierauf in den Werthen von a, a′, a″ für $\theta$ noch $90^0+\theta$, so verwandelt sich die Ebene x′OR in z′OR, und macht man außerdem $\psi = 90^0$, so verwandelt sich die Linie Ox′ in Oz′, und man erhält so

$$\begin{aligned} c &= \sin\varphi \sin\theta, \\ c' &= -\cos\varphi \sin\theta, \\ c'' &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Substituirt man alle diese Werthe in den Formeln [4] von Nro. 597, so ergibt sich

$$[6] \quad \begin{cases} x = x'(\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) \\ \quad - y'(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta) + z' \sin\varphi \sin\theta, \\ y = x'(\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta) \\ \quad - y'(\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) - z' \cos\varphi \sin\theta, \\ z = x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta. \end{cases}$$

Dieß sind die Euler'schen Formeln. Ihre Allgemeinheit erleidet nur eine kleine Beschränkung, welche daher rührt, daß man bei der Berechnung von b, b′, b″ angenommen hat, der Theil der Axe, auf welchem die positiven Werthe von y′ genommen werden, liege in Beziehung auf die Spur OR um $90^0$ über der Axe der x′ hinaus. Wollte man sie auf der entgegengesetzten Seite $Oy_1$ nehmen, so müßte man beim Uebergang von den Ausdrücken für a, a′, a″ zu denen für b, b′, b″ für $\psi$ nicht $90^0+\psi$, sondern $270^0+\psi$ setzen; oder was einfacher ist, man würde in den Formeln [6] die Vorzeichen der Glieder mit y′ ändern.

**602.** Nimmt man die Spur OR als Linie der x′ an, so vereinfachen sich die Formeln bedeutend; dann wird $\psi = 0$, wodurch sie sich auf folgende reduciren:

$$[7] \quad \begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \cos\theta + z' \sin\varphi \sin\theta, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \cos\theta - z' \cos\varphi \sin\theta, \\ z = y' \sin\theta + z' \cos\theta. \end{cases}$$

### Formeln für den Durchschnitt einer Fläche und einer Ebene.

**603.** Ist die Gleichung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ gegeben, und es soll der Durchschnitt dieser Fläche mit einer Ebene gefunden werden, so kommt man wohl zuerst auf den Gedanken, diesen Durchschnitt auf zwei in seiner Ebene selbst liegenden Axen zu beziehen. Dieß erreicht man durch folgendes Verfahren:

Man nehme an, die Axen der x, y, z seien rechtwinklig. Um auch den Anfangspunkt zu verändern, setze man zu den Werthen [6] die Coordinaten f, g, h des neuen Anfangspunktes (Nro. 593), und substituire dann diese Werthe in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$. Dann ist die Fläche auf neue Axen bezogen, und wenn man in der sich ergebenden Gleichung $z' = 0$ setzt, so erhält man den Durchschnitt dieser Fläche mit der Ebene $x'y'$, die man immer als die gegebene Ebene annehmen kann.

Man kann jedoch auch vor der Substitution in den Formeln $z=0$ setzen, und es lassen sich sogar, wenn man keinen andern Zweck hat, als den Durchschnitt der Fläche zu kennen, die Rechnungen vereinfachen, indem man die Axe der x' parallel mit der Spur OR (Fig. 25) nimmt, oder was dasselbe ist, $\psi = 0$ setzt. Auf diese Weise erhält man

$$[8] \qquad \begin{cases} x = f + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y = g + x' \sin\varphi + y \cos\varphi \cos\theta, \\ z = h + y' \sin\theta. \end{cases}$$

Diese Werthe kommen nur noch der gegebenen Ebene zu; setzt man sie daher in die Gleichung $F(x, y, z) = 0$, so erhält man die Gleichung des gesuchten Durchschnitts.

**604.** Will man die Formeln [8] direct finden, so kann es mittelst folgender Construction geschehen. Es sei M (Fig. 26) ein beliebiger Punkt in der Ebene $y'Ox'$, und deren Spur auf der Ebene $xOy$ sei $Ox'$; die Coordinaten seien

$$OP = x, \quad PQ = y, \quad QM = z, \quad OP' = x', \quad P'M = y'.$$

Man ziehe P'Q, und die Parallelen P'G mit Oy, P'H mit Ox; nun steht P'Q senkrecht auf Ox', Winkel HQP' ist gleich $xOx'$, und Winkel MP'Q gleich dem Neigungswinkel der Ebenen $y'Ox'$ und $yOx$. Setzt man $MP'Q = \theta$ und $x'Ox = \varphi$, so erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken MQP', QP'H, OGP' .... $MQ = y' \sin\theta$, $QP' = y' \cos\theta$; $HP' = QP' \sin\varphi$, $HQ = QP' \cos\varphi$; $OG = x' \cos\varphi$, $GP' = x' \sin\varphi$.

Es ist aber

$$x = OG - HP', \quad y = GP' + HQ, \quad z = MQ;$$

setzt man daher für die Linien ihre Werthe, und fügt die Constanten f, g, h hinzu, so erhält man die Formeln [8].

## Polar-Coordinaten.

**605.** Noch ist eine weitere Art von Transformation gebräuchlich, nämlich die von rechtwinkligen in Polar-Coordinaten. Angenommen, die Linie OM (Fig. 27) sei in OM′ auf die Ebene xy projicirt, und es sei gegeben der Abstand OM, der von dieser Linie mit ihrer Projection auf der Ebene xOy gebildete Winkel MOM′, und der Winkel M′Ox, den diese Projection mit der Axe der x einschließt. Man setze $OM = \varrho$, $MOM' = \theta$, $M'Ox = \varphi$, und es seien wieder $OP = x$, $PM' = y$, $MM' = z$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M. Nun erhält man aus den Dreiecken OPM′, OMM′

$x = OM' \cos\varphi$, $y = OM' \sin\varphi$, $OM' = \varrho \cos\theta$, $z = \varrho \sin\theta$;

folglich

$x = \varrho \cos\theta \cos\varphi$, $y = \varrho \cos\theta \sin\varphi$, $z = \varrho \sin\theta$.

Trägt man die von den Astronomen gebrauchten Bezeichnungen auf die Geometrie über, so ist $\varrho$ der Radius-Vector des Punktes M, $\theta$ seine Breite und $\varphi$ seine Länge.

Anstatt der Winkel $\theta$ und $\varphi$ kann man auch die von dem Halbmesser $\varrho$ mit den drei rechtwinkligen Axen gebildeten Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gebrauchen; dann ist

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \cos\beta, \quad z = \varrho \cos\gamma;$$

es muß aber zwischen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, die Relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ zu Grund gelegt werden.

# Fünftes Kapitel.

## Aufführung der Flächen der zweiten Ordnung.

---

### Eintheilung der Flächen überhaupt.

**606.** Wird eine Fläche durch eine Gleichung zwischen den mit den drei Axen parallelen Coordinaten x, y, z dargestellt, und man will sie auf andere Axen beziehen, so müssen anstatt x, y, z ihre Werthe als Functionen der neuen Coordinaten in die Gleichung gesetzt werden. Da nun diese Werthe die Form $ax' + by' + cz' + f$ haben, so muß die umgeformte Gleichung algebraisch oder transcendent bleiben, je nachdem die gegebene selbst algebraisch oder transcendent ist. Das Bemerkenswertheste indessen ist, daß der Grad einer algebraischen Gleichung sich dabei nicht verändern kann.

Vorerst ist klar, daß er nicht größer werden kann, da für x, y, z nur Werthe des ersten Grades nach x', y', z' gesetzt werden; aber er kann auch nicht kleiner werden, sonst müßte ja der Grad der neuen Gleichung wieder größer werden, wenn man zu den ersten Axen zurückgehen wollte. Auf diese Bemerkung gründet sich die Eintheilung der algebraischen Flächen in verschiedene Ordnungen nach dem Grade ihrer Gleichungen. In der ersten Ordnung kommt die Ebene als die einzige Flächenart vor; in der zweiten gibt es, wie wir bald sehen werden, deren fünf.

**607.** Jede Ordnung hat die geometrische Eigenschaft, daß eine Fläche der mten Ordnung von einer Ebene nicht in einer Linie von einer höhern als der mten Ordnung geschnitten, oder von einer Geraden in mehr als m Punkten getroffen werden kann.

Denn wird xy als die schneidende Ebene angenommen, und man setzt in der Gleichung der Fläche $z = 0$, so erhält man die Gleichung des

Durchschnitts dieser Ebene mit der Fläche; diese Gleichung ist aber höchstens vom mten Grad.

Ist ferner eine Gerade gegeben, so kann man sie als Axe der x annehmen, und wenn dann in der Gleichung der Fläche $z = 0$ und $y = 0$ gesetzt wird, so ist die sich ergebende Gleichung höchstens vom mten Grade, und sie gibt die Abstände des Ursprungs von den verschiedenen Durchschnittspunkten der Fläche und der Geraden in Werthen von x; also kann die Zahl der Durchschnittspunkte nicht größer als m sein.

**608.** In gewissen Fällen wird die Richtigkeit einer Gleichung schon dadurch erwiesen, daß man in derselben $z = 0$ setzt, dann enthält sie den Factor z in allen Gliedern, und sie läßt sich auf die Form $Vz=0$ bringen. Es wird ihr daher Genüge geleistet, wenn man entweder $V = 0$ oder $z = 0$ setzt. Die Gleichung $z = 0$ bestimmt aber die Ebene xy, und die andere Gleichung $V = 0$ ist nur noch vom $m - 1$ten Grade: also stellt die gegebene Gleichung eigentlich keine Fläche der mten Ordnung mehr vor.

Es kann auch der Fall sein, daß eine Gleichung durch die Annahmen $y = 0$, $z = 0$ ohne weitere Bestimmung von x befriedigt wird; dann liegt die Linie der x ganz auf der Fläche.

**609.** Bei den im Raume betrachteten Linien ist die wichtigste Unterscheidung der *Linien in der Ebene und Linien von doppelter Krümmung*; jene können ganz in einer Ebene liegen, diese nicht. Gewöhnlich sind die Linien von doppelter Krümmung durch die Durchschnitte von Flächen gegeben: sie sind jedoch keiner auf die Ordnung der Flächen gegründeten Eintheilung fähig, denn zwei Flächen können auf unendlich verschiedene Weise verändert werden, ohne daß sich ihr Durchschnitt ändert. Man könnte zwar die Curven nach ihren Projectionen (Nro. 550) betrachten; es könnte aber auch dann der Fall sein, daß die Projectionen bei der Aenderung der Coordinaten-Ebenen nicht mehr durch Gleichungen desselben Grades dargestellt würden; folglich wäre eine auf die Ordnung der Projectionen gegründete Eintheilung mangelhaft.

### Vereinfachung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades: Wegschaffung der drei Rechtecke.

**610.** Die verschiedenen in der Gleichung des zweiten Grades enthaltenen Flächen könnten gefunden werden, wenn man denselben Gang wie für die Linien der zweiten Ordnung einschlagen würde; da man aber dann eine große Zahl von Fällen unterscheiden müßte, so ist es besser, mit der Vereinfachung der Gleichung anzufangen.

Man ziehe in der Fläche eine Reihe paralleler Sehnen, nehme die z parallel mit denselben, und lasse den Ursprung und die Richtung der x und y willkührlich. Die Gleichung der Fläche läßt sich nun unter folgende Form bringen:

$$[A] \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0.$$

Daraus erhält man

$$z = \frac{-B'x - B''y - C''}{A''} \pm \sqrt{R},$$

wo R eine Function von x und y ist. Nun fällt in die Augen, daß die Ebene, deren Gleichung

$$z = \frac{-B'x - B''y - C''}{A''}$$

ist, alle mit den z parallelen Sehnen halbirt; hätte man daher die Ebene xy gleich von Anfang parallel mit dieser Ebene genommen, so hätte man für diese Diametral-Ebene z gleich einer constanten Größe gefunden; d. h. es ist dann $B' = 0$, $B'' = 0$, und folglich reducirt sich die Gleichung der Fläche auf

$$[B] \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0.$$

Um eine größere Vereinfachung zu bewirken, ändere man die Richtung der Axen x und y, ohne dabei ihre Ebene, oder den Ursprung und die Axe der z zu verändern. In [B] können nur die mit x und y behafteten Glieder variiren, und offenbar sind sie nach der Umformung die nämlichen, als wenn blos die Spur der Fläche auf der Ebene xy in Betracht gekommen wäre. Diese Spur ergibt sich aus [B], wenn man $z = 0$ setzt, und ihre Gleichung ist

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0.$$

Aendert man nun die Richtung der x und y, so läßt sich das Rechteck xy immer aus dieser letzten Gleichung wegschaffen; man kann also auch bei der Gleichung [B] dieselbe Vereinfachung vornehmen, und ihr somit folgende einfachere Form geben:

$$[C] \quad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 - 2Qx - 2Q'y - 2Q''z + F = 0,$$

welche noch alle Flächen der zweiten Ordnung enthält.

Es ist wohl zu merken, daß man diese Form der Gleichung bei unendlich vielen schiefen Axen-Systemen erhalten kann: denn zuerst kann man den parallelen Sehnen der Fläche unendlich viele verschiedene Richtungen geben, wodurch die Axe der z verändert wird; dann kann man, wenn die Ebene xy bestimmt ist, auch das Rechteck xy wegschaffen, indem man die Axen der x und y in dieser Ebene auf unendlich verschiedene Weise variiren läßt. Dabei ist noch zu bemerken, daß alle diese Veränderungen ohne Versetzung des ursprünglichen Anfangspunktes, der ganz willkührlich bleibt, stattfinden.

### Weitere Reductionen.

**611.** Zur Erlangung neuer Vereinfachungen versetze man nun den Anfangspunkt, und ersetze zu diesem Behuf x, y, z durch

$$x + f, \quad y + g, \quad z + h;$$

so verwandelt sich die Gleichung [C] in

$$[D] \quad \left.\begin{array}{l} Px^2+P'y^2+P''z^2 \\ +2(Pf-Q)x+2(P'g-Q')y+2(P''h-Q'')z \\ +Pf^2+P'g^2+P''h^2-2Qf-2Q'g-2Q''h+F \end{array}\right\} = 0.$$

1) Wenn durch das Verschwinden der Rechtecke keines der drei Quadrate in [C] verschwindet, so sind die Coefficienten P, P', P'' von Null verschieden, und man kann die drei Glieder des ersten Grades aus der Gleichung [D] wegschaffen, indem man setzt

$$Pf - Q = 0, \quad P'g - Q' = 0, \quad P''h - Q'' = 0,$$

woraus

$$f = \frac{Q}{P}, \quad g = \frac{Q'}{P'}, \quad h = \frac{Q''}{P''}.$$

Dann erhält die verwandelte Gleichung die Form

$$[E] \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H.$$

2) Angenommen, es fehle eines der Quadrate in [C], und es sei z. B. $P = 0$; dann wird der vorige Werth von f unendlich groß, das mit x behaftete Glied der umgeformten [D] enthält die Unbestimmte f nicht mehr, und es ist nicht mehr möglich, dasselbe wegzuschaffen. Man kann aber die ersten Potenzen von y und z, sowie den constanten Theil zum Verschwinden bringen, wenn man

$$g = \frac{Q'}{P'}, \quad h = \frac{Q''}{P''}, \quad f = \frac{P'g^2+P''h^2-2Q'g-2Q''h+F}{2Q}$$

setzt; dann ist die Gleichung der Fläche

$$[F] \qquad P'y^2 + P''z^2 = 2Qx.$$

Man könnte befürchten, der letzte Werth von f sei unendlich, man darf aber Q von Null verschieden annehmen. Denn wäre außer $P = 0$ auch $Q = 0$, so würde die Gleichung [C] kein x enthalten. Würde man daher für g und h die obigen Werthe setzen, so hätte die umgeformte Gleichung die Form $P'y^2 + P''z^2 = H$, welche schon in der Gleichung [E] mit einbegriffen ist.

3) Betrachten wir endlich den Fall, wo die Gleichung [C] zwei Quadrate zugleich verlieren würde, und nehmen an, es sei

$$P''z^2 - 2Qx - 2Q'y - 2Q''z + F = 0.$$

Nun lassen sich die Glieder x und y nicht wegschaffen; setzt man aber $h = \frac{Q''}{P''}$, so verschwindet das mit z behaftete Glied wieder, und die Gleichung [D] verwandelt sich, wenn F' den constanten Theil vorstellt, in

$$P''z^2 - 2Qx - 2Q'y + F' = 0.$$

Setzt man $z = 0$, so gibt diese Gleichung $2Qx + 2Q'y = F'$, was beweist, daß die Ebene xy die Fläche in einer Geraden schneidet. Man kann diese Gerade als Linie der y annehmen, wodurch das Glied $P''z^2$ nicht geändert wird. Aber die Glieder $-2Qx - 2Q'y + F'$ werden durch ein einziges von der Form Sx ersetzt; denn die Voraussetzung $z = 0$ muß auch $x = 0$ geben. Die Gleichung der Fläche verwandelt sich also in $P''z^2 + Sx = 0$, was ein besonderer Fall der Gleichung [F] ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun, daß alle Flächen der zweiten Ordnung ohne Ausnahme gegeben sind durch die beiden Gleichungen:

[E] $$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

[F] $$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx.$$

Zwar sind die Coordinaten nicht rechtwinklig; diese Bedingung ist aber für den Augenblick nicht nöthig.

### Bemerkungen über die reducirten Gleichungen. Unterscheidung der Flächen mit und ohne Mittelpunkt.

**612.** Das unterscheidende Merkmal der in den reducirten Gleichungen [E] und [F] enthaltenen Flächen, das schon aus der Form dieser Gleichungen sich ergibt, ist, daß die einen einen Mittelpunkt haben und die andern nicht.

Denn verbindet man die Gleichungen einer durch den Ursprung gehenden Geraden, nämlich $x = az$, $y = bz$, mit [E], so erhält man für die beiden Punkte M und M' (Fig. 28), wo die Gerade die Fläche trifft, gleiche Coordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen. Daraus läßt sich leicht schließen, daß alle durch den Ursprung in der Fläche gezogenen Sehnen in diesem Punkte halbirt werden, und diese Eigenschaft ist eben die Definition des Mittelpunkts.

Was die Flächen der Gleichung [F] betrifft, so könnte man, wenn sie einen Mittelpunkt hätten, den Ursprung dorthin verlegen; würde man dann durch diesen Anfangspunkt eine beliebige Sehne zwischen zwei Punkten der Fläche ziehen, so dürften die Coordinaten dieser zwei Punkte sich nur durch ihre Vorzeichen von einander unterscheiden. Für diesen Fall darf aber, wie leicht einzusehen, die Gleichung der Fläche kein Glied des ersten Grades enthalten; da nun bei der Versetzung des Anfangspunktes (Nro. 611), um von der Gleichung [C] zu der umgeformten [F] zu gelangen, das Glied

mit x nur deßwegen beibehalten wurde, weil es unmöglich entfernt werden konnte, so kann die Gleichung [F] auch nur Flächen ohne Mittelpunkt vorstellen. Dabei ist wohl zu merken, daß Q nicht Null werden kann; sonst wäre die Gleichung [F] ein besonderer Fall von [E].

**613.** Indessen ist zu bemerken, daß, wenn die letzteren Flächen keinen Mittelpunkt haben, dieß daher kommt, daß die Coordinaten oder wenigstens einer derselben, welche die Lage dieses Punktes überhaupt bestimmen unendlich groß werden. Somit müssen diese Flächen genau genommen, betrachtet werden, als haben sie einen Mittelpunkt in unendlicher Entfernung, und man kann folglich mit gehöriger Modification die Eigenschaften der ersteren auch auf diese anwenden. So können die Parabeln als Ellipsen mit unendlichen Axen betrachtet werden.

**614.** Die Form der Gleichung [E] macht noch andere Eigenschaften bemerkbar. Da sie x, y, z nur im Quadrat enthält, so sieht man leicht, wenn die Fläche durch Ebenen, die mit der Ebene zweier Coordinaten-Axen parallel laufen, geschnitten wird, daß die Durchschnitte Curven sind, deren Mittelpunkte auf der dritten Axe liegen. Diese Eigenschaft wird nun zur Bestimmung der Durchmesser gebraucht; also sind die wirklichen Coordinaten-Axen Durchmesser der Fläche.

Steht der Durchmesser senkrecht auf den Ebenen der parallelen Durchschnitte, so heißt er Hauptdurchmesser oder Axe der Fläche.

**615.** Auch ist einleuchtend, daß die Gleichung [E] für jede der Veränderlichen zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen gibt. Jede Coordinaten-Ebene halbirt daher eine Reihe paralleler Sehnen, und man heißt sie deßhalb Diametral-Ebene.

Steht eine Diametral-Ebene senkrecht auf den von ihr halbirten Sehnen, so heißt sie Haupt-Diametralebene oder blos Hauptebene, und die Sehnen selbst können dann Hauptsehnen genannt werden. *

**616.** Sind bei einer Fläche der zweiten Ordnung drei Durchmesser so beschaffen, daß jeder die Mittelpunkte der mit der Ebene der beiden andern parallelen Durchschnitte enthält, so heißen sie conjugirte Durch-

---

* Sind überhaupt in einer algebraischen Gleichung alle Glieder paarig, d. h. ist der Grad aller Glieder entweder durchgängig eine gerade, oder durchgängig eine ungerade Zahl, so liegt der Ursprung im Mittelpunkt der Fläche; dieß ist z. B. bei der Gleichung $xyz^2 - 2xz + yz + 1 = 0$ der Fall. Sind die Glieder nur in Beziehung auf zwei Coordinaten x und y paarig, so ist die Axe der dritten ein Durchmesser; z. B. $x^2y^3z - x^3z^2 - y - z = 0$.

Ist endlich der Grad aller Glieder in Beziehung auf eine einzige Coordinate z eine gerade Zahl, so ist die Ebene xy eine Diametral-Ebene, z. B. $xyz^4 - x^3z^2 - z^2 - 1 = 0$.

messer; ebenso sind drei Diametral-Ebenen conjugirte, wenn die Sehnen, welche jede halbirt, mit dem Durchschnitt der beiden andern parallel laufen.

Aus diesen Erklärungen folgt, daß in der Gleichung [E] die Coordinaten-Axen conjugirte Durchmesser, und die Coordinaten-Ebenen conjugirte Diametral-Ebenen sind. Ueberhaupt mögen die conjugirten Durchmesser oder die conjugirten Diametralebenen, auf welche die Fläche bezogen wird, sein, welche sie wollen, so muß ihre Gleichung die Form [E] beibehalten; denn hätte sie eine andere, so würden die Bedingungen, wodurch diese Ebenen und Durchmesser bestimmt werden, nicht erfüllt.

**617.** In der Gleichung [F] ist nur die Axe der z ein Durchmesser, und nur die Ebenen xy und xz sind Diametral-Ebenen. Diese beiden Ebenen sind auch conjugirte, da die Sehnen, welche jede halbirt, mit der andern Ebene parallel laufen.

## Flächen mit Mittelpunkt.

**618.** Diese Flächen enthält die Gleichung

[E] $$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H.$$

Wir lassen vorerst die Fälle bei Seite, wo diese Gleichung irgend einen Coefficienten gleich Null enthält, und kommen später (Nro. 625) darauf zurück. Durch die Veränderung aller Vorzeichen kann nöthigenfalls die Gleichung so eingerichtet werden, daß ihre erste Seite zwei positive Coefficienten enthält. Angenommen, sie seien P und P'; dann bietet die Gleichung [E] drei Fälle dar, nämlich

[P] $$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = +H,$$

[P'] $$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = +H,$$

[P''] $$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = -H.$$

Von dem Falle $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = -H$ kann nicht die Rede sein, weil es keinen Punkt gibt, durch dessen Coordinaten die erste Seite gleich der negativen Größe $-H$ gemacht werden könnte.

**619.** Discutiren wir zuerst die Gleichung

[P] $$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H.$$

Das einfachste Verfahren, um die Form einer Fläche zu finden, besteht darin, daß man ihre Durchschnitte mit den Coordinaten-Ebenen und ihren Parallelen sucht; man setze daher in [P] nach einander

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0,$$

so ergibt sich

$$Px^2 + P'y^2 = H, \quad Px^2 + P''z^2 = H, \quad P'y^2 + P''z^2 = H;$$

also schneiden die Coordinaten-Ebenen die Flächen in Ellipsen AB, AC, BC (Fig. 29), von welchen, um die Verwirrung zu vermeiden, je nur ein Viertel gezeichnet ist.

Um mit der Ebene xy parallele Durchschnitte zu erhalten, setze man $z = \gamma$, so ist

$$Px^2 + P'y^2 = H - P''\gamma^2,$$

welches wieder die Gleichung einer Ellipse ist. Zwar ist diese Ellipse die Projection des Durchschnitts auf der Ebene xy; aber hier ist diese Projection dem Durchschnitt selbst gleich. Setzt man daher $Oo = \gamma$, und legt die Ebene aob parallel mit xOy, so ist der dadurch in der Fläche entstehende Durchschnitt ab eine Ellipse, welche der durch die obige Gleichung gegebenen gleich ist. Die Länge ihrer mit x und y parallelen halben Durchmesser ist

$$oa = \sqrt{\frac{H - P''\gamma^2}{P}}, \qquad ob = \sqrt{\frac{H - P''\gamma^2}{P'}}.$$

Diese Ausdrücke ändern sich mit dem Werthe von $\gamma$: sie nehmen ab von $\gamma = 0$ bis $\gamma = \sqrt{\frac{H}{P''}}$; auf dieser Grenze sind sie Null, und darüber hinaus werden sie imaginär. Daraus folgt, wenn $OC = \sqrt{\frac{H}{P''}}$ gesetzt wird, so hat die Fläche nur den Punkt B mit der Ebene RCS, die mit xOy parallel ist, gemeinschaftlich, und erstreckt sich nicht darüber hinaus.

Verwandelt man $\gamma$ in $-\gamma$, so erhält man Durchschnitte, die auf der Seite der negativen z liegen; sie sind offenbar gleich denen, die in denselben Abständen auf der andern Seite des Ursprungs liegen. Macht man $OC' = OC$, und legt die Ebene R'C'S' parallel mit xOy, so geht die Fläche nicht über diese Ebene hinaus, und hat mit ihr nur den Punkt C' gemeinschaftlich.

Aehnliche Resultate würde man durch parallele Durchschnitte mit den Ebenen xz und yz erhalten. Das Vorhergehende gibt jedoch einen ziemlich klaren Begriff von der Fläche und beweist hinlänglich, daß sie nach allen Richtungen begrenzt und geschlossen ist. Sie hat den Namen Ellipsoide.

Die Gleichung [P] erhält eine bemerkenswerthe Form, wenn man in dieselbe die Längen der conjugirten Durchmesser, auf welchen die Coordinaten x, y, z, genommen werden, einführt. Man dividire zuerst diese Gleichung mit H, und setze dann

$$a = \sqrt{\frac{H}{P}}, \qquad b = \sqrt{\frac{H}{P'}}, \qquad c = \sqrt{\frac{H}{P''}};$$

so erhält man

$$[p] \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

oder auch

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2.$$

Nun sind offenbar a, b, c die betreffenden halben Durchmesser: denn setzt man z. B. $y=0$ und $z=0$, so ist $x=\pm a$.

Sind die Coordinaten rechtwinklig und $b=a$, so verwandelt sich die Gleichung [p] in

$$x^2+y^2+\frac{a^2}{c^2}z^2=a^2;$$

dann sind alle auf der Linie der z senkrechten Durchschnitte Kreise, deren Mittelpunkte auf dieser Linie liegen. Da überdieß die Ebene xz die Fläche in einer Ellipse schneidet, von welcher diese Linie eine Axe ist, so schließen wir daraus, daß die Fläche durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen erzeugt wird, d. h. ein Drehungs-Ellipsoid ist.

Nimmt man ferner noch $c=a$ an, so heißt die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

d. i. die einer Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Um den Mittelpunkt in eine beliebige Lage zu versetzen, wende man die Gleichung an

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=a^2.$$

Nun haben offenbar alle Punkte der Fläche von einem und demselben festen Punkte, dessen Coordinaten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind, den Abstand a: folglich ist die Fläche eine Kugelfläche, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt und a zum Halbmesser hat.

**620.** Gehen wir nun zur Gleichung [P'] über:

$$[P'] \qquad Px^2+P'y^2-P''z^2=H.$$

Die Gleichungen der Durchschnitte der Fläche mit den Coordinaten-Ebenen sind hier

$$Px^2+P'y^2=H, \quad Px^2-P''z^2=H, \quad P'y^2-P''z^2=H.$$

Die erste bestimmt eine Ellipse ABA'B' (Fig. 30), und die zwei andern Hyperbeln. Setzt man $z=\pm\gamma$, so ist

$$Px^2+P'y^2=H+P''\gamma^2;$$

also sind die mit der Ebene xy parallelen Durchschnitte, welchen Abstand sie auch vom Anfangspunkte haben mögen, Ellipsen. Sie haben zwei mit x und y parallele conjugirte halbe Durchmesser, nämlich

$$oa = \sqrt{\frac{H+P''\gamma^2}{P}}, \qquad ob = \sqrt{\frac{H+P''\gamma^2}{P'}};$$

welche, wie man sieht, bis ins Unendliche wachsen können: d. h. die Fläche öffnet sich immer mehr, je weiter sie sich von der Ebene xy entfernt.

Da die Gleichung [P'] in Beziehung auf x, y und z nicht ähnlich ist, so geben die mit xz und yz parallelen Ebenen andere Resultate. Man setze $y = \pm\beta$, so ist

$$Px^2 - P''z^2 = H - P'\beta^2;$$

also wird die Fläche durch alle mit der Ebene xz parallelen Ebenen in Hyperbeln geschnitten. Diese Curven drehen aber ihre Aeste nicht immer nach derselben Seite: so lange $\beta$ kleiner ist als OB oder $\sqrt{\frac{H}{P'}}$ (Fig. 31), ist der erste oder Haupt-Durchmesser (diamètre transverse) der Durchschnitte mit den x parallel, und ist $\beta$ größer, so ist dieser Durchmesser mit den z parallel. Unter diesen beiden Arten von Hyperbeln sind zwei sich schneidende Gerade; denn $\beta = OB$ gibt

$$Px^2 - P''z^2 = 0, \text{ woraus } x\sqrt{P} = \pm z\sqrt{P''}.$$

Die Projectionen dieser Geraden auf der Ebene xz sind offenbar die gemeinschaftlichen Asymptoten an den Projectionen der beiden Arten von Hyperbeln (Fig. 32). Die mit der Ebene yz parallelen Durchschnitte geben zu ähnlichen Bemerkungen Anlaß.

Man wird sich nun einen ziemlich klaren Begriff von der gegebenen Fläche machen können und einsehen, daß sie von der Ellipsoide ganz verschieden ist. Sie heißt Hyperboloid mit einem Mantel (à une nappe).

Um die Durchmesser dieser Fläche herauszufinden, dividire man die Gleichung [P'] durch H, und setze, wie in Nro. 619

$$a = \sqrt{\frac{H}{P}}, \quad b = \sqrt{\frac{H}{P'}}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{P''}};$$

so erhält man

$$[p'] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Fläche trifft den Durchmesser der x und y in den Abständen a und b, sie trifft aber den Durchmesser der z nicht; denn setzt man $x = 0$ und $y = 0$, so ist $z = \pm c\sqrt{-1}$. Deßhalb sagt man, sie habe zwei reelle und einen imaginären Durchmesser.

Sind die Coordinaten rechtwinklig, und man nimmt $b = a$ an, so verwandelt sich die Gleichung [p'] in $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{c^2}z^2 = a^2$: dann läßt

sich die Fläche durch eine Hyperbel erzeugen, die sich um ihre zweite Axe dreht, und sie ist ein Drehungs-Hyperboloid mit einem Mantel.

**621.** Der letzte Fall von Flächen mit einem Mittelpunkt ist

[P″] $$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = -H.$$

für die Durchschnitte der Coordinaten-Ebenen findet man die Gleichungen $Px^2 + P'y^2 = -H$, $Px^2 - P''z^2 = -H$, $P'y^2 - P''z^2 = -H$: die erste ist unmöglich, woraus hervorgeht, daß die Ebene xy die Fläche nicht trifft; die beiden andern stellen Hyperbeln vor (Fig. 33).

Die Gleichung [P″] gibt

$$Px^2 + P'y^2 = P''z^2 - H;$$

daraus folgt, daß von $z = 0$ bis $z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}}$ die Fläche von keiner mit der Ebene xy parallelen Ebene geschnitten wird, und daher, wenn man $OC = OC' = \sqrt{\frac{H}{P''}}$ setzt und die Ebenen RCS, R′C′S′ parallel mit xy legt, zwischen diesen Ebenen kein Punkt der Fläche liegt. Ist $z = \pm OC$, so ist der Durchschnitt blos noch ein einziger Punkt C oder C′; läßt man aber z bis $\pm\infty$ wachsen, so erhält man reelle Ellipsen, wie aba′b′, deren Durchmesser bis ins Unendliche zunehmen.

Die mit der Ebene xz oder yz parallelen Durchschnitte sind immer ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln.

Die Form der Fläche ist leicht zu erkennen: sie unterscheidet sich von dem Ellipsoid wesentlich darin, daß sie sich bis ins Unendliche ausdehnt, und von dem Hyperboloid mit einem Mantel, daß sie aus zwei getrennten Mänteln besteht; sie heißt Hyperboloid mit zwei Mänteln.

Bei der Darstellung der Durchmesser verwandelt sich die Gleichung [P″] in

[p″] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Die Durchmesser 2a und 2b sind imaginär, und nur der dritte 2c ist reell.

Die Voraussetzung $a = b$ führt auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{c^2}z^2 = -a^2,$$

welche ein Umdrehungs-Hyperboloid mit zwei Mänteln vorstellt.

### Flächen ohne Mittelpunkt.

**622.** Diese Flächen sind in der Gleichung (Nro. 611) enthalten

[F] $$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx.$$

Man kann hier, wenn man will, alle Vorzeichen, sowie die Richtung der positiven x ändern, und so die Coefficienten von $y^2$ und x, wenn sie es nicht schon sind, positiv machen. Daraus folgt, daß die Gleichung [F] nur zwei allgemeine Fälle darbietet, nämlich:

[Q] $P'y^2 + P''z^2 = 2Qx$, [Q'] $P'y^2 - P''z^2 = 2Qx$.

**623.** Betrachten wir zuerst die aus der Gleichung [Q] sich ergebende Fläche. Für die Durchschnitte der Coordinaten-Ebenen hat man die Gleichungen

$$P'y^2 + P''z^2 = 0, \quad P'y^2 = 2Qx, \quad P''z^2 = 2Qx;$$

wovon die erste den Ursprung, und die beiden andern Parabeln, wie ROR', SOS' (Fig. 34) bestimmen.

Nimmt man x negativ, so ist die Gleichung [Q] unmöglich; aber die positiven Werthe von x geben Ellipsen, wie bcb'c', die um so größer sind, je größer x ist.

Die mit jeder der beiden andern Coordinaten-Ebenen parallelen Durchschnitte sind Parabeln, die ROR' und SOS' beziehungsweise gleich sind. Setzt man z. B. $z = \gamma$, so ist $P'y^2 = 2Qx - P''\gamma^2$; und diese Gleichung gibt eine Parabel, die sich von ROR' nur durch ihre Lage unterscheidet.

Die eben untersuchte Fläche heißt elliptisches Paraboloid.

Die in den Ebenen xy und xz liegenden Parabeln haben die Axe der x als gemeinschaftlichen Durchmesser, und in Beziehung auf diesen Durchmesser sind ihre Parameter $\frac{2Q}{P'}$, $\frac{2Q}{P''}$. Um diese in die Gleichung [Q] einzuführen, setzt man $\frac{Q}{P'} = q$, $\frac{Q}{P''} = q'$, so ist

$$q'y^2 + qz^2 = 2qq'x.$$

Sind die Coordinaten rechtwinklig und $P'' = P'$ oder $q' = q$, so wird die Fläche durch die Umdrehung einer Parabel um ihre Axe erzeugt, und es entsteht ein Drehungs-Paraboloid.

**624.** Es ist jetzt nur noch die Gleichung [Q] zu discutiren. Sie gibt für die Durchschnitte der Coordinaten-Ebenen

$$P'y^2 - P''z^2 = 0, \quad P'y^2 = 2Qx, \quad P''z^2 = -2Qx.$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt in der Ebene yz zwei Gerade OD und OD' (Fig. 35); die zweite gibt in der Ebene xy eine den positiven

x zugekehrte Parabel ROR', und die dritte in der Ebene xz eine den negativen x zugekehrte Parabel SOS'.

Um mit der Ebene yz parallele Schnitte zu erhalten, setze man $x = \pm \alpha$, so ist

$$P'y^2 - P''z^2 = \pm 2Q\alpha;$$

d. h. es entstehen Hyperbeln, deren Aeste je nach dem Vorzeichen von $\alpha$ eine verschiedene Richtung haben. Zu bemerken ist, daß die Mittelpunkte aller dieser Hyperbeln auf der Axe der x liegen, und ihre Asymptoten mit den Geraden OD, OD' parallel sind: folglich liegen diese Asymptoten in den beiden durch diese Geraden und die Axe der x gelegten Ebenen.

Man setze noch $z = \gamma$, so ist für die mit der Ebene xy parallelen Durchschnitte

$$P'y^2 = 2Qx + P''\gamma^2.$$

Diese Gleichung gibt eine Reihe von Parabeln, welche nichts anderes sind, als die Parabel ROR' in den verschiedenen Lagen, die sie bei ihrer Fortbewegung einnehmen würde, wenn ihre Ebene immer parallel mit der Ebene xy, ihr Durchmesser Ox parallel mit der Axe der x, und der Punkt O immer auf der Parabel SOS' bliebe.

Bei dieser Bewegung muß die Parabel ROR' offenbar die Fläche erzeugen. Die mit der Ebene xz parallelen Durchschnitte deuten darauf hin daß die Fläche auch beschrieben werden kann, indem man die zweite Parabel längs der ersten hingleiten läßt. Diese Erzeugungsart zeigt die Form der Fläche deutlich an; letztere würde nämlich derjenigen ähnlich sein, die ein Cylinder mit parabolischer Grundfläche, dessen Kanten parabolisch umgebogen sind (Fig. 36), annehmen würde.

Diese Fläche, welche sich von der vorigen wegen der hyperbolischen Durchschnitte, die sie erhalten kann, wesentlich unterscheidet, heißt *hyperbolisches Paraboloid*.

Werden die Parameter des Durchmessers Ox, in Beziehung auf die beiden Parabeln ROR', SOS' dargestellt, so erhält man für die Gleichung [Q']

[q'] $$q'y^2 - qz^2 = 2qq'x.$$

## Besondere Fälle.

**625.** Es sind jetzt noch die besondern Fälle zu betrachten, wenn in den Gleichungen [E] und [F]

[E] $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$, [F] $P'y^2 + P''z^2 = 2Qx$,

eines oder das andere Glied Null ist.

1) Ist $H = 0$, so reducirt sich die Gleichung [E] auf

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0,$$

und da P und P' immer als positiv betrachtet werden können, so sind nur zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich

[1] $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$, [2] $Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0$.

Die Gleichung [1] kann nur befriedigt werden, indem man zugleich

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

setzt; sie stellt daher einen einzigen Punkt dar. Es ist ein Ellipsoid, dessen Dimensionen Null sind.

Die Gleichung [2] stellt einen Kegel dar; denn die Gleichung einer beliebigen durch die Axe der z gehenden Ebene ist $y = \alpha x$, und setzt man diesen Werth für y in [2], so findet man

$$(P + P'\alpha^2)\, x^2 - P''z^2 = 0, \quad \text{woraus} \quad x = \pm z \sqrt{\frac{P''}{P + P'\alpha^2}},$$

welches Resultat beweist, daß der Durchschnitt der Ebene mit der Fläche der Gleichung [2] sich in zwei durch den Ursprung gehenden Geraden auf die Ebene xz projicirt. Somit schneiden alle durch die Axe der x gelegten Ebenen die Fläche in Geraden, die durch den Ursprung gehen; folglich ist die Fläche ein Kegel, dessen Scheitel im Ursprung liegt.

2) Ist bei der Voraussetzung $P'' = 0$, so erhält man für die Gleichung [E]

$$Px^2 + P'y^2 = H.$$

Betrachtet man P als positiv, und setzt P' nach einander positiv und dann negativ, so ist

[3] $Px^2 + P'y^2 = H$, [4] $Px^2 - P'y^2 = H$.

Die Gleichung [3] gibt, wenn H positiv ist, einen Cylinder mit elliptischer Grundfläche (Nro. 548); derselbe reducirt sich auf eine Gerade, wenn $H = 0$ ist; denn dann läßt sich die Gleichung nur befriedigen, wenn zugleich $x = 0$ und $y = 0$ gesetzt wird; und er wird imaginär, wenn H negativ ist.

Die Gleichung [4] gibt bei jedem Vorzeichen von H einen Cylinder mit hyperbolischer Grundfläche. Ist $H = 0$, so erhält man zwei sich schneidende Ebenen.

3) Nimmt man $P'' = 0$, $P' = 0$ an, so reducirt sich die Gleichung [E] auf

$$Px^2 = H,$$

und stellt dann zwei parallele Ebenen, oder eine einzige Ebene, oder zwei imaginäre Ebenen vor, je nachdem H positiv, Null oder negativ ist.

4) Uebergeht man die schon in den vorigen vorkommenden Fälle, so gibt die Gleichung [F] nur noch folgenden:

$$P'y^2 = 2Qx,$$

und die Fläche ist dann ein Cylinder mit paraboliſcher Grundfläche.

**626.** Zum Schluſſe dieſes Kapitels wiederholen wir nun, daß die Flächen der zweiten Ordnung in fünf Arten eingetheilt werden, nämlich: das Ellipſoid, das einmantelige Hyperboloid, das zweimantelige Hyperboloid, das elliptiſche Paraboloid und das hyperboliſche Paraboloid.

Zur Vervollſtändigung dieſer Eintheilung ſind jedoch zu dieſen Flächen als beſondere Fälle die Kegel und Cylinder hinzuzufügen; überdieß iſt zu bemerken, daß eine Gleichung des zweiten Grades auch zwei ſich ſchneidende Ebenen, zwei parallele Ebenen, eine einzige Ebene, eine Gerade, einen Punkt, und ſelbſt unmögliche Fälle ergeben kann.

# Sechstes Kapitel.

## Mittelpunkt. Diametral-Ebenen und Durchmesser. Haupt-Ebenen und Haupt-Axen.

### Aufsuchung des Mittelpunktes im allgemeinsten Fall.

**627.** Enthält eine Fläche der zweiten Ordnung einen Mittelpunkt und man versetzt den Ursprung in denselben, so müssen die Glieder des ersten Grades verschwinden (Nro. 612); um daher zu erkennen, ob die Fläche einen Mittelpunkt habe, darf man nur die Axen parallel mit sich selbst in einen beliebigen Anfangspunkt versetzen, und dann, wenn es möglich ist, die Coordinaten dieses Ursprungs nach der Bedingung des Verschwindens der Glieder vom ersten Grade bestimmen. Nehmen wir die allgemeine Gleichung

$$[A] \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0,$$

und verwandeln $x$, $y$, $z$ in $x + f$, $y + g$, $z + h$. Setzt man zur Abkürzung

$$D = Af + Bg + B'h + C,$$
$$D' = A'g + Bf + B''h + C',$$
$$D'' = A''h + B'f + B''g + C'',$$
$$G = Af^2 + A'g^2 + A''h^2 + 2Bfg + 2B'fh + 2B''gh + 2Cf + 2C'g + 2C''h + F,$$

so erhält man eine neue Gleichung von der Form

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + 2Dx + 2D'y + 2D''z + G = 0.$$

Nun bemerke man 1) daß die Glieder des zweiten Grads dieselben Coefficienten haben wie in der gegebenen Gleichung; 2) daß man die des

ersten Grades erhält, wenn man anstatt x, y, z in den nach x, y, z abgeleiteten Polynomen der ersten Seite der gegebenen Gleichung f, g, h setzt. 3) daß der constante Theil G nichts anderes ist, als die erste Seite mit denselben Substitutionen.

Um nun die Glieder des ersten Grades wegzuschaffen, setze man

$$[1] \qquad D = 0, \quad D' = 0, \quad D'' = 0;$$

dann ist der Ursprung in den Mittelpunkt versetzt, und die Gleichung der Fläche heißt

$$[G] \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + G = 0.$$

Zugleich vereinfacht sich der Ausdruck für G bedeutend; denn wenn man die Gleichungen [1] beziehungsweise mit f, g, h multiplicirt und sie von G abzieht, so ergibt sich

$$G = Cf + C'g + C''h + F.$$

Auch ist zu merken, daß bei den aus den Gleichungen [1] abgeleiteten allgemeinen Werthen für f, g, h der gemeinschaftliche Nenner, den wir K nennen wollen, folgender ist:

$$K = AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - AA'A'' - 2BB'B''.$$

**628.** Aus den Gleichungen [1] wird f, g, h gefunden. Betrachtet man diese Coordinaten als Veränderliche, so stellen die Gleichungen [1] drei Ebenen vor, und der Durchschnitt dieser Ebenen bestimmt den Mittelpunkt. Dann ergeben sich folgende Unterscheidungen:

1) Haben die Ebenen einen gemeinschaftlichen Punkt und zwar nur einen, so hat die Fläche einen einzigen Mittelpunkt; dieß ist der allgemeinste Fall.

2) Schneiden sich die drei Ebenen in der nämlichen Geraden, so sind alle Punkte dieser Geraden Mittelpunkte.

3) Fallen die drei Ebenen in eine einzige zusammen, so können alle Punkte dieser Ebenen als Mittelpunkte genommen werden.

4) Ist endlich kein Punkt den drei Ebenen zugleich gemeinschaftlich, was der Fall ist, wenn sie parallel sind, oder wenn eine derselben mit dem Durchschnitt der beiden andern parallel ist: so hat die Fläche keinen Mittelpunkt, oder vielmehr liegt der Mittelpunkt in unendlicher Entfernung; denn die allgemeinen, aus den Gleichungen [1] abgeleiteten Werthe für f, g, h werden dann, oder wenigstens einer derselben, unendlich groß.

**629.** Es ist nun klar, daß sich im ersten Fall entweder eine der drei Flächen mit einem Mittelpunkt, oder ein Kegel, oder ein einziger Punkt, oder etwas Unmögliches ergibt; im zweiten erhält man einen elliptischen

oder hyperbolischen Cylinder, oder zwei sich schneidende Ebenen, oder eine Gerade, oder etwas Unmögliches; im dritten erhält man zwei parallele Ebenen, oder eine einzige Ebene, oder zwei imaginäre Ebenen; im vierten ergibt sich eines der beiden Paraboloide, oder auch ein paraboloischer Cylinder.

## Von den Diametral-Ebenen überhaupt.

**630.** Eine Diametral-Ebene halbirt eine Reihe von parallelen Sehnen (Nro. 615). Um die Rechnung auf diese Definition anzuwenden, seien

$$[1] \qquad x = \delta z + \varrho, \quad y = \delta' z + \varrho'.$$

Die Gleichungen einer beliebigen Sehne, wo $\delta$ und $\delta'$ constante aber $\varrho$ und $\varrho'$ veränderliche Größen von einer Sehne zur andern sind. Substituirt man diese Werthe in der allgemeinen Gleichung [A], und setzt zur Abkürzung

$$R = A\delta^2 + A'\delta'^2 + A'' + 2B\delta\delta' + 2B'\delta + 2B''\delta',$$
$$S = A\delta\varrho + A'\delta'\varrho' + B\delta\varrho' + B\delta'\varrho + B'\varrho + B''\varrho' + C\delta + C'\delta' + C'',$$
$$T = A\varrho^2 + A'\varrho'^2 + 2B\varrho\varrho' + 2C\varrho + 2C'\varrho' + F:$$

so erhält man die Gleichung

$$[2] \qquad Rz^2 + 2Sz + T = 0,$$

deren Wurzeln die Werthe von z in den Punkten geben, wo die Sehne die Oberfläche trifft. Ihre halbe Summe ist $-\frac{S}{R}$, welches eine der Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehne ist; bezeichnet man daher diese Coordinate mit z, so ist

$$[3] \qquad Rz + S = 0.$$

Nennt man die beiden andern Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehne x und y, so müssen auch zwischen x, y, z die Gleichungen [1] stattfinden; folglich gibt die Elimination von $\varrho$ und $\varrho'$ aus [1] und [3] den Ort der Halbirungspunkte aller parallelen Sehnen. Setzt man für R und S wieder ihre Werthe und führt die Rechnungen aus, so ist

$$[4] \qquad (A\delta + B\delta' + B')\,x + (A'\delta' + B\delta + B'')\,y$$
$$+ (A'' + B'\delta + B''\delta')\,z + C\delta + C'\delta' + C'' = 0.$$

Dieß ist die allgemeine Gleichung der Diametral-Ebenen. Man kann sie so schreiben:

$$(Ax + By + B'z + C)\,\delta + (A'y + Bx + B''z + C')\,\delta'$$
$$+ A''z + B'x + B''y + C'' = 0;$$

und in dieser Form sieht man, wie sie aus den nach x, y, z abgeleiteten Polynomen der ersten Seite der gegebenen Gleichung [A] gebildet wird.

**631.** Es ist jedoch zu bemerken, daß die mit R bezeichnete Größe (Nro. 630) in gewissen Fällen Null werden kann, wodurch die Gleichung [2] auf den ersten Grad reducirt wird. Die Sehnen treffen dann die Fläche nur noch in einem einzigen Punkt, oder eigentlich liegt einer der beiden Durchschnittspunkte in unendlicher Entfernung. Auch ist dann die Diametral-Ebene mit den Sehnen parallel; denn für diesen Fall gilt die Bedingung (Nro. 571)

$$(A\delta+B\delta'+B')\delta+(A'\delta'+B\delta+B'')\delta'+A''+B'\delta+B''\delta'=0,$$

oder reducirt

$$[5]\qquad A\delta^2+A'\delta'^2+A''+2B\delta\delta'+2B'\delta+2B''\delta'=0,$$

und es fällt in die Augen, daß diese Bedingung erfüllt ist, da sie nichts anderes ausdrückt, als die Voraussetzung $R=0$.

**632.** Hat die Fläche einen Mittelpunkt, so läßt sich ihre Gleichung auf $Px^2+P'y^2+P''z^2=H$ (Nro. 611) reduciren; dann ist die der Diametral-Ebene

$$[6]\qquad P\delta x+P'\delta'y+P''z=0.$$

Diese Gleichung stellt eine durch den hier in den Mittelpunkt versetzten Ursprung gehende Ebene vor, und außerdem läßt sich $\delta$ und $\delta'$ immer so bestimmen, daß sie mit der Gleichung einer gegebenen, durch den Ursprung gelegten Ebene identisch ist: also gehen bei den Flächen mit einem Mittelpunkt alle Diametral-Ebenen durch den Mittelpunkt, und umgekehrt sind alle durch den Mittelpunkt gelegten Ebenen Diametral-Ebenen.

**633.** Hat die Fläche keinen Mittelpunkt, so läßt sie sich darstellen durch $P'y^2+P''z^2=2Qx$ (Nro. 611). Somit hat man für die Diametral-Ebene

$$[7]\qquad P'\delta'y+P''z=Q\delta.$$

Die Gleichung einer mit der Axe der x parallelen Ebene ist $\alpha y+z=\beta$, und offenbar wird die Gleichung [7] mit dieser identisch, wenn man

$$\delta=\frac{P''\beta}{Q},\quad \delta=\frac{P''\alpha}{P'}$$

setzt; also sind bei den Flächen ohne Mittelpunkt die Diametral-Ebenen mit der Axe der x parallel, und umgekehrt ist jede mit dieser Axe parallele Ebene eine Diametral-Ebene.

Uebrigens läßt sich dieser Schluß als eine Folge der vorigen Nummer betrachten; dann muß man aber einer schon (Nro. 613) gemachten Bemerkung gemäß die Paraboloiden als Flächen mit einem Mittelpunkt in unendlicher Entfernung nehmen; und dieß ist zur Vermeidung allzu specieller Erörterungen bei allen analogen Fällen anwendbar.

## Von den Durchmessern.

**634.** Die Untersuchung der Durchmesser ist leicht; um jedoch weitschweifige Rechnungen zu vermeiden, nehme man anstatt der allgemeinen Gleichung [A] folgende:

$$[H] \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H + 2Qx,$$

welche einfacher ist und doch alle Flächen der zweiten Ordnung enthält; denn die Gleichungen [E] und [F] in Nro. 611 sind davon nur besondere Fälle.

Der Durchmesser muß nach seiner Definition (Nro. 614) durch die Mittelpunkte der Durchschnitte gehen, welche eine Reihe paralleler Ebenen in die Fläche machen. Es sei nun

$$[1] \qquad z = \alpha x + \alpha' y + \gamma$$

die Gleichung einer dieser Ebenen, wo $\alpha$ und $\alpha'$ constant, und $\gamma$ veränderlich ist. Durch die Elimination von z aus [1] und [H] findet man die Projection des Durchschnitts auf der Ebene xy, und erhält

$$[2] \qquad (P + P''\alpha^2)\, x^2 + (P' + P''\alpha'^2)\, y^2 + 2P''\alpha\alpha' xy + 2\,(P''\alpha\gamma - Q)\, x + 2P''\alpha'\gamma\, y + P''\gamma^2 - H = 0.$$

Die einzigen Curven, welche mittelst des Durchschnitts einer Fläche der zweiten Ordnung eine Ebene geben, sind die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel (Nro. 607); und offenbar kann, wenn die Projection eine Ellipse oder Hyperbel ist, der Durchschnitt selbst nur eine Ellipse oder Hyperbel sein. Ferner sieht man leicht, daß der Mittelpunkt der Projection die Projection des Mittelpunkts vom Durchschnitt ist. Wir wollen deßhalb annehmen, die Gleichung [2] stelle eine Ellipse oder eine Hyperbel vor, und die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Projection bestimmen. Um dieselben zu erhalten, setzt man (Nro. 270) die nach x und y abgeleiteten Polynome der ersten Seite der Gleichung [2] gleich Null, und findet so

$$[3] \qquad (P + P''\alpha^2)\, x + P''\alpha\alpha' y + P''\alpha\gamma = Q,$$

$$[4] \qquad (P' + P''\alpha'^2)\, y + P''\alpha\alpha' x + P''\alpha'\gamma = 0.$$

In diesen Gleichungen sind x und y zwei der drei Coordinaten, welche sich auf den Mittelpunkt des Durchschnitts beziehen, und aus der Gleichung [1] findet man die dritte z. Um indessen den Ort der Mittelpunkte aller parallelen Schnitte, die aus der Veränderung von $\gamma$ entstehen, zu erhalten, braucht man die Werthe von x, y, z nicht zu suchen, sondern nur $\gamma$ aus [1], [3] und [4] zu eliminiren. Als Resultat ergeben sich die Gleichungen

$$[5] \qquad Px + P''\alpha z = Q, \quad P'y + P''\alpha' z = 0,$$

welche die eines beliebigen Durchmessers der Fläche sind.

**635.** Wenn die Fläche einen Mittelpunkt hat, so kann man $Q=0$ setzen; diese Gleichungen verwandeln sich dann in

$$Px + P''\alpha z = 0, \quad P'y + P''\alpha' z = 0.$$

Durch eine passende Wahl von $\alpha$ und $\alpha'$ erhält die dadurch ausgedrückte Gerade alle möglichen Lagen um den Anfangspunkt herum. Daraus folgt, daß alle Durchmesser durch den Mittelpunkt gehen, und daß umgekehrt jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade ein Durchmesser ist.

**636.** Hat die Fläche keinen Mittelpunkt, so kann man $H = 0$, $P = 0$ annehmen; dann ergeben die Gleichungen

$$[5] \qquad z = \frac{Q}{P''\alpha}, \quad y = -\frac{Q\alpha'}{P'\alpha}.$$

Nun läßt sich $\alpha$ und $\alpha'$ so bestimmen, daß y und z jede beliebige Größe erhalten; also sind bei den Paraboloiden die Durchmesser mit der Axe der x parallel, und umgekehrt ist jede Gerade, welche diese Richtung hat, ein Durchmesser.

## Haupt-Ebenen und Haupt-Durchmesser.

**637.** Wir haben (Nro. 615) eine Diametral-Ebene, die auf ihren conjugirten Sehnen, d. h. auf den von ihr halbirten parallelen Sehnen senkrecht steht, Hauptebene genannt.

Um nun alle Hauptebenen einer Fläche zu erhalten, darf man nur die Gleichungen, die diese Bedingung ausdrücken, aufstellen. Bis jetzt wurde über die Richtung der Coordinaten in der Gleichung [A] nichts Besonderes vorausgesetzt; man kann sie daher als rechtwinklig annehmen. Damit dann die Diametral-Ebene auf den conjugirten Sehnen senkrecht stehe, müssen (Nro. 576) zwischen den Coefficienten der Gleichung [1] und [4] in Nro. 630 die Relationen stattfinden:

$$[1] \qquad \begin{cases} A\delta + B\delta' + B' = (A'' + B'\delta + B''\delta')\,\delta, \\ A'\delta' + B\delta + B'' = (A'' + B'\delta + B''\delta')\,\delta'; \end{cases}$$

aus diesen findet man $\delta$ und $\delta'$, und somit die Hauptebenen.

Um symmetrische Rechnungen zu erhalten, setze man

$$A'' + B'\delta + B''\delta' = \lambda;$$

nun hat man anstatt zweier Unbekannten drei, die bestimmt sind durch die Gleichungen

$$[2] \qquad \begin{cases} A\delta + B\delta' + B' = \lambda\delta, \\ A'\delta' + B\delta + B'' = \lambda\delta', \\ A'' + B'\delta + B''\delta' = \lambda. \end{cases}$$

Die beiden ersten geben

$$\delta = \frac{(\lambda - A')\,B' + BB''}{(\lambda - A)\,(\lambda - A') - B^2}, \qquad \delta' = \frac{(\lambda - A)\,B'' + BB'}{(\lambda - A)\,(\lambda - A') - B^2},$$

welche Werthe reell sind, wenn $\lambda$ nicht imaginär ist. Substituirt man sie in der dritten Gleichung, so ergibt sich

$$(\lambda - A)\,(\lambda - A')\,(\lambda - A'') - B''^2\,(\lambda - A) - B'^2\,(\lambda - A') - B^2\,(\lambda - A'') - 2BB'B'' = 0,$$

oder entwickelt man diese Gleichung, und bezeichnet denselben Ausdruck wie in Nro. 627 mit K,

$$[3]\quad \lambda^3 - (A + A' + A'')\lambda^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)\lambda + K = 0.$$

Durch die Auflösung dieser Gleichung ergeben sich die Werthe von $\lambda$, und hierauf die von $\delta$ und $\delta''$.

**638.** Da der Grad dieser Gleichung ungerad ist, so hat sie wenigstens eine reelle Wurzel. Damit aber diese Wurzel wirklich eine Hauptebene bestimme, darf diese Ebene die Coordinaten-Axen nicht in unendlicher Entfernung schneiden. Betrachten wir vorerst nur die Flächen, welche einen Mittelpunkt haben, so kann diese Schwierigkeit nicht stattfinden; denn bei diesen Flächen gehen alle Diametral-Ebenen durch den Mittelpunkt: also haben sie wenigstens eine Hauptebene. Um zu erfahren, ob sie mehrere haben, stelle man folgende Betrachtungen an.

Man nehme die x und y in der Hauptebene, deren Vorhandensein erwiesen ist, und die z auf dem senkrechten Durchmesser. Nun enthält die Gleichung der Fläche weder die Glieder des ersten Grades, da der Ursprung im Mittelpunkt liegt, noch die Rechtecke xz und yz, weil dieselbe für z gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen geben muß. Ferner kann man den x und y eine solche Richtung geben, daß diese Coordinaten senkrecht auf einander stehen, und damit auch das Rechteck xy verschwindet; also hat die Gleichung der Fläche folgende Form:

$$[I]\qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

und sie ist der Gleichung [E] in Nro. 611 ähnlich; aber ihre Coordinaten sind rechtwinklig.

Aus dieser Gleichung ersieht man sogleich, daß die Ebenen xz und yz auch Hauptebenen sind; somit hat die Fläche wenigstens deren drei, und die Gleichung [3], durch welche sie alle gegeben sein müssen, hat ihre drei reellen Wurzeln. Da auf der andern Seite diese Gleichung nicht mehr als drei reelle Wurzeln haben kann, so folgt daraus, daß überhaupt die Flächen mit einem Mittelpunkt drei Hauptebenen haben, und nicht mehr. *

* Die Gleichung [3], welche die Hauptebenen bestimmt, ist sehr merkwürdig, da sie auch in der Theorie der Rotation eines festen Körpers vorkommt.

**639.** Die Untersuchung der Hauptdurchmesser steht mit der der Hauptebenen in inniger Verbindung. Erstens ist klar, daß in der obigen Gleichung die Axen der x, y, z Hauptdurchmesser sind; denn jede geht durch die Mittelpunkte einer Reihe von Durchschnitten, auf denen sie senkrecht steht. Ferner läßt sich darthun, daß diese Hauptdurchmesser überhaupt die einzigen sind, die in der Fläche vorkommen. Angenommen, man habe einen solchen Durchmesser als Axe der z genommen, und es haben in der senkrechten Diametral-Ebene die Axen der x und y eine rechtwinklige Lage, wodurch xy verschwindet, so muß, wenn man in der Gleichung der Fläche $z = \gamma$ setzt, sich eine Curve ergeben, die den Ursprung zum Mittelpunkt hat; deßwegen kann nach dieser Substitution kein Glied des ersten Grads vorkommen; folglich darf die Fläche keines der Glieder x, y, xz, yz enthalten. Ebenso wenig darf sie das mit z behaftete Glied enthalten, da der Ursprung im Mittelpunkt liegt, noch das Product xy, da es zum Verschwinden gebracht wurde; also hat sie noch die vorige Form [I]. Daraus folgt, daß die Ebene einer Hauptebene entspricht, und wie es überhaupt nur drei Hauptebenen gibt, so gibt es auch nur drei Hauptaxen oder Hauptdurchmesser.

Dieser Schluß, sowie der in voriger Nummer, erleidet indeß eine Ausnahme wegen der unbestimmten Fälle, welche die Gleichungen [1] oder [2] enthalten können. Diese Fälle finden indeß nur bei den Drehungsflächen statt, wie wir später (Nro. 645—647) sehen werden.

Dabei ist zu bemerken, daß die drei Hauptebenen conjugirt sind und rechtwinklig auf einander stehen, und daß ihre Durchschnitte die Hauptdurchmesser, welche selbst conjugirt und rechtwinklig sind, bestimmen, was aus der Gleichung [I] hervorgeht.

**640.** Betrachten wir noch einmal die Flächen mit einem Mittelpunkt und zeigen, wie man die Längen der Axen, d. h. die in der Fläche enthaltenen Theile derselben erhält. Angenommen, die Coordinaten seien rechtwinklig und der Ursprung liege im Mittelpunkt; nun sei

$$[G] \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + G = 0$$

---

Zwar würde man schwerlich in der eben gefundenen Form erkennen, daß sie drei reelle Wurzeln hat; dieselbe Gleichung wurde indessen nach den in Crelle's Journal, XII. Heft, niedergelegten Untersuchungen von Jacobi in folgender Form dargestellt:

$$\frac{B'B''}{B(\lambda - A) + B'B''} + \frac{BB''}{B'(\lambda - A') + BB''} + \frac{BB'}{B''(\lambda - A'') + BB'} - 1 = 0.$$

In dieser Form sind nun offenbar die drei Wurzeln der Gleichung reell und in den Zwischenräumen der vier oben angeführten Größen enthalten, die nach ihrer Größe so geordnet sind

$$\infty, \quad A - \frac{B'B''}{B}, \quad A' - \frac{BB''}{B'}, \quad A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Die beiden ersten geben

$$\delta = \frac{(\lambda - A')\,B' + BB''}{(\lambda - A)\,(\lambda - A') - B^2}, \quad \delta' = \frac{(\lambda - A)\,B'' + BB'}{(\lambda - A)\,(\lambda - A') - B^2},$$

welche Werthe reell sind, wenn $\lambda$ nicht imaginär ist. Substituirt man sie in der dritten Gleichung, so ergibt sich

$$(\lambda - A)\,(\lambda - A')\,(\lambda - A'') - B''^2\,(\lambda - A) - B'^2\,(\lambda - A') - B^2\,(\lambda - A'') - 2BB'B'' = 0,$$

oder entwickelt man diese Gleichung, und bezeichnet denselben Ausdruck wie in Nro. 627 mit K,

$$[3]\quad \lambda^3 - (A + A' + A'')\lambda^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)\lambda + K = 0.$$

Durch die Auflösung dieser Gleichung ergeben sich die Werthe von $\lambda$, und hierauf die von $\delta$ und $\delta''$.

**638.** Da der Grad dieser Gleichung ungerad ist, so hat sie wenigstens eine reelle Wurzel. Damit aber diese Wurzel wirklich eine Hauptebene bestimme, darf diese Ebene die Coordinaten-Axen nicht in unendlicher Entfernung schneiden. Betrachten wir vorerst nur die Flächen, welche einen Mittelpunkt haben, so kann diese Schwierigkeit nicht stattfinden; denn bei diesen Flächen gehen alle Diametral-Ebenen durch den Mittelpunkt: also haben sie wenigstens *eine* Hauptebene. Um zu erfahren, ob sie mehrere haben, stelle man folgende Betrachtungen an.

Man nehme die x und y in der Hauptebene, deren Vorhandensein erwiesen ist, und die z auf dem senkrechten Durchmesser. Nun enthält die Gleichung der Fläche weder die Glieder des ersten Grades, da der Ursprung im Mittelpunkt liegt, noch die Rechtecke xz und yz, weil dieselbe für z gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen geben muß. Ferner kann man den x und y eine solche Richtung geben, daß diese Coordinaten senkrecht auf einander stehen, und damit auch das Rechteck xy verschwindet; also hat die Gleichung der Fläche folgende Form:

$$[I]\qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

und sie ist der Gleichung [E] in Nro. 611 ähnlich; aber ihre Coordinaten sind rechtwinklig.

Aus dieser Gleichung ersieht man sogleich, daß die Ebenen xz und yz auch Hauptebenen sind; somit hat die Fläche wenigstens deren drei, und die Gleichung [3], durch welche sie alle gegeben sein müssen, hat ihre drei reellen Wurzeln. Da auf der andern Seite diese Gleichung nicht mehr als drei reelle Wurzeln haben kann, so folgt daraus, *daß überhaupt die Flächen mit einem Mittelpunkt drei Hauptebenen haben, und nicht mehr.* *

---

* Die Gleichung [3], welche die Hauptebenen bestimmt, ist sehr merkwürdig, da sie auch in der Theorie der Rotation eines festen Körpers vorkommt.

**639.** Die Untersuchung der Hauptdurchmesser steht mit der der Hauptebenen in inniger Verbindung. Erstens ist klar, daß in der obigen Gleichung die Axen der x, y, z Hauptdurchmesser sind; denn jede geht durch die Mittelpunkte einer Reihe von Durchschnitten, auf denen sie senkrecht steht. Ferner läßt sich darthun, daß diese Hauptdurchmesser überhaupt die einzigen sind, die in der Fläche vorkommen. Angenommen, man habe einen solchen Durchmesser als Axe der z genommen, und es haben in der senkrechten Diametral-Ebene die Axen der x und y eine rechtwinklige Lage, wodurch xy verschwindet, so muß, wenn man in der Gleichung der Fläche $z = \gamma$ setzt, sich eine Curve ergeben, die den Ursprung zum Mittelpunkt hat; deßwegen kann nach dieser Substitution kein Glied des ersten Grads vorkommen; folglich darf die Fläche keines der Glieder x, y, xz, yz enthalten. Ebenso wenig darf sie das mit z behaftete Glied enthalten, da der Ursprung im Mittelpunkt liegt, noch das Product xy, da es zum Verschwinden gebracht wurde; also hat sie noch die vorige Form [I]. Daraus folgt, daß die Ebene einer Hauptebene entspricht, und wie es überhaupt nur drei Hauptebenen gibt, so gibt es auch nur drei Hauptaxen oder Hauptdurchmesser.

Dieser Schluß, sowie der in voriger Nummer, erleidet indeß eine Ausnahme wegen der unbestimmten Fälle, welche die Gleichungen [1] oder [2] enthalten können. Diese Fälle finden indeß nur bei den Drehungsflächen statt, wie wir später (Nro. 645—647) sehen werden.

Dabei ist zu bemerken, daß die drei Hauptebenen conjugirt sind und rechtwinklig auf einander stehen, und daß ihre Durchschnitte die Hauptdurchmesser, welche selbst conjugirt und rechtwinklig sind, bestimmen, was aus der Gleichung [I] hervorgeht.

**640.** Betrachten wir noch einmal die Flächen mit einem Mittelpunkt und zeigen, wie man die Längen der Axen, d. h. die in der Fläche enthaltenen Theile derselben erhält. Angenommen, die Coordinaten seien rechtwinklig und der Ursprung liege im Mittelpunkt; nun sei

$$[G] \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + G = 0$$

---

Zwar würde man schwerlich in der eben gefundenen Form erkennen, daß sie drei reelle Wurzeln hat; dieselbe Gleichung wurde indessen nach den in Crelle's Journal, XII. Heft, niedergelegten Untersuchungen von Jacobi in folgender Form dargestellt:

$$\frac{B'B''}{B(\lambda - A) + B'B''} + \frac{BB''}{B'(\lambda - A') + BB''} + \frac{BB'}{B''(\lambda - A'') + BB'} - 1 = 0.$$

In dieser Form sind nun offenbar die drei Wurzeln der Gleichung reell und in den Zwischenräumen der vier oben angeführten Größen enthalten, die nach ihrer Größe so geordnet sind

$$\infty, \quad A - \frac{B'B''}{B}, \quad A' - \frac{BB''}{B'}, \quad A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

die Gleichung der Fläche, und

[4] $$x = \delta z, \quad y = \delta' z$$

die einer Axe. Nun müssen offenbar $\delta$ und $\delta'$ durch die Entwicklung in Nro. 637 bestimmt werden: bezeichnet man die halbe Axe mit $\triangle$, die Coordinaten des Punktes, wo sie die Fläche trifft, mit x, y, z, so ist

$$\triangle^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (\delta^2 + \delta'^2 + 1)\, z^2.$$

Eliminirt man aber mittelst der Gleichung [4] x und y aus der Gleichung [G], so erhält man

$$(A\delta^2 + A'\delta'^2 + A'' + 2B\delta\delta' + 2B'\delta + 2B''\delta')\, z^2 + G = 0;$$

und folglich

$$\triangle^2 = \frac{-(\delta^2 + \delta'^2 + 1)\, G}{A\delta^2 + A'\delta'^2 + A'' + 2B\delta\delta' + 2B'\delta + 2B''\delta'}.$$

Addirt man nun die Gleichungen [2] in Nro. 637, nachdem die erste mit $\delta$ und die zweite mit $\delta'$ multiplicirt worden, so ergibt sich

$$A\delta^2 + A'\delta'^2 + A'' + 2B\delta\delta' + 2B'\delta + 2B''\delta' = (\delta^2 + \delta'^2 + 1)\, \lambda;$$

also

[5] $$\triangle^2 = \frac{-G}{\lambda}.$$

**641.** Ist $G = 0$ und $\lambda$ nicht, so ist $\triangle = 0$; dieß muß der Fall sein, wenn die Gleichung [G] einen Punkt, einen Kegel, eine Gerade, zwei sich schneidende Ebenen, oder eine einzige Ebene vorstellt.

Findet man bei der Ausrechnung, daß $\lambda$ Null und G nicht Null ist, so folgt daraus $\triangle = \infty$, welcher Fall bei den elliptischen und hyperbolischen Cylindern, und auch bei zwei parallelen Ebenen stattfindet.

Ist G und $\lambda$ zugleich Null, so ist $\triangle$ unbestimmt; dieß muß stattfinden, wenn man zwei sich schneidende Ebenen, eine einzige Ebene, oder eine Gerade hat.

**642.** Lassen wir diese besonderen Fälle bei Seite, und nehmen an, man habe die Gleichung [G] durch den constanten Ausdruck dividirt, nachdem derselbe zuvor auf die linke Seite gebracht worden, so erhält man für die Fläche

[A] $$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz = 1.$$

Die Gleichung [3], welche $\lambda$ ergibt, ändert sich nicht, da sie G nicht enthält, und man erhält blos

[6] $$\triangle^2 = \frac{1}{\lambda},$$

welche Relation von Wichtigkeit ist, indem sie zeigt, daß man aus der Division der Einheit durch die Wurzeln der Gleichung [3] die Quadrate der halben Axen der Fläche enthält.

**643.** Nehmen wir an, die Fläche sei auf ihre Axen bezogen. Da diese ein System conjugirter Durchmesser bilden, so kann man der Gleichung auch die Form geben:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}= \quad 1 \text{ für das Ellipsoid (Nro. 619);}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}= \quad 1 \text{ für das Hyperboloid mit einem Mantel (Nro. 620);}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ für das Hyperboloid mit zwei Mänteln (Nro. 621).}$$

Sucht man die Abstände des Mittelpunkts von den Punkten, wo jede dieser drei Flächen ihre Axen trifft, so findet man a, b, c für die erste; a, b, $c\sqrt{-1}$ für die zweite; $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, c für die dritte: also muß die Gleichung [3] je nach der Art der Fläche

$$\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2}, \text{ oder } \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2},\ -\frac{1}{c^2}, \text{ oder } -\frac{1}{a^2},\ -\frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2}$$

zu Wurzeln haben. Wird daher die Zahl der positiven oder negativen Wurzeln der Gleichung [3] nach Descartes Regel bestimmt, so findet man die durch die Gleichung [G] dargestellte Fläche. Zu beachten ist, daß die Wurzeln der Gleichung [3] vermöge der Relation [6] wohl negativ, aber nicht imaginär sein können.

**644.** Gehen wir nun zu den Flächen ohne Mittelpunkt über. Nach dem Vorausgegangenen (Nro. 638) lassen sich immer drei unter sich senkrechte Ebenen finden, wodurch die Gleichung [G] in eine andere ohne Rechtecke verwandelt wird. Diese Umformung könnte stattfinden, wenn man für x, y, z reelle Werthe wie $\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z$ setzen würde. Indem man nun dieselben Substitutionen in der allgemeinen Gleichung [A] ausführt, müssen offenbar die Rechtecke, da sie dieselben Factoren haben, auch verschwinden; also erhält man eine Gleichung von der Form

$$Px^2+P'y^2+P''z^2-2Qx-2Q'y-2Q''z+F=0.$$

Für den Fall, wo die Fläche keinen Mittelpunkt hat, muß eines der Quadrate verschwinden (Nro. 611); dann verwandelt sich, wenn man den Ursprung wie in Nro. 611 versetzt, die obige Gleichung in folgende:

$$P'y^2+P''z^2=2Qx,$$

die mit orthogonalen Coordinaten der Gleichung [F] der erwähnten Nummer ähnlich ist, und wie diese alle Flächen ohne Mittelpunkt vorstellt.

Schon aus dieser Gleichung ersieht man, daß die jetzigen Ebenen xy und xz Hauptebenen sind, und daß die Axe der x eine Flächenaxe ist. Diese Axe ist allein in der Fläche vorhanden; denn da die Durchmesser der Paraboloide mit einander parallel laufen (Nro. 636), so müßte, wenn eine weitere Axe vorhanden wäre, diese mit der Axe der x parallel laufen, und die Mittelpunkte der senkrechten Durchschnitte enthalten: nun liegen aber offenbar die Mittelpunkte dieser Durchschnitte auf der wirklichen Axe der x.

Ebenso sind die Ebenen xy und xz überhaupt die einzigen Hauptebenen der Fläche. Beachten wir zuerst, daß die Diametral-Ebenen mit der Axe der x (Nro. 633) parallel sind, deßhalb müssen die auf einer Hauptebene senkrechten Sehnen mit der wirklichen Ebene yz parallel sein; nehmen wir dann in dieser Fläche parallele Schnitte mit dieser Ebene an, und ziehen in diesen Schnitten parallele Sehnen: da nun diese Durchschnitte (wenigstens wenn P′ von P″ verschieden ist) Ellipsen oder Hyperbeln sind, deren Mittelpunkte auf der Axe der x liegen, und deren Axen mit den y und z parallel laufen, so kann offenbar eine Ebene die parallelen Sehnen nicht senkrecht halbiren, wenn diese nicht mit den y oder z parallel laufen. Im ersten Fall würde aber die Hauptebene mit der Ebene xz, und im zweiten mit der Ebene xy zusammenfallen.

Für $P'' = P'$ wären die mit der Ebene yz parallelen Schnitte Kreise, und für diesen Fall könnte jede durch die Axe der x gelegte Ebene als Haupt-Ebene betrachtet werden.

### Fälle von unendlich vielen Hauptebenen. Bedingungen einer Umdrehungsfläche.

**645.** Wir haben bereits (Nro. 636) bemerkt, daß eine Fläche der zweiten Ordnung wegen der Unbestimmtheit, die in den Gleichungen [2] von Nro. 637 stattfinden kann, zuweilen mehr als drei Hauptebenen hat. Dieß kann nur der Fall sein, wenn ein aus der Gleichung [3] genommener Werth von $\lambda$ wenigstens eine der Größen $\delta$ und $\delta'$ unbestimmt läßt. Angenommen, dieß sei $\delta$: so hat man zugleich die beiden Gleichungen

$$(\lambda - A')\,B' + BB'' = 0, \quad (\lambda - A)(\lambda - A') - B^2 = 0.$$

Aus der einen erhält man

$$\lambda = A' - \frac{BB''}{B'},$$

und wird dieser Werth in der andern substituirt, so ist

$$\left(A' - A - \frac{BB''}{B'}\right)\frac{BB''}{B'} + B^2 = 0,$$

oder in anderer Form

[a] $$A - \frac{BB'}{B''} = A' - \frac{BB''}{B'},$$ erste Bedingungsgleichung.

Setzt man den Werth von $\lambda$ in die drei Gleichungen [2], und führt die aus der Relation [a] sich ergebenden Reductionen aus, so wird nach den Regeln der Algebra die zweite Gleichung mit der ersten identisch. Man hat also nur noch zwei Gleichungen, nämlich

$$[1] \qquad B'\delta + B''\delta' + \frac{B'B''}{B} = 0.$$

$$[2] \qquad B'\delta + B''\delta' + \frac{BB''}{B'} + A'' - A' = 0;$$

und damit sie einander nicht widersprechen, muß

$$A'' - A' + \frac{BB''}{B'} = \frac{B'B''}{B},$$

oder auch

$$[b] \qquad A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{B'B''}{B}$$

sein, zweite Bedingungsgleichung.

Finden nun die Relationen [a] und [b] statt, so ist eine Unbestimmtheit vorhanden; denn $\delta$ und $\delta'$ sind nur der einzigen oben gefundenen Gleichung [1] unterworfen.

Indem man $\delta'$ als unbestimmt annimmt, kann man die vorigen Schlußfolgerungen wieder anwenden; dann setzt man

$$(\lambda - A)\,B'' + BB' = 0, \quad (\lambda - A)\,(\lambda - A') - B^2 = 0.$$

Die erste dieser zwei Gleichungen gibt den Werth

$$\lambda = A - \frac{BB'}{B''},$$

welcher vermöge der Relation [a] dem oben gefundenen Werthe von $\lambda$ gleich ist.

Anstatt die Rechnung fortzuführen, darf man nur in den vorhergehenden überall $\delta$ in $\delta'$, A in A', B' in B'' und umgekehrt verwandeln. Da man so die Gleichung [1] wieder erhält, so folgt daraus, daß sie alle unbestimmten Fälle, die bei der Untersuchung der Hauptebenen vorkommen können, enthält. Von den Gleichungen [a] und [b] bleibt die erste unverändert, und die zweite verwandelt sich in

$$[c] \qquad A - \frac{BB'}{B''} = A'' - \frac{B'B''}{B}.$$

Diese drückt jedoch, da sie von [a] und [b] abgeleitet ist, keine neue Bedingung aus. Schafft man die Nenner weg, so lassen sich die Bedingungen in [a], [b], [c] also ausdrücken

$$[a'] \qquad (A - A')\,B'B'' + B(B''^2 - B'^2) = 0,$$

$$[b'] \qquad (A' - A'')\,BB' + B''(B'^2 - B^2) = 0,$$

$$[c'] \qquad (A'' - A)\,BB'' + B'(B^2 - B''^2) = 0.$$

**646.** Sobald diese Bedingungen erfüllt sind, hängen nach den obigen Erörterungen die Werthe $\delta$ und $\delta'$ für die parallelen Sehnen, die auf den conjugirten Diametralebenen senkrecht stehen, nur noch von der Gleichung [1] ab, welche folgende Form erhalten kann:

$$[3] \qquad \frac{B}{B''}\delta + \frac{B}{B'}\delta' + 1 = 0;$$

und daraus folgt (Nro. 582), daß die Sehnen auf der durch die Gleichungen

$$[4] \qquad x = \frac{B}{B''}z, \quad y = \frac{B}{B'}z$$

gegebenen Geraden senkrecht stehen.

**647.** Dieselben Bedingungen, wodurch $\delta$ und $\delta'$ unbestimmt werden, müssen auch stattfinden, wenn die Fläche eine Drehungsfläche ist, und die eben gefundenen Gleichungen [4] finden bei der Drehungsaxe oder wenigstens bei einer mit dieser Axe Parallelen statt. Dieß läßt sich auf mehrere Arten beweisen, von denen jedoch folgende die einfachste zu sein scheint.

Man nehme rechtwinklige Coordinaten und wähle die Axe der x parallel mit der durch die Gleichung [4] gegebenen Geraden. Nun sind die Gleichungen einer beliebigen auf dieser Geraden senkrechten Sehne

$$x = \varrho \quad \text{und} \quad y = \delta' z + \varrho',$$

und um die conjugirte Diametral-Ebene zu finden, darf man nur in der allgemeinen Gleichung [4] von Nro. 630, $\delta = 0$ setzen, so erhält man dadurch

$$(B\delta' + B')x + (A'\delta' + B'')y + (A'' + B''\delta')z + C'\delta' + C'' = 0.$$

Diese Gleichung stellt für jeden Werth von $\delta'$ eine Hauptebene, d. h. eine auf ihren conjugirten Sehnen senkrechte Ebene, vor; also hat man (Nro. 576) $B\delta' + B' = 0$, $A'\delta' + B'' = (A'' + B''\delta')\,\delta'$. Da nun $\delta'$ unbestimmt bleiben muß, so ist auch

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0, \quad A' = A'',$$

und somit erhält man als Gleichung der Fläche

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0.$$

Nun erhält man offenbar mittelst paralleler Schnitte mit der Ebene yz Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Linie liegen, die zugleich auf dieser Ebene senkrecht steht; folglich wird die Fläche durch Drehung um eine mit der Axe der x Parallele erzeugt, was zu beweisen war.

Der Fall, wo A' Null ist, scheint eine Ausnahme zu bilden; er läßt sich jedoch der allgemeinen Schlußfolgerung unterordnen, wenn man beachtet, daß die Fläche dann ein paraboliſcher Cylinder ist, der durch die Drehung einer Parabel um eine mit ihrer Ebene parallelen Axe erzeugt wird und in unendlicher Entfernung von seinem Scheitel liegt.

**648.** Untersuchen wir noch einige besondere Fälle:

1) Es sei $B = 0$; nun reducirt sich die Bedingung [b'] auf $B'^2B'' = 0$, welche Gleichung unmöglich ist, wenn $B'$ und $B''$ nicht Null sind; hat also eine Gleichung des zweiten Grads mit drei rechtwinkligen Coordinaten nur ein einziges Rechteck verloren, so kann sie keine Drehungsfläche vorstellen.

2) Für $B = 0$, $B' = 0$ schienen die Gleichungen [a'] und [b'] befriedigt; eliminirt man aber aus denselben das Verhältniß $\frac{B}{B'}$, so tritt noch eine zu erfüllende Bedingung hervor. Aus den Gleichungen [a] und [b] erhält man

$$\frac{B}{B'} = \frac{(A'-A)\,B''}{B''^2-B'^2}, \quad \frac{B}{B'}\,(A''-A') + B''\left(\frac{B^2}{B'^2} - 1\right) = 0.$$

Setzt man $B' = 0$, so wird $\frac{B}{B'} = \frac{A'-A}{B''}$, und wenn dieser Werth in die letzte Gleichung gesetzt wird, findet sich leicht die Bedingung

[d] $$B''^2 = (A''-A)\,(A'-A),$$

mit deren Erfüllung die Gleichungen [4] der mit der Drehungsaxe Parallelen sich verwandeln in

$$x = 0, \quad y = \frac{A'-A}{B''}\,z.$$

3) Nimmt man außerdem noch $B'' = 0$ an, so ist nach der Relation [d] $A'' = A$, und $A' = A$; d. h. die Coefficienten zweier Quadrate müssen einander gleich sein. Denn es ist klar, daß dann die Fläche durch Drehung um eine der Coordinaten-Axe Parallele erzeugt wird.

## Siebentes Kapitel.

### Eigenschaften der conjugirten Durchmesser.

---

**649.** Bei den Flächen der zweiten Ordnung mit einem Mittelpunkt haben die conjugirten Durchmesser viele bemerkenswerthe Eigenschaften, von denen zwar einige wegen ihrer vollkommenen Uebereinstimmung mit den schon bekannten Eigenschaften bei der Ellipse und Hyperbel leicht gefunden werden konnten, andere aber, die wir J. Binet, Petit und Chasles verdanken, ganz neuer Art sind. Um die Grenzen dieses Werks nicht zu überschreiten, beschränken wir uns hier auf die wichtigsten.

Schon vermöge der Definition der conjugirten Durchmesser (Nro. 616) darf die Gleichung der Fläche, wenn diese Durchmesser zu Coordinaten-Axen genommen werden, jede Veränderliche nur im Quadrat enthalten; nimmt man daher die auf ihre Axen bezogene Gleichung der Fläche in der zur Veränderung der Coordinatenrichtung erforderlichen Umformung, ohne den Ursprung zu versetzen, und stellt die Bedingungen auf, wodurch die Rechtecke verschwinden, so erhält man alle zwischen den conjugirten Durchmessern und den Axen stattfindenden Relationen.

Zwar soll hier nur von dem Ellipsoid die Rede sein; es lassen sich aber die verschiedenen aufzustellenden Sätze leicht auf das Hyperboloid übertragen; denn hiezu darf man nur die Quadrate der imaginären Axen und Durchmesser negativ nehmen, da bei dieser Veränderung alle Beweise auch noch Geltung haben.

**650.** Die Gleichung des auf seine Axen bezogenen Ellipsoids sei nun (Nro. 643)

[p] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Da der Ursprung im Mittelpunkte bleibt, so hat man (Nro. 595) die Formeln

$x = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1$, $y = \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1$, $z = \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1$,

in welchen $x_1$, $y_1$, $z_1$ die neuen Axen, und $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$; $\beta$, $\beta'$, $\beta''$; $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ die Cosinus der Winkel vorstellen, welche die ursprünglichen Axen mit den Axen der $x_1$, $y_1$, $z_1$ bilden.

Substituirt man diese Werthe in [p], so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2B'x_1z_1 + 2''B''y_1z_1 = 1;$$

und um die Fläche auf conjugirte Durchmesser zu beziehen, setze man

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0.$$

Bezeichnet man die halben Längen dieser Durchmesser mit a', b', c', so erhält man zugleich

$$A = \frac{1}{a'^2}, \quad A' = \frac{1}{b'^2}, \quad A'' = \frac{1}{c'^2},$$

und man hat dann als Gleichung des Ellipsoids

[p,] $$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} + \frac{z_1^2}{c'^2} = 1.$$

**651.** Die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser sind in den Relationen zwischen den fünfzehn Größen a, b, c, a', b', c', $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ enthalten. Stellen wir nun diese Relationen, deren Anzahl neun beträgt, hier zusammen.

Erstens hängen die Cosinus $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\beta$, .... immer von folgenden drei Bedingungen ab:

[1] $$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \quad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Entwickelt man hierauf die Rechnungen, um die mit A, A', A'', B, B', B'' bezeichneten Größen zu erhalten, so erhält man nach dem Vorigen

[2] $$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\alpha'^2}{b^2} + \frac{\alpha''^2}{c^2} = \frac{1}{a'^2}, \\ \frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\beta''^2}{c^2} = \frac{1}{b'^2}, \\ \frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\gamma'^2}{b^2} + \frac{\gamma''^2}{c^2} = \frac{1}{c'^2}; \end{cases}$$

[3] $$\begin{cases} \frac{\alpha\beta}{a^2} + \frac{\alpha'\beta'}{b^2} + \frac{\alpha''\beta''}{c^2} = 0, \\ \frac{\alpha\gamma}{a^2} + \frac{\alpha'\gamma'}{b^2} + \frac{\alpha''\gamma''}{c^2} = 0, \\ \frac{\beta\gamma}{a^2} + \frac{\beta'\gamma'}{b^2} + \frac{\beta''\gamma''}{c^2} = 0. \end{cases}$$

Diesen Relationen ist indessen noch eine wichtige Bemerkung beizufügen, daß nämlich die Gleichungen [2] und [3] keine andere sind, als die Gleichung [a] und [b], wenn in denselben

anstatt $a,\ a',\ a'',\ b,\ b',\ b'',\ c,\ c',\ c''$,

gesetzt wird $\frac{a'\alpha}{a},\ \frac{a'\alpha'}{b},\ \frac{a'\alpha''}{c},\ \frac{b'\beta}{a},\ \frac{b'\beta'}{b},\ \frac{b'\beta''}{c},\ \frac{c'\gamma}{a},\ \frac{c'\gamma'}{b},\ \frac{c'\gamma''}{c}$;

woraus folgt, daß die Gleichungen [c], [d], [e] derselben Nummer nach Vornahme dieser Veränderungen auch stattfinden müssen, d. h. es ist

$$[4]\qquad \begin{cases} a'^2\alpha^2 + b'^2\beta^2 + c'^2\gamma^2 = a^2, \\ a'^2\alpha'^2 + b'^2\beta'^2 + c'^2\gamma'^2 = b^2, \\ a'^2\alpha''^2 + b'^2\beta''^2 + c'^2\gamma''^2 = c^2, \end{cases}$$

$$[5]\qquad \begin{cases} a'^2\alpha\alpha' + b'^2\beta\beta' + c'^2\gamma\gamma' = 0, \\ a'^2\alpha\alpha'' + b'^2\beta\beta'' + c'^2\gamma\gamma'' = 0, \\ a'^2\alpha'\alpha'' + b'^2\beta'\beta'' + c'^2\gamma'\gamma'' = 0. \end{cases}$$

$$[6]\qquad \begin{cases} \frac{b'c'}{bc}(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') = \frac{a'\alpha}{a}, & \frac{b'c'}{ac}(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') = \frac{a'\alpha'}{b}, \\ & \frac{b'c'}{ab}(\beta\gamma' - \gamma\beta') = \frac{a'\alpha''}{c}, \\ \frac{a'c'}{bc}(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') = \frac{b'\beta}{a}, & \frac{a'c'}{ac}(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') = \frac{b'\beta'}{b}, \\ & \frac{a'c'}{ab}(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') = \frac{b'\beta''}{c}, \\ \frac{a'b'}{bc}(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = \frac{c'\gamma}{a}, & \frac{a'b'}{ac}(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') = \frac{c'\gamma'}{b}, \\ & \frac{a'b'}{ab}(\alpha\beta' - \beta\alpha') = \frac{c'\gamma''}{c}, \\ \frac{a'b'c'}{abc}(\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' + \gamma\alpha'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' - \gamma\beta'\alpha'') = 1. \end{cases}$$

In den Gleichungen [6] war es gestattet, nur die obern Vorzeichen zu nehmen, was so viel ist, als einigen Cosinus, z. B. $\alpha, \alpha', \alpha''$, eher die einen Vorzeichen, als die entgegengesetzten zu geben, oder auch, was dasselbe ist, die positiven x eher in der einen Richtung, als in der entgegengesetzten zu nehmen, durch welche Beschränkung offenbar kein System conjugirter Durchmesser ausgeschlossen wird.

**652.** Lehrsatz I. Die Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser eines Ellipsoids ist constant und gleich der Summe der Quadrate der Axen.

Denn addirt man die Gleichungen [4], so ergibt sich mit Berücksichtigung der Relationen [1]

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Zusatz. Enthält das Ellipsoid gleiche conjugirte Durchmesser, von denen der eine mit $2a'$ bezeichnet werde, so ist

$$a' = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Der geometrische Ort der Endpunkte aller Durchmesser von dieser Länge ist der Durchschnitt des Ellipsoids und der mit dem Halbmesser $a'$ beschriebenen concentrischen Kugelfläche: es läßt sich aber beweisen, daß jeder dieser Durchmesser einem System von drei gleichen conjugirten Durchmessern angehört. Denn nimmt man einen dieser Durchmesser mit zwei beliebigen conjugirten Durchmessern $2b'$ und $2c'$ der Ellipse, die in der conjugirten Diametral-Ebene des ersten liegt, so erhält man drei conjugirte Durchmesser des Ellipsoids; also ist

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

und daher

$$b'^2 + c'^2 = \tfrac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Folglich erhält man, wenn die gleichen conjugirten halben Durchmesser des diametralen Durchschnitts für $b'$ und $c'$ genommen werden,

$$b' = c' = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}};$$

d. h. $a'$, $b'$, $c'$ sind dann drei gleiche conjugirte Durchmesser. Würde man die Fläche auf dieselben beziehen, so wäre ihre Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a'^2,$$

die der Gleichung der Kugel ähnlich ist, wobei jedoch die Coordinaten nicht rechtwinklig sind.

**653.** Lehrsatz II. Die Summe der Quadrate aus den Projectionen drei conjugirter Durchmesser eines Ellipsoids auf eine feste Gerade ist constant.

Es sei D die feste Gerade, und $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ die Winkel, die sie mit den rechtwinkligen Axen der x, y, z bildet. Multiplicirt man die Gleichungen [4] beziehungsweise mit $\delta^2$, $\delta'^2$, $\delta''^2$, und die Gleichungen [5] beziehungsweise mit $2\delta\delta'$, $2\delta\delta''$, $2\delta'\delta''$, und addirt sie dann alle zusammen, so ergibt sich

$$a'^2(\alpha\delta+\alpha'\delta'+\alpha''\delta'')^2 + b'^2(\beta\delta+\beta'\delta'+\beta''\delta'')^2 + c'^2(\gamma\delta+\gamma'\delta'+\gamma''\delta'')^2 = a^2\delta^2 + b^2\delta'^2 + c^2\delta''^2.$$

Nach einer bekannten Formel (Nro. 585) sind aber die Größen, mit welchen $a'^2$, $b'^2$, $c'^2$ auf der ersten Seite multiplicirt werden, die Quadrate aus den Cosinus der von den halben Durchmessern $a'$, $b'$, $c'$ und der Linie D eingeschlossenen Winkel; also ist

$$a'^2\cos^2(a'D) + b'^2\cos^2(b'D) + c'^2\cos^2(c'D) = a^2\delta^2 + b^2\delta'^2 + c^2\delta''^2.$$

In dieser Gleichung besteht die erste Seite aus der Summe der Quadrate aus den Projectionen von a', b', c' auf der Linie D, und die zweite aus der Summe der Quadrate aus den Projectionen von a, b, c auf derselben Linie; somit ist der Lehrsatz bewiesen.

Zusatz. Angenommen, die Gerade D gehe durch den Mittelpunkt, und es seien ferner p, p', p'' die Projectionen von a', b', c' auf diese Gerade, und q, q', q'' die aus den Endpunkten von a', b', c' auf dieselbe Linie gefällten Senkrechten, so hat man offenbar

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = p^2 + p'^2 + p''^2 + q^2 + q'^2 + q''^2.$$

Nach den Lehrsätzen I und II sind aber die beiden Summen

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 \quad \text{und} \quad p^2 + p'^2 + p''^2$$

bei jeder Lage der conjugirten Durchmesser constant; also ist es auch die Summe $q^2 + q'^2 + q''^2$. Die Senkrechten q, q', q'' kann man als die Projectionen von a', b', c' auf eine beliebige Ebene, und p, p', p'' als die von den Endpunkten dieser Durchmesser auf eine Diametral-Ebene gefällten Senkrechten betrachten; folglich ist in dem Ellipsoid

1) Die Summe der Quadrate aus den Senkrechten constant, welche von den Endpunkten drei conjugirter Durchmesser auf einen festen Durchmesser gefällt werden.

2) Die Summe der Quadrate aus den Projectionen drei conjugirter Durchmesser auf eine feste Ebene ist constant.

3) Die Summe der Quadrate aus den Senkrechten, welche von den Endpunkten drei conjugirter Durchmesser auf eine Diametral-Ebene gefällt werden, ist constant.

**654.** Lehrsatz III. Die Summe der Quadrate aus den Seitenflächen des Parallelepipeds, das aus den conjugirten Durchmessern eines Ellipsoids construirt wird, ist constant.

In dem Beweise dieses Lehrsatzes und der folgenden bezeichne man die rechtwinkligen Coordinaten aus den Endpunkten der drei halben Durchmesser a', b', c' mit x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', die aus b' und c', aus a' und c' und aus a' und b' gebildeten Parallelogramme mit F, G, H; ferner die Projectionen von F auf den Ebenen yz, xz und xy mit f, f', f'', die von G mit g, g', g'', und die von H mit h, h', h''.

Nun sei (Fig. 37) OBEC das aus b' und c' gebildete Parallelogram, und OB'C' die Projection des Dreiecks OBC auf der Ebene yz, so findet man leicht aus der Figur

$$f = 2OB'C' = y'''z''' - y''z'' - (y''' - y'')\ (z''' + z'') = y''z''' - z''y'''.$$

Es ist aber

$$x' = a'\alpha, \quad y' = a'\alpha', \quad z' = a'\alpha'',$$
$$x'' = b'\beta, \quad y'' = b'\beta', \quad z'' = b'\beta'',$$
$$x''' = c'\gamma, \quad y''' = c'\gamma', \quad z''' = c'\gamma'';$$

also ist $f = b'c'(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')$, oder auch zufolge der ersten Gleichung [6],

$$f = \frac{bc}{a} a'\alpha.$$

Ebenso findet man für die Projectionen f' und f''

$$f' = \frac{ac}{b} a'\alpha', \quad f' = \frac{ab}{c} a'\alpha''.$$

Nun ist bekanntlich das Quadrat einer ebenen Figur (Nro. 529, 539) gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drei rechtwinklige Axen; also ist $F^2 = f^2 + f'^2 + f''^2$, oder auch

$$F^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} a'^2\alpha^2 + \frac{a^2c^2}{b^2} a'^2\alpha'^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} a'^2\alpha''^2.$$

Ebenso erhält man bei den Parallelogrammen G und H

$$G^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} b'^2\beta^2 + \frac{a^2c^2}{b^2} b'^2\beta'^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} b'^2\beta''^2,$$

$$H^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} c'^2\gamma^2 + \frac{a^2c^2}{b^2} c'^2\gamma'^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} c'^2\gamma''^2.$$

Addirt man daher die drei letzten Gleichungen, und reducirt mittelst der Gleichungen [4], so ergibt sich

$$F^2 + G^2 + H^2 = b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2,$$

und hieraus folgt die Richtigkeit des aufgestellten Lehrsatzes.

**655.** Lehrsatz IV. Projicirt man die Seitenflächen des aus drei conjugirten Durchmessern des Ellipsoids construirten Parallelepipeds auf eine feste Ebene, so ist die Summe der Quadrate dieser Projectionen constant.

Es seien F', G', H' die Projectionen der Parallelogramme F, G, H auf eine feste Ebene, und $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ die Cosinus der Winkel, welche diese Ebene mit den Ebenen yz, xz und xy bildet. Beachten wir nun, daß man bei der Projection einer ebenen Figur auf eine gegebene Ebene dieselbe zuerst auf drei rechtwinklige Ebenen projiciren kann, und dann diese drei Projectionen auf die gegebenen Ebenen projicirt (Nro. 539): so erhält man

$$F' = f\delta + f'\delta' + f''\delta'' = \frac{bc\delta}{a} a'\alpha + \frac{ac\delta'}{b} a,\alpha' + \frac{ab\delta''}{c} a'\alpha'',$$

$$G' = g\delta + g'\delta' + g''\delta'' = \frac{bc\delta}{a}\, b'\beta + \frac{ac\delta'}{b}\, b'\beta' + \frac{ab\delta''}{c}\, b'\beta'',$$

$$H' = h\delta + h'\delta' + h''\delta'' = \frac{bc\delta}{a}\, c'\gamma + \frac{ac\delta'}{b}\, c'\beta' + \frac{ab\delta''}{c}\, c'\gamma''.$$

Erhebt man diese Gleichungen ins Quadrat, addirt sie dann und reducirt mittelst der Gleichungen [4] und [5], so ergibt sich

$$F'^2 + G'^2 + H'^2 = b^2c^2\delta^2 + a^2c^2\delta'^2 + a^2b^2\delta''^2,$$

wodurch der Lehrsatz bewiesen ist.

**656.** Lehrsatz V. Der körperliche Inhalt des Parallelepipeds, das aus drei conjugirten Durchmessern des Ellipsoids gebildet wird, ist constant und gleich dem aus den Axen construirten Parallelepiped.

Dieses Parallelepiped, das wir mit V bezeichnen wollen, ist sechsmal so groß, als die dreieckige Pyramide, die aus den halben Durchmessern a', b', c' gebildet ist.

Es seien (Fig. 38) OF, OG, OH diese halben Durchmesser, die Coordinaten ihrer Endpunkte F, G, H seien x', y', z' u. s. w. Um nun zuerst den Inhalt der Pyramide OFGH als Function dieser Coordinaten auszudrücken, fälle man die Senkrechten FP, GQ, HR auf die Ebene xy, und vollende die in der Figur angedeuteten Constructionen. Untersucht man nun die vier Körper PQRHFG, OPQGFO, OPRHFO, OQRHGO, so zeigt es sich, daß die Pyramide OFGH gleich der Summe aus den beiden ersten, weniger der aus den beiden letzten ist. Diese vier Körper lassen sich als abgestumpfte dreieckige Prismen betrachten, und daher erhält man

$$PQRHFG = \tfrac{1}{3}PQR.(z'+z''+z'''), \quad OPQGFO = \tfrac{1}{3}OPQ.(z'+z''),$$
$$OPRHFO = \tfrac{1}{3}OPR.(z'+z'''), \quad OQRHGO = \tfrac{1}{3}OQR.(z''+z'''); $$

also hat man für die Pyramide OFGH

$$OFGH = \tfrac{1}{3}PQR.(z'+z''+z''') + \tfrac{1}{3}OPQ.(z'+z'') - \tfrac{1}{3}OPR.(z'+z''') - \tfrac{1}{3}OQR.(z''+z''')$$
$$= \tfrac{1}{3}z'.(PQR+OPQ-OPR) + \tfrac{1}{3}z''.(PQR+OPQ-OQR) + \tfrac{1}{3}z'''.(PQR-OPR-OQR).$$

Schon aus der Ansicht der Figur ergeben sich die Reductionen, und man erhält

$$OFGH = \tfrac{1}{3}z'.OQR + \tfrac{1}{3}z''.OPR - \tfrac{1}{3}z'''.OPQ.$$

Nun ist aber, wie die Figur leicht zeigt,

$$OQR = \tfrac{1}{2}[x'''y''' - x''y''' - (y''+y''')\,(x'''-x'')] = \tfrac{1}{2}(x''y''' - y''x'''),$$
$$OPR = \tfrac{1}{2}[x'y' + (y'+y''')\,(x'''-x') - x'''y'''] = \tfrac{1}{2}(y'x''' - y'''),$$
$$OPQ = \tfrac{1}{2}[x'y' + (y'+y'')\,(x''-x') - x''y''] = \tfrac{1}{2}(y'x'' - x'y'').$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in OFGH, und multiplicirt, um V zu erhalten, mit 6, ſo erhält man am Ende der Rechnung

$$V = x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x'''.$$

Setzt man endlich für $x'$, $y'$, $z'$, ... ihre Werthe (Nro. 654), ſo ergibt ſich

$$V = a'b'c'(\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' + \beta\gamma'\alpha'' - \beta\alpha'\gamma'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha''),$$

und zufolge der letzten Gleichung in [6] reducirt ſich dieſer Werth auf

$$V = abc,$$

welches Reſultat den aufgeſtellten Lehrſatz ausdrückt. *

**657.** Bei den Paraboloiden ſind alle Durchmeſſer mit einander parallel; folglich kann ſich bei dieſen Flächen kein Syſtem von drei conjugirten Durchmeſſern finden; wenn übrigens ein ſolches vorhanden wäre, ſo könnte man die Gleichung dieſer Flächen auf die Form bringen

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

und ſie würden eben deßhalb einen Mittelpunkt haben, was unmöglich iſt.

Es laſſen ſich jedoch unendlich viele je zwei conjugirter Diametral-Ebenen finden, ſo nämlich, daß die von der einen Ebene halbirten Sehnen mit der andern parallel laufen. Denn nach dem, was in Nro. 611 und 612 bemerkt wurde, gibt es unendlich viele Coordinaten-Syſteme, die eine Gleichung von der Form

$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qz$$

geben können, und dann iſt klar, daß die Ebenen xy und xz conjugirte Diametral-Ebenen ſind, und die Axe der x ein Durchmeſſer iſt.

---

* Durch die Unterſuchungen von Chasles wurden den Flächen der zweiten Ordnung mehrere neue Sätze beigefügt, die ihrer großen Allgemeinheit wegen Beachtung verdienen. Wir führen hier nur folgenden, mit Uebergehung des Beweiſes, an.

In zwei concentriſchen Flächen der zweiten Ordnung iſt die Summe der Quadrate aus drei beliebigen conjugirten Durchmeſſern der erſten Fläche, beziehungsweiſe dividirt durch die Quadrate der drei Durchmeſſer der zweiten Fläche, die auf den Richtungen dieſer drei conjugirten Durchmeſſer enthalten ſind, conſtant. Nimmt man als zweite Fläche eine Kugelfläche, ſo kommt man wieder auf den Lehrſatz in Nro. 652.

Wer die ſcharfſinnigen Unterſuchungen von Chasles näher kennen zu lernen wünſcht, findet ſolche in der Correspondance sur l'Ecole Polytechnique de M. Hachette, in den Annales de M. Gergonne, in der Correspondance mathématique et physique de M. Quetelet.

# Achtes Kapitel.

## Von der Berührungsebene und der Normale.

---

### Berührungsebene und Normale an einer beliebigen algebraischen Fläche.

**658.** Es sei MS (Fig. 39) eine Gerade, welche eine Fläche in zwei Punkten M und M′ trifft; dreht man dieselbe um den ersten Punkt, bis M und M′ zusammentreffen, so wird die Gerade zur Tangente an der Fläche. Da nun zwischen M und M′ unendlich viele verschiedene Curven auf der Fläche liegen, so kann sich auch der Punkt M′ auf jeder dieser Curven nach dem Punkt M hinbewegen, um mit demselben zusammenzufallen, und es sind daher die Tangenten an der Fläche offenbar nichts anderes als die Tangenten an diesen verschiedenen Curven. Suchen wir nun den geometrischen Ort dieser Tangenten für eine beliebige algebraische Fläche.

Angenommen, man habe

$$F(x, y, z) = Ax^p y^q z^r + A'x^{p'} y^{q'} z^{r'} + \text{u. s. f.},$$

und die Gleichung der Fläche sei

$$[1] \qquad F(x, y, z) = 0,$$

wo $p, q, \ldots$ ganze positive Exponenten, die jedoch auch Null sein können, vorstellen. Die Coordinaten des Punktes M bezeichne man mit $x', y', z'$, die von M′ mit

$$x' + f, \quad y' + g, \quad z' + h,$$

und setze

$$\frac{f}{h} = \alpha, \quad \frac{g}{h} = \beta:$$

nun sind die Gleichungen der Secante, welche durch diese Punkte geht

$$[2] \qquad x - x' = \alpha(z - z'), \quad y - y' = \beta(z - z').$$

Da die beiden Punkte M und M' der Fläche angehören, so ist

$$Ax'^p y'^q z'^r + \text{u. s. f.} = 0,$$

$$A(x'+f)^p (y'+g)^q (z'+h)^r + \text{u. s. f.} = 0.$$

Entwickelt man die zweite Gleichung so weit, daß die ersten Potenzen von f, g, h herauskommen, und zieht dann die erste davon ab, so ist

$$(pAx'^{p-1} y'^q z'^r + \ldots) f + (qAx'^p y'^{q-1} z'^r + \ldots) g + (rAx'^p y'^q z'^{r-1} + \ldots) h + \omega = 0,$$

wo ω eine Reihe von Gliedern aus Potenzen und Producten von f, g, h bestehend vorstellt.

Bezeichnet man überhaupt die von F(x, y, z) nach x, y, z abgeleiteten Polynome mit X, Y, Z, und mit X', Y', Z' die daraus entstehenden Größen, wenn darin $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ gesetzt wird, und dividirt die vorhergehende Gleichung mit h, wobei $f = \alpha h$, $g = \beta h$ zu nehmen ist; so ergibt sich

$$X'\alpha + Y'\beta + Z' + \omega' = 0,$$

wo ω' eine Größe bezeichnet, die in allen Gliedern noch den Factor h enthält.

Die Punkte M und M' mögen nun noch so nahe beisammen liegen, so muß diese Gleichung stattfinden; also findet sie auch noch statt, wenn dieselben zusammenfallen. Dann ist aber $h = 0$, also auch $\omega' = 0$, und somit heißt die Gleichung

$$[3] \qquad X'\alpha + Y'\beta + Z' = 0.$$

Diese Relation drückt die Beziehungen zwischen α und β aus, wodurch die Gleichungen [2] eine Tangente an der Fläche in dem Punkte bestimmen, dessen Coordinaten x', y', z' sind. Um den Ort aller Tangenten in diesem Punkte zu erhalten, muß α und β aus den Gleichungen [2] und [3] eliminirt werden; dann erhält man die Gleichung einer Ebene, nämlich

$$[4] \qquad X'(x-x') + Y'(y-y') + Z'(z-z') = 0,$$

und dieß ist die Berührungsebene an der Fläche in dem gegebenen Punkte.

**659.** Man erhält diese Gleichung auch auf eine einfache Weise, wenn man die krummen Flächen als aus unendlich kleinen ebenen Flächen bestehend betrachtet.

Um näher auf die Sache einzugehen, sei ABD (Fig. 40) eine Curve, in welche ein Vieleck einbeschrieben ist; nun denke man sich die Zahl seiner Seiten dadurch immer mehr vergrößert, daß neue Eckpunkte zwischen die anfänglichen zu liegen kommen: so erhält man eine Reihe von einbeschriebenen Vielecken, deren Grenze die Curve ist, und man sagt deßhalb, eine Curve könne als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten,

von denen jede unendlich klein ist, betrachtet werden. Diese unendlich kleinen Seiten heißen dann Elemente der Curve.

Nun sei BCL eine Seite von unbestimmter Länge des Vielecks ABCD. Je kleiner die Seiten werden, desto näher rückt dann der Punkt C dem Punkte B, und an der Grenze im Punkte B wird offenbar die Gerade BL zur Tangente an der Curve; deßhalb sagt man, die Tangente an einer Curve sei die unbestimmte Verlängerung eines Elements dieser Curve.

Die vorausgegangenen Betrachtungen finden nun eine natürliche Anwendung auf die krummen Flächen; d. h. man kann sie als Polyeder mit unendlich vielen und unendlich kleinen Seitenflächen betrachten, und dann wird die Berührungsebene zur Ebene einer Seitenfläche von unbestimmter Ausdehnung.

Aus dieser Betrachtungsweise der Berührungsebene folgt, daß sie alle durch den Berührungspunkt an die Fläche gezogenen Tangenten enthalten muß; denn nimmt man um diesen Punkt herum auf der Fläche einen beliebig kleinen Raum an, so kann man ihn als ein ebenes Flächenelement betrachten, durch dessen unendliche Verlängerung die Berührungsebene entsteht. Denken wir uns hierauf auf der Fläche mehrere Curven durch den Berührungspunkt gezogen, so liegt offenbar von jeder derselben ein Element in der Berührungsebene, und folglich liegt die Tangente als Verlängerung dieses Elements ganz in dieser Ebene.

Um daher die Berührungsebene in einem gegebenen Punkte zu erhalten, darf man nur durch diesen Punkt an zwei Linien der Fläche die Tangenten ziehen, und durch diese eine Ebene legen. Mittelst dieses in der darstellenden Geometrie angewandten Verfahrens gelangt man auch leicht zur Gleichung der Berührungsebene; dasselbe wird noch einfacher, wenn man die Tangenten an die beiden Durchschnitte zieht, welche parallel mit den Ebenen xz und yz gemacht werden.

Es sei wie oben

$$F(x, y, z) = 0 \qquad [1]$$

die Gleichung der Fläche, und $x'$, $y'$, $z'$ die Coordinaten des Berührungspunktes; setzt man $y = y'$, so ist für den mit der Ebene xz parallelen Durchschnitt

$$F(x, y', z) = 0.$$

Nach dem in Nro. 471 Bemerkten nehme man nun die nach x und z abgeleiteten Polynome der ersten Seite dieser Gleichung, setze darin $x'$ und $z'$ für x und z, und bezeichne sie nach dieser Substitution mit $X'$ und $Z'$, so erhält man als Gleichungen der Tangente an diesen Durchschnitt

$$y = y', \quad z - z' = -\frac{X'}{Z'}(x - x').$$

Um jetzt einen mit yz parallelen Schnitt zu erhalten, setze man in der Gleichung [1] $x = x'$; dieß gibt

$$F(x', y, z) = 0.$$

Nimmt man nun die nach y und z abgeleiteten Polynome des Polynoms $F(x', y, z)$, und setzt darin $y'$ und $z'$ für y und z, so ist offenbar das zweite kein anderes, als die schon gefundene Größe $Z'$. Bezeichnet man das erste mit $Y'$, dann erhält man für die Tangente an den neuen Durchschnitt die Gleichungen

$$x = x', \quad z - z' = -\frac{Y'}{Z'}(y - y').$$

Die Gleichung der Berührungsebene hat die Form

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0;$$

Damit nun die erste Tangente in ihr enthalten sei, muß $A = \frac{CX'}{Z'}$, und damit sie die zweite enthalte, $B = \frac{CY'}{Z'}$ sein. Somit erhält man wie oben (Nro. 658)

$$[4] \qquad X'(x - x') + Y'(y - y') + Z'(z - z') = 0,$$

als Gleichung der Berührungsebene.

**660.** Die Gleichung der Berührungsebene läßt sich auch in folgender Form ausdrücken,

$$[5] \qquad X'x + Y'y + Z'z = V',$$

wenn man zur Abkürzung

$$V' = X'x' + Y'y' + Z'z'$$

setzt; wobei sich beweisen läßt, daß $V'$ immer auf eine Function von $x'$, $y'$, $z'$ reducirt werden kann, die um einen Grad niederer ist als $F(x, y, z)$.

Zu diesem Zweck beweisen wir zuerst folgenden Satz:

Lehrsatz. Addirt man zu einem nach x, y, z homogenen Polynom die davon abgeleiteten Polynome, nachdem sie vorher beziehungsweise mit x, y, z multiplicirt wurden, so erhält man wieder das ursprüngliche Polynom, multiplicirt nach dem Grad der Homogeneität.

Ein Polynom heißt homogen nach x, y, z, wenn die Summe der Exponenten dieser Buchstaben in jedem Gliede gleich groß ist, und diese Summe heißt der Grad der Homogeneität.

Es sei nun

$$u = Ax^p y^q z^r + A' x^{p'} y^{q'} z^{r'} + \text{u. s. s.}$$

ein homogenes Polynom, in welchem Summen $p+q+r$, $p'+q'+r$ u. s. w., je gleich m sind. Bezeichnet man die abgeleiteten Polynome mit $\lambda$, $\mu$, $\nu$, so ist

$$\lambda = pAx^{p-1} y^q z^r + \ldots\ldots, \quad \mu = qAx^p y^{q-1} z^r + \ldots\ldots,$$
$$\nu = rAx^p y^q z^{r-1} + \ldots\ldots;$$

und hieraus läßt sich obige Eigenschaft leicht ableiten; denn offenbar ist

$$\lambda x + \mu y + \nu z = (p + q + r)\, Ax^p y^q z^r + \ldots\ldots = mu.$$

Nehmen wir jetzt an, die Summe der Glieder vom mten Grade in $F(x, y, z)$ sei u, die der Glieder vom $m-1$ten Grade $u'$, und so fort, so ist

$$F(x, y, z) = u + u' + u'' + \ldots\ldots = 0.$$

Nennt man die von $F(x, y, z)$, $u$, $u'$, ... abgeleiteten Polynome $X, Y, Z$; $\lambda, \mu, \nu$; $\lambda', \mu', \nu'$; ...; so erhält man offenbar

$$X = \lambda + \lambda' + \ldots\ldots, \quad Y = \mu + \mu' + \ldots\ldots, \quad Z = \nu + \nu' + \ldots\ldots$$

Setzt man daher $V = Xx + Yy + Zz$, so ist

$$V = (\lambda x + \mu y + \nu z) + (\lambda' x + \mu' y + \nu' z) + \ldots\ldots,$$

oder auch, zufolge des Lehrsatzes über die homogenen Polynome

$$V = mu + (m-1)u' + (m-2)\, u'' + \ldots\ldots$$

Die gegebene Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gibt aber

$$0 = mu + mu' + mu'' + \ldots,$$

und zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so bleibt

$$V = -u' - 2u'' - 3u''' - \ldots\ldots$$

Nun ist offenbar diese letzte Function nach $x, y, z$ höchstens vom $m-1$ten Grade; also kann die Function $V'$, die nichts anderes ist, als die vorige, wenn darin $x', y', z'$ für $x, y, z$ gesetzt wird, auch nach $x', y', z'$ höchstens vom $m-1$ten Grade sein.

**661.** Nehmen wir jetzt den Fall, wo die Berührungsebene durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punkt gelegt werden soll. Es seien $x'', y'', z''$ die Coordinaten dieses Punktes, und $x', y', z'$ die des Berührungspunktes: nun hat man zur Bestimmung dieser drei Unbekannten blos die beiden Gleichungen:

[6] $$F(x', y', z') = 0,$$

[7] $$X'x'' + Y'y'' + Z'z'' = V',$$

von denen die eine ausdrückt, daß der gesuchte Punkt auf der Fläche liegt, und die andere, daß die Berührungsebene durch den gegebenen Punkt geht. Also ist die Aufgabe im Allgemeinen eine unbestimmte.

**662.** Es ist jedoch zu bemerken, daß die Aufgabe einer beachtungswerthen Bedingung unterliegt, die durch keine Gleichung ausgedrückt werden kann, daß nämlich die Werthe $x'$, $y'$, $z'$ reell sein müssen. Dadurch findet man in gewissen Fällen, daß die Aufgabe eine bestimmte, oder auch unmögliche ist. Es handle sich z. B. von der Fläche, deren Gleichung

$$y^3 + x^2 + z^2 + x + z + \tfrac{2}{3} = 0$$

ist, und bei welcher die Berührungsebene durch den Ursprung gehen soll. In diesem Falle sieht man leicht, daß die Gleichung [7] sich in

$$x'^2 + z'^2 + 2x' + 2z' + 2 = 0,$$

oder auch in

$$(x' + 1)^2 + (z' + 1)^2 = 0$$

verwandelt, und dieser kann durch reelle Werthe nur genügt werden, wenn man $x' = -1$, $z' = -1$ setzt. Dann gibt die Gleichung der Fläche $y' = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; also findet nur eine einzige Berührungsebene statt.

Wollte man an die Kugelfläche durch einen Punkt innerhalb derselben eine Berührungsebene legen, so würde sich herausstellen, daß die Gleichungen [6] und [7] keine Auflösung mit reellen Werthen ergeben.

**663.** Nach der in Nro. 660 über $V'$ gemachten Bemerkung ist offenbar die Gleichung [7] nach $x'$, $y'$, $z'$ um einen Grad niederer als die Gleichung [6]; folglich kann man sagen, der geometrische Ort aller Berührungspunkte sei der Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einer Fläche von niederer Ordnung. Diese Eigenschaft erscheint indessen, von einem andern Gesichtspunkt aus betrachtet, noch von größerer Bedeutung.

Es sei R (Fig. 41) der außerhalb der Fläche gegebene Punkt, und MA die betreffende Schnittlinie: betrachten wir nun den Kegel, der durch die vom Punkte R an diese Linie gezogenen Geraden gebildet wird, und beweisen, daß derselbe um die gegebene Fläche *umschrieben* ist, d. h. daß er in jedem Punkt der Curve MA mit dieser Fläche dieselbe Berührungsfläche hat.

Man nehme auf MA einen beliebigen Punkt M und ziehe die Gerade MR, die eine Erzeugungslinie des Kegels ist und offenbar im Punkte M in der Berührungsebene liegt. Auf den Kegel ziehe man eine beliebige durch diesen Punkt gehende Curve MA' und eine Gerade RN, die der RM beliebig nahe kommen kann; durch die Punkte N und N', wo die Gerade die Curven MA und MA' trifft, ziehe man die Secanten $M\alpha$ und $M\alpha'$. Hierauf drehe man die Gerade RN so um den Punkt R, daß der Punkt N auf der Curve MA immer näher an M rückt. Während dieser Bewegung

bleibt die Gerade immer auf dem Kegel, der Punkt N', wo sie die Curve MA' schneidet, nähert sich auch immer mehr dem Punkte M, und die beiden Secanten bleiben fortwährend in einer und derselben Ebene mit RM; deßhalb werden die Linien Mα und Mα' im nämlichen Augenblick beziehungsweise Tangenten an den Curven MA und MA', und liegen auch dann noch in derselben Ebene mit RM. Diese Ebene ist aber eine Berührungsebene an der gegebenen Fläche, da sie die Tangente an der Curve MA und die in dieser Berührungsebene liegende Gerade RM enthält; ferner ist sie auch eine Berührungsebene an dem Kegel, denn sie enthält die durch M an alle Curven, die sich durch diesen Punkt auf dem Kegel beschreiben lassen, gezogenen Tangenten. Somit kann man als erwiesen annehmen, daß die Berührungscurve einer gegebenen Fläche mit einem um sie beschriebenen Kegel immer auf einer Fläche liegt, die von niederem Grade als die gegebene ist.

Folglich ist die Berührungslinie eines umschriebenen Kegels mit einer Fläche vom zweiten Grade eine ebene.

**664.** Die Normale an eine Fläche ist die Senkrechte, welche im Berührungspunkte durch die Berührungsebene geht. Die Berührungsebene wurde gefunden, ohne über die Coordinaten-Winkel eine nähere Bestimmung vorauszusetzen; um indessen die Gleichungen der Normale einfacher zu erhalten, nehmen wir rechtwinklige Axen an. Dann ergeben sich leicht (Nro. 576) als Gleichungen der Normale

[8] $$Z'(x-x') = X'(z-z'), \quad Z'(y-y') = Y'(z-z').$$

### Berührungsebene an den Flächen zweiter Ordnung.

**665.** Um die vorigen Resultate auf die zweite Ordnung anzuwenden, nehme man zuerst die allgemeine Gleichung

[A] $$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0.$$

Für diesen Fall ist

$$X' = 2(Ax' + By' + B'z' + C),$$
$$Y' = 2(A'y' + Bx' + B''z' + C'),$$
$$Z' = 2(A''z' + B'x' + B''y' + C''),$$
$$-V' = 2(Cx' + C'y' + C''z' + F);$$

und somit verwandelt sich die Gleichung der Berührungsebene (Nro. 660), nachdem sie zuvor durch 2 dividirt worden, in

[1] $$(Ax'+By'+B'z'+C)\,x + (A'y'+Bx'+B''z'+C')\,y + (A''z'+B'x'+B''y'+C'')\,z + Cx'+C'y'+C''z'+F = 0.$$

Hat die Fläche einen Mittelpunkt, so wird sie dargestellt durch die Gleichung

[E] $$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H;$$

dann heißt die Gleichung der Berührungsebene

[2] $$Px'x + P'y'y + P''z'z = H.$$

Hat die Fläche keinen Mittelpunkt, so läßt sich ihre Gleichung in die Form bringen

[F] $$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx,$$

und die Gleichung der Berührungsebene heißt dann blos

[3] $$P'y'y + P''z'z = Q\,(x+x').$$

**666.** Zur bestimmtern Darstellung wollen wir im Folgenden nur das Ellipsoid betrachten, dabei jedoch die Folgerungen allgemein ausdrücken; denn es ist leicht einzusehen, daß sie auch für die Hyperboloide gelten, wenn man die Quadrate der imaginären Durchmesser negativ nimmt; sowie für die Paraboloide, wenn man bei diesen Flächen einen in unendlicher Entfernung liegenden Mittelpunkt annimmt.

Nehmen wir für das Ellipsoid die Gleichung

[p] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo a, b, c drei conjugirte halbe Durchmesser sind; nun ist die Gleichung der Berührungsebene

[4] $$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1.$$

Zieht man durch den Berührungspunkt einen Durchmesser, dessen Gleichungen $x = \frac{x'}{z'}\,z$, $y = \frac{y'}{z'}\,z$ sind, so heißt die Gleichung der conjugirten Diametral-Ebene (Nro. 630)

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 0.$$

Also ist die Berührungsebene im Endpunkte eines Durchmessers mit der conjugirten Diametral-Ebene dieses Durchmessers parallel.

**667.** Um die Spur der Berührungsebene auf der Ebene xy zu finden, setze man in [4] $z = 0$; dann ergibt sich

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung kann sich nun offenbar nicht verändern, wenn auch für c und z′ andere Größen und selbst eine andere Richtung angenommen werden, wenn nur die Länge oder die Richtung der Linien a, b, x′, y′ keine Aenderung erleidet.

Werden daher mehrere Flächen der zweiten Ordnung durch eine gemeinschaftliche Diametral-Ebene in derselben Curve geschnitten, und man zieht in jeder Fläche durch einen beliebigen Punkt dieser Ebene die mit ihr conjugirte Sehne: so treffen alle Berührungsebenen, die in den Endpunkten dieser verschiedenen Sehnen construirt werden, die Diametral-Ebene in der nämlichen Spur.

**668.** Setzt man in der Gleichung [4] zugleich $y = 0$, und $z = 0$, so ist

$$x = \frac{a^2}{x'},$$

welcher Werth nur a und x′ enthält. Somit kann die Länge und die Richtung von b, c, y′, z′ sich verändern, ohne daß dieser Werth eine Aenderung erleidet.

Haben also Flächen der zweiten Ordnung einen gemeinschaftlichen Durchmesser, und man legt durch einen Punkt desselben in jeder Fläche eine conjugirte Ebene, welche die Fläche in einer Curve schneidet, die jenen Punkt zum Mittelpunkt hat: so werden die Berührungsebenen, die in allen Punkten dieser concentrischen Curven an den Flächen construirt werden, von dem gemeinschaftlichen Durchmesser in demselben Punkte geschnitten.

**669.** Betrachten wir nun den Fall, wo es sich darum handelt, an eine Fläche der zweiten Ordnung durch einen außerhalb derselben liegenden Punkt eine Berührungsebene zu legen. Nimmt man dabei wieder das durch die Gleichung [p] ausgedrückte Ellipsoid, und bezeichnet die Coordinaten des gegebenen Punktes mit x″, y″, z″, und die des Berührungspunktes mit x′, y′, z′, so erhält man zwischen diesen drei Unbekannten die beiden Gleichungen

$$[5] \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

$$[6] \qquad \frac{x''x'}{a^2} + \frac{y''y'}{b^2} + \frac{z''z'}{c^2} = 1.$$

Betrachten wir x′, y′, z′ als Veränderliche, so stellt die zweite Gleichung eine Ebene vor, und der Durchschnitt dieser Ebene mit der Fläche gibt den geometrischen Ort der Berührungspunkte. Dieser Durchschnitt

läßt sich auch als die Basis eines um die Fläche beschriebenen Kegels betrachten, dessen Spitze in dem gegebenen Punkte liegt (Nro. 663).

Zieht man durch den gegebenen Punkt den Durchmesser, und nimmt die conjugirte Diametral-Ebene dieses Durchmessers, so zeigt sich sogleich, daß sie mit der Ebene der Gleichung [6] parallel ist.

Man setze in der Gleichung [6] $z' = 0$, so ist

$$\frac{x''x'}{a^2} + \frac{y''y'}{b^2} = 1,$$

und diese Gleichung muß, da sie $z''$ nicht enthält, bei jeder Lage des gegebenen Punktes immer dieselbe Gerade enthalten, wenn nur der Punkt auf einer mit der Axe der z parallelen Linie liegt; denn $x'$ und $y'$ ändern sich nicht; dabei ist es gestattet, diese Axe parallel mit einer beliebigen Geraden anzunehmen, wodurch die Ebene xy zur conjugirten Diametral-Ebene der mit dieser Geraden parallelen Sehnen wird.

Setzt man in derselben Gleichung [6] $y' = 0$ und $z' = 0$, so ist $x' = \frac{a^2}{x''}$, welcher Werth sich nicht ändert, wenn sich der gegebene Punkt in einer mit der Ebene yz parallelen Ebene bewegt; auch ist zu bemerken, daß diese Ebene yz mit einer gegebenen Ebene parallel werden kann, und dann die Axe der x der mit dieser Ebene conjugirte Durchmesser sein muß.

Fassen wir das Vorige zusammen, so ergibt sich folgender Lehrsatz:

Die Berührungscurve eines Kegels mit einer Fläche der zweiten Ordnung bildet einen der Schnitte, die mit dem durch die Spitze des Kegels gehenden Durchmesser conjugirt sind. Bewegt man die Spitze des Kegels auf einer gegebenen Geraden, so liegt die Ebene jener Curve fortwährend in einer und derselben Geraden, die zugleich in der Diametral-Ebene liegt, welche mit den der gegebenen Geraden parallelen Sehnen conjugirt ist. Bewegt man endlich die Spitze des Kegels auf einer gegebenen Ebene, so schneidet die Ebene der Berührungscurve den Durchmesser, der mit den parallelen Schnitten der gegebenen Ebene conjugirt ist, immer in demselben Punkte.

## Lehrsatz von Monge.

**670.** Lehrsatz. Die Spitze eines körperlichen rechten Winkels, dessen drei Seiten stets die Berührungsflächen an einer Fläche der zweiten Ordnung mit einem Mittel-

punkt bilden, beschreibt eine mit dieser Fläche concentrische Kugelfläche.

Dieser Lehrsatz, dem ein ähnlicher für die Curven der zweiten Ordnung zur Seite steht, wurde von Monge aufgestellt, und von Poisson auf folgende Weise bewiesen:

Die Gleichung des auf seine Hauptdurchmesser bezogenen Ellipsoids sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Sind $x', y', z'$; $x'', y'', z''$; $x''', y''', z'''$ die Coordinaten der drei Berührungspunkte, so heißen die Gleichungen der Berührungsebenen

$$[1]\qquad \begin{cases} \frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1, \\ \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}+\frac{z''z}{c^2}=1, \\ \frac{x'''x}{a^2}+\frac{y'''y}{b^2}+\frac{z'''z}{c^2}=1. \end{cases}$$

Da die Berührungspunkte auf dem Ellipsoid liegen, so ist

$$[2]\qquad \begin{cases} \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \\ \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1, \\ \frac{x'''^2}{a^2}+\frac{y'''^2}{b^2}+\frac{z'''^2}{c^2}=1; \end{cases}$$

und da ferner die Berührungsebenen senkrecht auf einander stehen, so ist auch (Nro. 588)

$$[3]\qquad \begin{cases} \frac{x'x''}{a^4}+\frac{y'y''}{b^4}+\frac{z'z''}{c^4}=0, \\ \frac{x'x'''}{a^4}+\frac{y'y'''}{b^4}+\frac{z'z'''}{c^4}=0, \\ \frac{x''x'''}{a^4}+\frac{y''y'''}{b^4}+\frac{z''z'''}{c^4}=0. \end{cases}$$

Um die mit dem Durchschnittspunkt der drei Ebenen beschriebene Fläche zu erhalten, müssen die neun Coordinaten $x', y', \ldots$ der Berührungspunkte aus [1], [2], [3] eliminirt werden. Obgleich die Zahl dieser Gleichungen ungenügend scheint, so ist die Elimination doch möglich, und um sie auf die einfachste Weise auszuführen, setze man

$$[4]\qquad \begin{cases} \frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}=\frac{1}{R^2}, \\ \frac{x''^2}{a^4}+\frac{y''^2}{b^4}+\frac{z''^2}{c^4}=\frac{1}{R'^2}, \\ \frac{x'''^2}{a^4}+\frac{y'''^2}{b^4}+\frac{z'''^2}{c^4}=\frac{1}{R''^2}, \end{cases}$$

wo R, R′, R″ Hilfsgrößen sind, die auch wieder eliminirt werden. Dann ist zu beachten, daß die Gleichungen [4] und [3] keine andere sind, als die Gleichungen [a] und [b] in Nro. 600, in welchen anstatt

$$\begin{array}{cccccccccc} a, & a', & a'', & b, & b', & b'', & c, & c', & c'' \\ \frac{Rx'}{a^2}, & \frac{Ry'}{b^2}, & \frac{Rz'}{c^2}, & \frac{R'x''}{a^2}, & \frac{R'y''}{b^2}, & \frac{R'z''}{c^2}, & \frac{R''x'''}{a^2}, & \frac{R''y'''}{b^2}, & \frac{R''z'''}{c^2} \end{array}$$

gesetzt wurde; nimmt man daher die nämlichen Veränderungen in den Gleichungen [c] und [d] derselben Nummer vor, so ist auch

$$[5]\qquad \begin{cases} R^2x'^2+R'^2x''^2+R''^2x'''^2=a^4, \\ R^2y'^2+R'^2y''^2+R''^2y'''^2=b^4, \\ R^2z'^2+R'^2y''^2+R''^2z'''^2=c^4, \end{cases}$$

$$[6]\qquad \begin{cases} R^2x'y'+R'^2x''y''+R''^2x'''y'''=0, \\ R^2x'z'+R'^2x''z''+R''^2x'''z'''=0, \\ R^2y'z'+R'^2y''z''+R''^2y'''z'''=0. \end{cases}$$

Erhebt man nun die Gleichungen [1] ins Quadrat, multiplicirt sie mit $R^2$, $R'^2$, $R''^2$, und addirt sie hierauf, so ergibt sich, wenn man zugleich die Relation [5] und [6] berücksichtigt,

$$x^2+y^2+z^2=R^2+R'^2+R''^2.$$

Addirt man aber die Gleichungen [2], nachdem sie zuvor mit $R^2$, $R'^2$, $R''^2$ multiplicirt wurden, und reducirt sie mittelst der Gleichung [5], so erhält man

$$a^2+b^2+c^2=R^2+R'^2+R''^2,$$

also ist für x, y, z

$$[7]\qquad x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2.$$

Um dieses Resultat auf das einmantelige Hyperboloid anzuwenden, verwandle man $c^2$ in $-c^2$; und für das Hyperboloid mit zwei Mänteln setze man $-a^2$ und $-b^2$ anstatt $a^2$ und $b^2$. In keinem Fall stellt die Gleichung [7] eine andere als die Kugelfläche vor; *also beschreibt die Spitze eines körperlichen, rechten Winkels* ꝛc.

**671.** Die vorhergehenden Rechnungen ließen sich mit leichten Abänderungen auf die Paraboloide anwenden; es ist jedoch einfacher, wenn

man annimmt, diese Flächen haben einen in unendlicher Entfernung liegenden Mittelpunkt. Dann verwandelt sich die durch die Spitze des körperlichen rechten Winkels beschriebene Kugelfläche in eine auf der Axe senkrechte Ebene, deren Lage zu bestimmen ist. Zu diesem Zweck nehmen wir noch einmal die Gleichung

$$[8] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die je nach dem Vorzeichen von $z^2$ ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid mit einem Mantel darstellt. Für die durch die Spitze des körperlichen Winkels beschriebene Kugelfläche ist

$$[9] \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 \pm c^2.$$

Um aber den Ursprung in einen Endpunkt der Axe $2a$ zu versetzen, verwandle man $x$ in $x - a$; mache dann $b^2 = aq$, $c^2 = aq'$, und nehme $a = \infty$ an; nun verwandeln sich die Gleichungen [8] und [9] in folgende

$$q'y^2 \pm qz^2 = 2qq'x, \quad x = -\frac{q \pm q'}{2}.$$

Die erste gibt die zwei Paraboloide, und die zweite zeigt, daß die Spitze des körperlichen rechten Winkels eine Ebene beschreibt.

# Neuntes Kapitel.

## Von den ebenen Durchschnitten bei Flächen der zweiten Ordnung.

### Verschiedene Curven, die aus ebenen Schnitten entstehen.

**672.** Im fünften Kapitel wurden die Flächen zweiter Ordnung nur durch Ebenen geschnitten, die mit den Coordinaten-Ebenen parallel waren, weil man durch diese Schnitte für jede Art von Flächen genügende Unterscheidungsmerkmale erhielt. Um jedoch diese Flächen näher kennen zu lernen, ist es von Werth, alle möglichen Arten von Durchschnitten zu untersuchen.

Betrachten wir zuerst die Flächen mit einem Mittelpunkt, die

$$[E] \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$$

zur Gleichung haben, und nehmen als schneidende Ebene

$$[1] \qquad x = \alpha y + \beta z + \varrho.$$

Durch die Elimination von z erhält man für die Projection des Durchschnitts auf der Ebene yz die Gleichung

$$[2] \qquad (P\alpha^2 + P')\,y^2 + (P\beta^2 + P'')\,z^2 + 2P\alpha\beta yz + 2P\alpha\varrho y + 2P\beta\varrho z + P\varrho^2 - H = 0.$$

Je nachdem diese Gleichung eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vorstellt, ist der Durchschnitt selbst eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel; denn sie muß (Nro. 607) eine Linie der zweiten Ordnung sein, und offenbar kann

die Projection einer dieser Curven keine der beiden andern geben. Vergleicht man nun die Gleichung [2] mit der Gleichung

$$Ay^2 + Byz + Cz^2 + \text{u. s. w.} = 0,$$

und sucht die Größe $B^2 - 4AC$, so erhält man

$$B^2 - 4AC = -4(P'P'' + PP''\alpha^2 + PP'\beta^2).$$

Setzt man für $\alpha$ und $\beta$ alle möglichen Werthe, so bleibt diese Größe negativ, wenn die Fläche ein Ellipsoid ist; denn $P$, $P'$, $P''$ sind dann positiv; da aber bei den Hyperboloiden $P''$ negativ ist, so kann diese Größe hier positiv, negativ oder Null werden: somit gibt das Ellipsoid, wenn es von Ebenen geschnitten wird, nur Ellipsen, während die Hyperboloide sowohl Hyperbeln als Parabeln geben können.

Da die Gleichung [1] keine mit der Axe der x parallele Ebenen enthält, so müssen diese hier besonders betrachtet werden; sie sind aber in der Gleichung $y = \gamma z + \varrho$ enthalten; setzt man daher diesen Werth in [E], so ergibt sich die Gleichung

[3] $$Px^2 + (P'\gamma^2 + P'')z^2 + 2P'\gamma\varrho z + P'\varrho^2 - H = 0,$$

aus welcher sich dieselben Folgerungen, wie aus Gleichung [2] ableiten lassen.

**673.** Um ferner die Paraboloide durch Ebenen, die mit der Axe der x nicht parallel sind, zu schneiden, eliminire man x aus den Gleichungen

$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx, \quad x = \alpha y + \beta z + \varrho,$$

so ergibt sich

[4] $$P'y^2 + P''z^2 - 2Q\alpha y - 2Q\beta z - 2Q\varrho = 0;$$

also ist der Durchschnitt entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem $P''$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem das Paraboloid ein elliptisches oder hyperbolisches ist.

Ist die schneidende Ebene mit der Axe der x parallel, so muß $y = \gamma z + \varrho$ als Gleichung derselben genommen werden; dann hat man als Projection des Durchschnitts

$$(P'y^2 + P'')z^2 + 2P'\gamma\varrho z + P'\varrho^2 = 2Qx,$$

welche Gleichung für jedes Vorzeichen von $P''$ Parabeln gibt.

**674.** Um nun die Durchschnitte, die aus parallelen Ebenen entstehen, zu untersuchen, nehmen wir an, $\alpha, \beta, \gamma$ behalte in den vorigen Rechnungen dieselben Werthe und es verändere sich nur $\varrho$: dann bleiben die Glieder des zweiten Grads in den Gleichungen der Projectionen unverändert, und sie behalten daher auch dieselben Verhältnisse zu einander; folglich sind (Nro. 485) die Projectionen ähnliche und ähnlich liegende Curven (den Fall ausgenommen, wo sich Hyperbeln von entgegengesetzter

Richtung, wie in Fig. 42 ergeben). Daraus läßt sich nun leicht schließen, daß die Durchschnitte selbst diese Eigenschaft haben.

Es seien (Fig. 43) AC und A′C′ Curven, die in parallelen Ebenen liegen, und ac, a′c′ ihre Projectionen auf eine gegebene Ebene: man nehme an, diese Projectionen seien ähnlich und ähnlich liegend, und o und o′ ihre ähnlichen Mittelpunkte. Zieht man nun die Radien-Vectoren oa, ob, oc . . . und ihre Parallelen o′a′, o′b′, o′c′, . . . so ergibt sich folgende Reihe von gleichen Verhältnissen (Nro. 479)

$$oa : o'a' = ob : o'b' = oc : o'c' \text{ u. s. f.}$$

Nun seien OA, OB, OC die auf oa, ob, oc . . . . , und O′A′, O′B′, O′C′ . . . die auf o′a′, o′b′, o′c′ . . . . projicirten Radien-Vectoren; da die Radien OA und O′A′ Durchschnitte paralleler Ebenen sind, so müssen sie selbst parallel sein, und es ist auch leicht einzusehen, daß sie in demselben Verhältniß wie ihre Projectionen zu einander stehen. Dasselbe läßt sich von OB und O′B′, u. s. w. sagen; daher ist

$$OA : O'A' = OB : O'B' = OC : O'C' \text{ u. s. f.};$$

also sind AC und A′C′ ähnliche und ähnlich liegende Curven.

Somit sind die parallelen Schnitte einer Fläche der zweiten Ordnung ähnliche und ähnlich liegende Linien der zweiten Ordnung.

## Besondere Fälle, wo die Schnitte Hyperbeln sind. Asymptoten-Kegel.

**675.** Betrachten wir noch einmal die Gleichung der Hyperboloide

[P,] $$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = \pm H,$$

und nehmen an, die Ebene, welche die Gleichung

[1] $$x = \alpha y + \beta z + \varrho$$

hat, schneide die Fläche in einer Hyperbel. Verwandelt man in der Gleichung [2] von Nro. 672 $P''$ in $-P''$, so erhält man als Projection dieses Durchschnitts

[2] $$(P\alpha^2 + P')\,y^2 + (P\beta^2 - P'')\,z^2 + 2P\alpha\beta yz + \text{etc.} = 0.$$

Denkt man sich durch den Mittelpunkt mit den Asymptoten dieser Projection Parallelen gezogen, so sieht man im Allgemeinen leicht, daß diese Parallelen nur von den drei Gliedern des zweiten Grads abhängen, das heißt, daß sie gegeben sind durch die Gleichung

[3] $$(P\alpha^2 + P')\,y^2 + (P\beta^2 - P'')\,z^2 + 2P\alpha\beta yz = 0.$$

Bewegt sich nun die schneidende Ebene parallel mit sich selbst, so ändern sich offenbar diese Geraden nicht; deßhalb müssen die Asymptoten der

Projectionen, und somit auch die der Durchschnitte, parallel mit sich selbst bleiben.

Versetzt man die schneidende Ebene in den Anfangspunkt, so ist ihre Gleichung

[4] $$x = \alpha y + \beta z ,$$

und die beiden Gleichungen [3] und [4] zusammengenommen, bestimmen zwei Gerade, die durch den Mittelpunkt gehen und mit den Asymptoten der Durchschnitte parallel laufen. Die Gleichung [3] läßt sich in folgende Form bringen

$$P(\alpha y + \beta z)^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0 ,$$

und mittelst der Gleichung [4] erhält man dafür

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0.$$

Diese von $\alpha$ und $\beta$ unabhängige Gleichung stellt einen Kegel dar, welcher der geometrische Ort der Parallelen ist, die mit den Asymptoten aller Hyperbeln, welche auf der Oberfläche construirt werden können, durch den Mittelpunkt gezogen werden; oder was dasselbe besagt, er ist der geometrische Ort der an alle hyperbolischen Durchschnitte durch den Mittelpunkt gezogenen Asymptoten, und heißt deßwegen Asymptoten-Kegel.

**676.** Diese Benennung läßt sich auch noch auf andere Weise rechtfertigen. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt P (Fig. 44) der Ebene xy über dieser Ebene eine Parallele mit der Axe der z, und bezeichne die Coordinaten der Punkte M und N, wo sie das Hyperboloid und den Kegel trifft, mit x, y, z und x, y, Z, so ist

$$z^2 = \frac{Px^2 + P'y^2 \mp H}{P''} , \qquad Z^2 = \frac{Px^2 + P'y^2}{P''} ,$$

und somit

$$Z - z = \frac{Z^2 - z^2}{Z + z} = \frac{\mp H}{P''(Z+z)} .$$

Angenommen, der Punkt P entferne sich vom Mittelpunkte O, und bleibe dabei auf der Geraden OR, so müssen offenbar $x^2$ und $y^2$, und somit auch Z und z beliebig wachsen; also nimmt dann die Differenz Z — z ab, und kann so klein gemacht werden als man nur will.

Da diese Differenz positiv ist, wenn das Hyperboloid einmantelig ist, und negativ, wenn es zweimantelig ist, so folgt daraus, daß der Asymptoten-Kegel ganz zwischen diesen Flächen liegt.

**677.** Der Asymptoten-Kegel bietet sich auch dar, wenn man die Durchschnitte der Hyperboloide mit den durch den Mittelpunkt gehenden

Geraden berechnet. Die Gleichungen einer solchen Geraden sind $x = \delta z$, $y = \delta' z$, und durch ihre Verbindung mit $[P_1]$ erhält man

$$z = \pm \sqrt{\frac{\pm H}{P\delta^2 + P'\delta'^2 - P''}}.$$

Nun kann man offenbar für $\delta$ und $\delta'$ solche Werthe annehmen, daß der Nenner $P\delta^2 + P'\delta'^2 - P''$ nach Belieben positiv oder negativ oder Null wird; es gibt also in jedem Hyperboloid begrenzte reelle, sowie imaginäre und unbegrenzte Durchmesser.

Je nachdem das Hyperboloid einen oder zwei Mäntel hat, erhält $H$ verschiedene Vorzeichen, woraus folgt, daß die imaginären Durchmesser der einen Fläche die reellen Durchmesser der andern sind. Die unbegrenzten Durchmesser sind für beide dieselben.

Für die letztern Durchmesser ist

$$P\delta^2 + P'\delta'^2 - P'' = 0,$$

und eliminirt man $\delta$ und $\delta'$ mittelst der Gleichungen $x = \delta z$ und $y = \delta' z$, so ergibt sich als geometrischer Ort der unbegrenzten Durchmesser

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0,$$

welches die Gleichung des Asymptoten-Kegels ist. *

**678.** Ein hyperbolisches Paraboloid kann auch in Hyperbeln geschnitten werden; die Gleichung desselben ist

$$P'y^2 - P''z^2 = 2Qx;$$

und bei der Veränderung von $P''$ in $-P''$ in der Gleichung [4] von Nro. 673 zeigt sich sogleich, daß die durch den Ursprung mit den Asymptoten dieser Hyperbeln gezogenen Parallelen die Gleichungen haben

$$y = \pm z \sqrt{\frac{P''}{P'}}.$$

Diese Werthe sind von $\alpha$ und $\beta$ unabhängig und beweisen, daß bei allen hyperbolischen Schnitten die mit den Asymptoten parallelen Linien zum geometrischen Ort zwei Ebenen haben, die mit den Durchmessern der Fläche parallel sind.

**679.** Es sind hier gewisse Formen von Gleichungen zu beachten, in welchen die Hyperboloide und hyperbolischen Paraboloide sich darstellen lassen.

---

* Wird ein Hyperboloid auf drei beliebige Durchmesser bezogen, so hat ihre Gleichung die Form $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + Sxy + S'xz + S''yz = G$, und bei der Anwendung der vorigen Rechnung zeigt es sich, daß man nur Null für $G$ setzen darf, um den Asymptoten-Kegel zu erhalten.

1) Jedes Hyperboloid läßt sich auf irgend drei seiner unendlichen Durchmesser beziehen; dann müssen die Durchschnitte der Fläche mit den Coordinaten-Ebenen Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten sein, und deßhalb darf die Gleichung der Fläche weder die ersten, noch die zweiten Potenzen der Veränderlichen enthalten, also lassen sich die beiden Hyperboloide in einer Gleichung wie $Sxy + S'xz + S''yz = G$ ausdrücken.

2) Werden blos die y und z auf zwei unendlichen Durchmessern genommen, und man läßt den Ursprung im Mittelpunkt, und die x auf dem conjugirten Durchmesser der mit der Ebene der beiden ersten Durchmesser parallelen Schnitte, so muß die neue Gleichung, wenn man die Fläche durch Ebenen, die mit der Ebene yz parallel sind, schneidet, Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten ergeben, und da außerdem der Ursprung im Mittelpunkt liegt, so läßt sich leicht schließen, daß die Hyperboloide ebenfalls eine Gleichung von der Form $Rx^2 + Syz = G$ haben.

3) Wir haben in Nro. 624 gesehen, daß das hyperbolische Paraboloid, dessen Gleichung $P'y^2 - P''z^2 = 2Qx$ ist, von der Ebene yz in zwei geraden Linien geschnitten wird, und daß die parallelen Durchschnitte Hyperbeln sind, deren Mittelpunkte auf den Durchmessern der x liegen, und deren Asymptoten mit diesen Geraden parallel laufen. Aendert man nun die seitherigen Axen der y und z, und setzt dafür diese zwei Geraden, so läßt sich nach dieser Umformung leicht erkennen, daß das hyperbolische Paraboloid die reducirte Gleichung $Syz + Rx = 0$ erhalten muß.

## Geradlinige Schnitte des Hyperboloids mit einem Mantel.

**680.** Auf dem einmanteligen Hyperboloid läßt sich durch jeden Punkt ein Durchmesser ziehen, und die Fläche auf drei conjugirte Durchmesser, zu denen dieser gehört, beziehen. Dann heißt ihre Gleichung

[p'] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Angenommen, jener erste Durchmesser liege auf y, und es sei $y=b$, so ist

[1] $$x = \pm \frac{a}{c} z;$$

woraus folgt, daß man durch jeden Punkt auf dem Hyperboloid mit einem Mantel zwei Gerade ziehen kann.

Die Ebene dieser Geraden ist eine Berührungsebene am Hyperboloid, weil sie mit der Diametral-Ebene parallel ist, die mit dem Durchmesser, der in den betreffenden Punkt auf der Fläche trifft, conjugirt ist (Nro. 666).

Daß dieß der Fall sein müsse, ist indessen schon daraus klar, weil diese Geraden selbst ihre Tangenten sind, und deßhalb in der Berührungsebene liegen müssen.

**681.** Betrachten wir auf der Fläche eine beliebige Ellipse ABC (Fig. 45), die in einer durch den Mittelpunkt O gehenden Ebene liegt und Oz als conjugirten Durchmesser hat. Man ziehe durch alle Punkte dieser Ellipse die Tangenten AG, BH, . . . , und mit OZ die Parallelen AD, DE, . . . Nach dem Vorigen liegen die beiden Geraden des Hyperboloids, die durch den Punkt A gehen, in der Berührungsebene DAG, und die Gleichung [1] zeigt, daß sie in Beziehung auf die Linie AD auf entgegengesetzten Seiten liegen.

Zur leichtern Veranschaulichung stelle man sich vor, man bewege sich in der Richtung ABC um das Hyperboloid herum; dann lassen sich auf dieser Fläche zwei Systeme von Geraden unterscheiden, von denen das eine aus den Linien AP, BQ, . . . , die nach oben von den Parallelen AD, BE, . . . rechts liegen, und das andere aus den Linien AP′, BQ′ . . . besteht, die nach oben von denselben Parallelen links liegen. Ist das Hyperboloid eine Umdrehungsfläche, so bilden die Geraden des ersten Systems denselben Winkel mit der Are, wie die des zweiten, und die Fläche kann dann durch die Drehung einer Geraden auf zwei verschiedene Arten erzeugt werden.

**682.** Man betrachte nun zwei beliebige, zu demselben System gehörige Gerade, AP, BQ, und ziehe durch den Durchschnittspunkt der Tangenten AG und BH parallel mit Oz die Gerade SGS′, welche das Hyperboloid in S und S′ trifft. Die Linie SGS′ ist der Durchschnitt der Berührungsebenen DAG, EBH, und wenn die beiden Geraden AP und BQ, die beziehungsweise in diesen Ebenen liegen, zusammentreffen, so kann dieß offenbar nur auf der Linie SS′ geschehen. Da aber AP durch den Punkt S, und BQ durch S′ geht, so können diese Geraden nicht zusammentreffen. Dagegen ergibt sich aus denselben Folgerungen, daß zwei Gerade von verschiedenen Systemen, wie AP und BQ′, die SS′ in demselben Punkte S treffen.

Also treffen sich überhaupt zwei Gerade in demselben System nicht, und zwei Gerade verschiedener Systeme treffen sich immer.

**683.** Die Gleichung [1] zeigt, daß die Geraden, welche man auf dem Hyperboloid mit einem Mantel durch jeden Punkt desselben ziehen kann, mit den Asymptoten der Durchschnitte parallel laufen, die mit der Ebene dieser Geraden parallel sind; daraus folgt, daß alle auf dem Hyper-

boloid liegenden Geraden, wenn man sie parallel mit sich selbst in den Mittelpunkt versetzt, genau auf den Asymptoten-Kegel fallen.

**684.** Betrachten wir noch drei Gerade desselben Systems, wie AP, BQ, CR, und nehmen für den Augenblick an, sie seien mit einer und derselben Ebene parallel. Würde man sie, parallel mit sich selbst, in den Punkt O versetzen, so würden sie in dieselbe Ebene fallen; folglich hätte man auf dem Asymptoten-Kegel drei in derselben Ebene liegende Erzeugungslinien. In diesem Falle würde man, wenn dieser Kegel von einer mit der Ellipse ABC parallelen Ebene geschnitten würde, drei Punkte in gerader Linie erhalten, was unmöglich ist, da dieser Durchschnitt eine Ellipse ist. Drei Gerade von demselben System sind also mit einer und derselben Ebene nie parallel.

**685.** Nehmen wir in einem System drei beliebige Gerade, und betrachten sie als fest in dem Raume. Nun läßt sich durch jeden Punkt der ersten eine Gerade ziehen, welche die beiden andern trifft; denn legt man durch diesen Punkt zwei Ebenen, von denen die eine durch die zweite, die andere durch die dritte Linie geht, so ist die Durchschnittslinie dieser Ebenen die gesuchte Gerade. Eine Gerade läßt sich also so fortbewegen, daß sie immer durch die drei festen Linien geht; und offenbar muß sie in ihren verschiedenen Lagen nach einander mit allen Geraden des andern Systems zusammenfallen. Das Hyperboloid mit einem Mantel kann also durch eine Gerade erzeugt werden, die sich an drei festen Geraden, die nicht mit derselben Ebene parallel sind, hinbewegt.

Dabei ist klar, daß man die drei Directricen auf unendlich verschiedene Weise in jedem beliebigen System wählen kann, vorausgesetzt, daß sie alle demselben System angehören.

**686.** Um bei einem Hyperboloid mit einem Mantel, dessen Gleichung

$$[p'] \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ist, die Gleichungen der Erzeugungslinien jedes Systems zu finden, schreibe man die Gleichung [p'] in folgender Weise

$$\left(\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x}{a}-1\right)=\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right).$$

Dieser Gleichung wird offenbar Genüge geleistet, indem man entweder

$$[2] \qquad \frac{x}{a}+1=\alpha\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right) \text{ und } \frac{x}{a}-1=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right),$$

oder indem man

$$[3] \qquad \frac{x}{a} - 1 = \beta\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right) \text{ und } \frac{x}{a} + 1 = \frac{1}{\beta}\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right)$$

setzt, wo $\alpha$ und $\beta$ zwei unbestimmte Größen sind, denen man alle möglichen Werthe geben kann. Aus den Gleichungen [2] ergeben sich die Erzeugungslinien der Fläche, welche dem einen, und aus den Gleichungen [3] die, welche dem andern System angehören.

**687.** Diese Untersuchung läßt sich noch auf andere Weise führen. Man nehme die Gleichung einer beliebigen mit z parallelen Ebene

$$[4] \qquad y = \alpha x + \beta,$$

und eliminire y aus[p'] und [4], so erhält man

$$[5] \qquad \frac{a^2b^2z^2}{c^2} = (b^2 + a^2\alpha^2)\,x^2 + 2a^2\alpha\beta x + a^2\beta^2 - a^2b^2,$$

welche Gleichung den Durchschnitt des Hyperboloids und der Ebene, auf die Ebene xz projicirt, darstellt. Um diesen Durchschnitt auf zwei gerade Linien zurückzuführen, müssen die Werthe für z den ersten Grad von x enthalten, der zweite Theil der Gleichung muß also ein Quadrat sein, weßhalb die Bedingung stattfinden muß

$$a^4\alpha^2\beta^2 = (b^2 + a^2\alpha^2)\,(a^2\beta^2 - a^2b^2).$$

Daraus ergibt sich $\beta = \sqrt{b^2 + a^2\alpha^2}$, wo der Wurzelwerth das doppelte Vorzeichen $\pm$ hat. So bestimmt gibt die Gleichung [5] wirklich zwei Werthe des ersten Grads, und wenn man sie nach einander mit der Gleichung [4] verbindet, so erhält man

$$\begin{cases} y = \alpha x + \sqrt{b^2 + a^2\alpha^2}, \\ z = \dfrac{c\left(x\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2} + a^2\alpha\right)}{ab}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \alpha x + \sqrt{b^2 + a^2\alpha^2}, \\ z = \dfrac{-c\left(x\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2} + a^2\alpha\right)}{ab}. \end{cases}$$

Diese beiden Systeme von Gleichungen, in welchen $\alpha$ unbestimmt ist, entsprechen den beiden Systemen von Geraden auf der Fläche. Offenbar würde man die Gleichung des Hyperboloids erhalten, wenn man aus den beiden Gleichungen von irgend einem der zwei Systeme $\alpha$ eliminirte.

Verwandelt man c in $c\sqrt{-1}$, so finden die vorigen Resultate auf das Ellipsoid, und verwandelt man außerdem a in $a\sqrt{-1}$ und b in $b\sqrt{-1}$, auf das zweimantelige Hyperboloid ihre Anwendung. Dann sind aber diese Resultate imaginär; also lassen sich diese beiden Flächen durch keine gerade Linie erzeugen, was schon a priori einleuchtend ist.

**688.** Es ist noch zu beweisen, daß alle Flächen, welche durch eine gerade Linie erzeugt werden, die an drei festen, mit derselben Ebene nicht parallelen Linien hingleitet, Hyperboloide mit einem Mantel sind.

Vorerst ist zu bemerken, daß man durch jede dieser Geraden zwei mit den beiden andern Geraden beziehungsweise parallele Ebenen legen kann, und so ein Parallelepiped erhält, das diese drei Geraden zu Kanten hat. Angenommen FF'GH (Fig. 46) sei dieses Parallelepiped, und FF', GG', HH' die drei Directricen. Nun ziehe man durch den Mittelpunkt O dieses Parallelepipeds mit diesen Linien drei Parallelen Ox, Oy, Oz, und nehme sie als Coordinaten-Axen x, y, z, und setze noch

$$FF' = 2f, \quad GG' = 2g, \quad HH' = 2h.$$

Mit diesen Annahmen sind die Gleichungen der drei Directricen

für FF' $\left.\begin{matrix} y = g \\ z = -h \end{matrix}\right\}$; für GG' $\left.\begin{matrix} z = h \\ x = -f \end{matrix}\right\}$; für HH' $\left.\begin{matrix} x = f \\ y = -g \end{matrix}\right\}$.

Die Gleichungen der Erzeugungslinie seien

$$x = \alpha z + \alpha', \quad y = \beta z + \beta';$$

die Größen $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ müssen von den Gleichungen, welche ausdrücken, daß diese Linie die drei Erzeugungslinien trifft, abhängig gemacht werden; diese Gleichungen sind aber, wie man leicht findet,

$$g = -\beta h + \beta', \quad -f = \alpha h + \alpha', \quad \frac{\alpha' - f}{\alpha} = \frac{\beta' + g}{\beta}.$$

Nun darf man nur noch $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ aus diesen Gleichungen und denen der Erzeugungslinie eliminiren, um zwischen den Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Fläche, die durch die Fortbewegung dieser Linie an den drei festen Geraden erzeugt wurde, eine Relation zu erhalten. Aus den vier ersten Gleichungen erhält man aber

$$\alpha = \frac{x + f}{z - h}, \quad \alpha' = \frac{-fz - hx}{z - h}, \quad \beta = \frac{y - g}{z + h}, \quad \beta' = \frac{gz + hy}{z + h};$$

und setzt man diese Werthe in die fünfte Gleichung, so ergibt sich nach vorgenommener Reduction

$$hxy + gxz + fyz + fgh = 0.$$

Also gehört die Fläche zur zweiten Ordnung, und ihr Ursprung liegt im Mittelpunkt. Außerdem zeigt schon ihre Erzeugung, daß sie stetig fortgeht und unbegrenzt ist, und daß sie weder ein Cylinder noch ein Kegel ist; also kann sie nur ein Hyperboloid mit einem Mantel sein.

## Geradlinige Schnitte des hyperbolischen Paraboloids.

**689.** Auch auf der Fläche des hyperbolischen Paraboloids lassen sich durch jeden Punkt derselben zwei Gerade ziehen.

Denn nimmt man einen beliebigen Punkt dieser Fläche als Ursprung, so kann man ihrer Gleichung die Form geben

$$[Q'] \qquad P'y^2 - P''z^2 = 2Qx,$$

woraus hervorgeht, daß die Ebene yz die Fläche in zwei Geraden schneidet, die

$$y\sqrt{P'} = \pm z\sqrt{P''}$$

zu Gleichungen haben.

**690.** Von den Geraden der Fläche ist keine mit einer Diametral-Ebene parallel, denn alle Diametral-Ebenen sind mit der Axe der x parallel (Nro. 636), und solche Ebenen schneiden die Fläche in Parabeln (Nro. 673); daraus folgt nun, daß alle Geraden der Fläche diese Parabeln treffen. Es sei nun ABC (Fig. 47) eine dieser Parabeln; man ziehe durch alle Punkte derselben Tangenten AG, BH, . . . , und parallel mit den Sehnen, die der Diametral-Ebene ABC conjugirt sind, die Geraden AD, BE . . . . Die beiden Geraden des Paraboloids, die durch den Punkt A gehen, liegen in der Berührungsebene DAG und zwar in Beziehung auf AD auf entgegengesetzten Seiten derselben; und von den Geraden der Fläche, welche durch jeden andern Punkt der Curve ABC gehen, läßt sich eine analoge Bemerkung machen. Daraus ergibt sich die Unterscheidung dieser Geraden in zwei Systeme, und es läßt sich beweisen, wie dieß bei dem Hyperboloid mit einem Mantel der Fall war (Nro. 682), daß zwei Gerade desselben Systems einander nie treffen, daß aber zwei Gerade von verschiedenen Systemen immer zusammentreffen.

**691.** Um die Gleichungen der auf dem Paraboloid liegenden Geraden zu erhalten, bringe man die Gleichung [Q'] in die Form

$$(y\sqrt{P'} - z\sqrt{P''})\,(y\sqrt{P'} + z\sqrt{P''}) = 2Qx;$$

dieser wird offenbar Genüge geleistet, wenn man

$$[1] \qquad y\sqrt{P'} - z\sqrt{P''} = \alpha \text{ und } y\sqrt{P'} + z\sqrt{P''} = \frac{2Q}{\alpha}x$$

setzt, oder auch mit

$$[2] \qquad y\sqrt{P'} + z\sqrt{P''} = \beta \text{ und } y\sqrt{P'} - z\sqrt{P''} = \frac{2Q}{\beta}x.$$

Mittelst dieser Gleichungen erhält man die zwei Systeme von Geraden, wenn man den Unbestimmten $\alpha$ und $\beta$ alle möglichen Werthe gibt.

**692.** Diese Geraden erhält man auch durch die Rechnungen in Nro. 687. Es sei

$$[3] \qquad x = \alpha z + \beta$$

die Gleichung irgend einer mit y parallelen Ebene. Zuerst eliminirt man x aus [Q'] und [3], dieß gibt

$$[4] \qquad P'y^2 = P''z^2 + 2Q\alpha z + 2Q\beta.$$

Dann müssen $\alpha$ und $\beta$ der Bedingung, unter welcher diese Gleichung zwei Gerade vorstellt, unterworfen werden, und man erhält so

$$Q^2\alpha^2 = 2P''Q\beta, \quad \text{woraus } \beta = \frac{Q\alpha^2}{2P''}.$$

Somit erhält man für die Gleichungen [3] und [4]

$$[5] \qquad x = az + \frac{Q\alpha^2}{2P''}, \quad y = \pm\left(z\sqrt{\frac{P''}{P'}} + \frac{Q\alpha}{\sqrt{P'P''}}\right);$$

welche nun das eine oder das andere System von Geraden bestimmen, je nachdem man das Vorzeichen + oder — nimmt.

**693.** Zwischen dem Hyperboloid mit einem Mantel und dem hyperbolischen Paraboloid findet ein bemerkenswerther Unterschied statt. Bei der ersten Fläche sind nämlich drei Gerade desselben Systems mit einer und derselben Ebene nicht parallel (Nro. 684), während dieß bei der zweiten immer der Fall ist. Denn offenbar sind nach den vorigen Resultaten die Projectionen aller Geraden desselben Systems auf der Ebene yz mit einander parallel, und folglich sind es diese Geraden mit einer und derselben Ebene, die selbst wieder mit den Durchmessern der Fläche parallel ist.

Es ist somit erwiesen, daß das hyperbolische Paraboloid durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann, die sich an drei festen, mit derselben Ebene parallelen Geraden hinbewegt, oder auch durch eine Gerade, die sich an zwei festen Geraden hinbewegt und dabei mit einer gegebenen Ebene immer parallel bleibt.

**694.** Umgekehrt läßt sich zeigen, daß jede aus einer dieser beiden Erzeugungsarten entstehende Fläche ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Nehmen wir zuerst an (Fig. 48), die Erzeugungslinie bewege sich auf drei Richtungslinien AR, BS, CT-parallel mit einer Ebene. Nun sei Az eine besondere Lage der Erzeugungslinie und A, B, C die Punkte, wo sie die drei Directricen schneidet. Man ziehe Ax und Ay parallel mit BS und CT, so liegen die Linien AR, Ax, Ay in einer und derselben Ebene, die Ebene zAx enthält BS, und die Ebene zAy enthält CT. Nun nehme man die drei Linien Ax, Ay, Az als Coordinaten-Axen; dann heißen die Gleichungen der drei Directricen

$$\text{für AR } \left.\begin{matrix} y = ax \\ z = 0 \end{matrix}\right\}; \quad \text{für BS } \left.\begin{matrix} y = 0 \\ z = b \end{matrix}\right\}; \quad \text{für CT } \left.\begin{matrix} x = 0 \\ z = b' \end{matrix}\right\}.$$

Die Gleichungen der Erzeugungslinie seien

$$x = \alpha z + \alpha', \quad y = \beta z + \beta';$$

damit sie die drei Directricen treffe, findet die Bedingung statt:

$$a\alpha' - \beta' = 0, \quad b\beta + \beta' = 0, \quad b'\alpha + \alpha' = 0,$$

und um die Gleichung der Fläche zu erhalten, muß $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ aus diesen und den Gleichungen der Erzeugungslinie eliminirt werden; dann ergibt sich

$$ab'xz - byz - abb'x + bb'y = 0;$$

also gehört die Fläche zur zweiten Ordnung; und da sie durch eine Gerade erzeugt wird, die sich auf drei mit einer Ebene parallelen Directricen hinbewegt, so muß sie ein hyperbolisches Paraboloid sein.

Nehmen wir nun an (Fig. 49), die Erzeugungslinie bewege sich auf zwei Geraden Az und Bu fort, und bleibe dabei fortwährend mit derselben Ebene yAz parallel. Die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit den beiden Directricen seien A und B: man ziehe durch diese Punkte die Gerade Ay, lege durch die Linie Az eine mit Bu parallele Ebene, welche die Ebene yAx in der Linie Ax schneidet, und nehme Ax, Ay, Az als Coordinaten-Axen.

Da nun die Directrix Bu durch die Axe der y geht und mit der Ebene xAz parallel ist, so heißen ihre Gleichungen

$$z = ax, \quad y = b;$$

da ferner die Erzeugungslinie mit der Axe der z immer zusammentreffen, und mit der Ebene xy parallel bleiben muß, so sind ihre Gleichungen von der Form

$$x = \alpha y, \quad z = \beta;$$

und da sie auch mit Bu zusammentreffen muß, so hat man die Bedingung

$$\beta = ab\alpha;$$

nun erhält man, wenn aus dieser und der Gleichung der Erzeugungslinie $\alpha$ und $\beta$ eliminirt wird,

$$yz = abx.$$

Diese Gleichung stellt ein hyperbolisches Paraboloid vor; denn die zweite Ordnung enthält nur diese Fläche, auf der man Gerade ziehen kann, die mit andern Geraden, welche mit derselben Ebene parallel sind, zusammentreffen.

## Kreisförmige Schnitte.

**695.** Zu Anfang dieses Kapitels wurde im Allgemeinen gezeigt, welche Curven man erhält, wenn die verschiedenen Flächen der zweiten Ordnung durch Ebenen geschnitten werden, und nachher fand man, daß das Hyperboloid mit einem Mantel und das hyperbolische Paraboloid gerade

Linien geben können; nun soll untersucht werden, ob es möglich ist, die schneidenden Ebenen in eine solche Lage zu bringen, daß die Durchschnitte Kreise werden.

Betrachten wir zuerst ein Ellipsoid (Fig. 50) mit den halben Axen OA, OB, OC, nehmen $OA > OB$, $OB > OC$ an, und legen durch die mittlere Axe OB eine Ebene, welche die Ellipse AC im Punkte D trifft. Ihr Durchschnitt mit der Fläche ist eine Ellipse, mit den halben Axen OB und OD: dreht man nun die Ebene um OB, so wird die Linie OD gleich jeder Länge zwischen OA und OC; also gibt es auch eine Lage, für welche $OD = OB$ ist. Dann ist der Durchschnitt ein Kreis, und ebenso alle damit parallelen Durchschnitte.

Aus der Symmetrie des Ellipsoids in Beziehung auf seine Axen geht hervor, daß, wenn Winkel $COD' = COD$ gemacht wird, auch die Ebene D'OB die Fläche in einem Kreise schneidet. Die beiden Ebenen DOB, D'OB fallen mit der Ebene COB zusammen, wenn $OB = OC$, und mit AOB, wenn $OB = OA$ ist; in diesen beiden Fällen ist das Ellipsoid eine Umdrehungsfläche.

Vorhin wurde die Ebene DOB durch die mittlere Axe gelegt; würde man sie durch eine der beiden andern Axen gelegt haben, so hätte man offenbar keinen Kreis erhalten: wenn sie z. B. durch OA geht, so ist der Schnitt eine Ellipse, die eine halbe Axe desselben ist OA, aber die andere, die zwischen OB und OC liegt, kann nicht gleich OA werden.

**696.** Auf folgende Weise lassen sich die Kreise BD und BD' sehr einfach finden. Man nehme die Gleichung des Ellipsoids in Beziehung auf seine Hauptebenen

$$[P] \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

und bringe sie in folgende Form

$$Px^2 + P'(x^2+y^2+z^2) + P''z^2 = H + P'x^2 + P'z^2,$$

oder auch in folgende

$$P'(x^2+y^2+z^2) = H + (P'-P)x^2 - (P''-P')z^2.$$

Dieser Gleichung wird offenbar Genüge geleistet, wenn man die beiden folgenden annimmt;

$$P'(x^2+y^2+z^2) = H, \quad (P'-P)x^2 = (P''-P')z^2.$$

Die erste ist die Gleichung einer Kugelfläche, deren Halbmesser die halbe Axe OB ist; die zweite stellt zwei durch diese halbe Axe gehende Ebenen vor, denn sie gibt

$$x = \pm z\sqrt{\frac{P''-P'}{P'-P}}.$$

Folglich liegen die aus dem Durchschnitt der Kugel mit diesen beiden Ebenen entstehenden Kreise auf dem Ellipsoid.

Damit aber durch diese Werthe von x wirklich Ebenen bestimmt werden, muß die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv sein, und deßhalb muß P′ zwischen P″ und P enthalten sein: das heißt, die Ebenen müssen durch die mittlere Axe gehen.

**697.** Die vorigen Beweise lassen sich leicht auch auf die andern Flächen anwenden; ungeachtet ihrer Einfachheit und Eleganz haben sie jedoch den Nachtheil, daß sie nicht bestimmen, ob die sich ergebenden Kreisschnitte die einzig möglichen sind. Wir wollen daher diese Untersuchung noch einmal in einer Weise vornehmen, wodurch sich alle Durchschnitte der Flächen durch Ebenen allgemein und vollständig ergeben.

Angenommen, irgend eine Fläche (Fig. 51) sei auf drei rechtwinklige Axen Ox, Oy, Oz bezogen und werde durch irgend eine Ebene geschnitten. Man nehme in dieser Ebene den Punkt O′ beliebig, und ziehe O′R, O′S, O′T parallel mit Ox, Oy, Oz. Es sei $RO'x' = \varphi$ der Winkel, den die Spur O′x′ dieser Ebene auf der Ebene RO′S mit O′R macht, und $\theta$ sei die Neigung der ersten Ebene gegen die zweite. In der schneidenden Ebene errichte man O′y′ senkrecht auf O′x′.

Man bezeichne die Coordinaten des auf die Axen Ox, Oy, Oz bezogenen Punktes O′ mit f, g, h: die eines beliebigen Punktes der schneidenden Ebene in Beziehung auf dieselben Axen mit x, y, z, und die desselben Punktes in Beziehung auf die Axen O′x′, O′y′, mit x′, y′. Nun hat man die Formeln (Nro. 603)

$$[1] \qquad \begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \cos\theta + f, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \cos\theta + g, \\ z = y' \sin\theta + h, \end{cases}$$

und setzt man diese Werthe in die Gleichung der gegebenen Fläche, so erhält man den Durchschnitt dieser Fläche mit der Ebene.

Zu größerer Einfachheit betrachte man zuerst nur die Flächen der zweiten Ordnung mit einem Mittelpunkt, und substituire die vorigen Werthe in der Gleichung

$$[E] \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

deren Coordinaten man rechtwinklig annehmen kann; dann ergibt sich ein Resultat von der Form

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0,$$

in welchem

$$A = P \sin^2\varphi \cos^2\theta + P' \cos^2\varphi \cos^2\theta + P'' \sin^2\theta,$$
$$B = 2 (P' - P) \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta,$$
$$C = P \cos^2\varphi + P' \sin^2\varphi$$

ist; um nun einen Kreis zu erhalten, muß $B = 0$ und $A = C$ sein, also ist

$$[2] \qquad (P'-P) \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta = 0,$$

$$[3] \quad P \sin^2\varphi \cos^2\theta + P'\cos^2\varphi \cos^2\theta + P'' \sin^2\theta = P\cos^2\varphi + P'\sin^2\varphi.$$

Im Allgemeinen läßt sich der Gleichung [2], wenn P nicht gleich P' ist, nur dadurch genügen, daß man entweder

$$\cos\theta = 0, \quad \text{oder} \quad \sin\varphi = 0, \quad \text{oder} \quad \cos\varphi = 0 \text{ setzt.}$$

In Folge der ersten Voraussetzung, $\cos\theta = 0$, verwandelt sich die Gleichung [3] in

$$P\cos^2\varphi + P'\sin^2\varphi = P''.$$

Anstatt P'' kann man in der zweiten Gleichungsseite auch

$$P''(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

setzen, dann erhält man nach einander

$$P\cos^2\varphi + P'\sin^2\varphi = P''\cos^2\varphi + P''\sin^2\varphi,$$

$$(P'-P'')\sin^2\varphi = (P''-P)\cos^2\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{\frac{P''-P}{P'-P''}}.$$

Durch die zweite Voraussetzung, $\sin\varphi = 0$, reducirt sich die Gleichung [3] auf

$$P'\cos^2\theta + P''\sin^2\theta = P;$$

somit erhält man

$$P'\cos^2\theta + P''\sin^2\theta = P\cos^2\theta + P\sin^2\theta,$$

$$(P''-P)\sin^2\theta = (P-P')\cos^2\theta,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\frac{P-P'}{P''-P}}.$$

Die dritte Voraussetzung, $\cos\varphi = 0$, gibt endlich

$$P\cos^2\theta + P''\sin^2\theta = P',$$

$$P\cos^2\theta + P''\sin^2\theta = P'\cos^2\theta + P'\sin^2\theta,$$

$$(P''-P')\sin^2\theta = (P'-P)\cos^2\theta$$

$$\operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\frac{P'-P}{P''-P'}}.$$

Welches nun auch die Vorzeichen in der Gleichung [E] sein mögen, so ist doch immer, so lange die Fläche keine Drehungsfläche ist, eine der Größen P, P', P'' zwischen den beiden andern enthalten. Angenommen,

dieß sei $P'$, so sind die beiden ersten Wurzelwerthe imaginär, der dritte allein ist reell; um also kreisförmige Schnitte zu erhalten, muß

$$\cos\varphi = 0, \quad \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\frac{P'-P}{P''-P'}}$$

sein. Diese Werthe geben zwei Reihen von Ebenen, die mit der Axe der y parallel sind.

Ist die Fläche eine Drehungsfläche, so sind zwei von den Größen $P, P', P''$ einander gleich. Es sei $P'' = P'$, dann verwandeln sich die Auflösungen der Gleichungen [2] und [3] in

$$\cos\theta = 0, \quad \operatorname{tang}\varphi = \infty \text{ oder } \cos\varphi = 0;$$
$$\cos\varphi = 0, \quad \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{-1}:$$
$$\cos\varphi = 0, \quad \operatorname{tang}\theta = \infty \text{ oder } \cos\theta = 0.$$

Die zwei reellen Auflösungen enthalten die nämlichen Werthe

$$\cos\theta = 0, \quad \cos\varphi = 0,$$

und sie zeigen, daß die Kreisschnitte auf der Axe der x, die hier Drehungs-Axe ist, senkrecht stehen müssen.

Für $P'' = P' = P$ ist die Gültigkeit der Gleichungen [2] und [3] von selbst bei jedem Werth von $\varphi$ und $\theta$ einleuchtend, und es wird dadurch ausgedrückt, daß der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene immer ein Kreis ist.

Um die vorausgehende Entwicklung auf Paraboloide anzuwenden, nehme man bei rechtwinkligen Coordinaten ihre Gleichung

$$[F] \qquad P'y^2 + P''z^2 = 2Qx;$$

und die Substitution der Werthe [1] gibt wieder ein Resultat von der Form

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + \ldots = 0;$$

dann ist aber für A, B, C

$$A = P'\cos^2\varphi\cos^2\theta + P''\sin^2\theta, \quad B = 2P'\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta, \quad C = P'\sin^2\varphi;$$

und damit der Durchschnitt ein Kreis werde, muß

$$\sin\varphi\,\cos\varphi\,\cos\theta = 0, \quad P'\cos^2\varphi\,\cos^2\theta + P''\sin^2\theta = P'\sin^2\varphi \text{ sein.}$$

Daraus ergeben sich drei Systeme von Werthen, nämlich

$$\begin{cases}\sin\varphi = 0,\\ \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{-\frac{P'}{P''}};\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\varphi = 0,\\ \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{P'}{P''}};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\varphi = \mp\sqrt{\frac{P''}{P'}}.\end{cases}$$

Ist das Paraboloid elliptisch, so haben $P'$ und $P''$ dasselbe Vorzeichen: ist dann $P'$ größer als $P''$, so sind die Werthe von $\varphi$ und $\theta$ nur im dritten System reell; ist aber $P'$ kleiner als $P''$, so sind sie nur im zweiten reell. So erhält man zwei Reihen von Ebenen, die auf der Ebene xy oder xz senkrecht stehen. Ist $P'' = P'$, so hat man nur noch eine einzige Reihe von Ebenen, die auf der Axe des Paraboloids senkrecht stehen.

Für das hyperbolische Paraboloid haben $P''$ und $P'$ verschiedene Vorzeichen, und nur das erste System gibt reelle $\varphi$ und $\theta$; dann werden aber die Coefficienten A und C zugleich mit B zu Null, und da somit die Gleichung $Ay'^2 +$ u. s. w. $= 0$, auf den ersten Grad reducirt wird, so stellt sie nur noch gerade Linien vor.

Somit ist erwiesen, daß außer dem hyperbolischen Paraboloid die Flächen der zweiten Ordnung durch parallele Ebenen, nach zwei verschiedenen Richtungen in Kreisen geschnitten werden können.

Es würde sogar jede Ausnahme verschwinden, wenn man die Geraden, die sich auf dem hyperbolischen Paraboloid ziehen lassen, als Kreise mit unendlich großen Halbmessern betrachten wollte.

Man wird ohne Zweifel bemerken, daß bei jeder Reihe von Kreisen ihre Mittelpunkte auf einem Durchmesser der Fläche liegen; denn dieß ist bei allen parallelen Schnitten der Fall (Nro. 634). Auch ist wahrzunehmen, daß die Eigenschaft des antiparallelen Durchschnitts beim schiefen Kegel ein besonderer Fall des vorigen Lehrsatzes ist.

## Beweise einiger Lehrsätze.

**698.** Lehrsatz. Wenn Kegel ebene Durchschnitte einer Fläche der zweiten Ordnung zur Grundfläche und einen Punkt dieser Fläche als gemeinschaftliche Spitze haben, und man durch diesen Punkt eine Berührungsebene an die Fläche legt, so sind die Durchschnitte, welche durch eine mit der Berührungsebene parallelen Ebene an den Kegeln und der Fläche gebildet werden, ähnliche und ähnlich liegende Curven.

Die Spitze dieser Kegel sei irgend ein Punkt der Fläche; nun nehme man den Durchmesser, der durch diesen Punkt geht, als Axe der x, und die Ebene yz als Berührungsebene, so ergibt sich bei geeigneter Richtung der y und z eine Gleichung der Fläche von der Form

$$[1] \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 2Qx.$$

Ferner nehme man den Durchschnitt der Fläche durch eine beliebige Ebene als Grundfläche eines der Kegel, und es sei

$$[2] \qquad x = \alpha y + \beta z + \gamma$$

die Gleichung dieser Ebene. Bezeichnet man die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf diesem Durchschnitte mit $x'$, $y'$, $z'$, so ist

$$[3] \quad Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = 2Qx, \quad x' = \alpha y' + \beta z' + \gamma.$$

Nun ziehe man durch diesen Punkt und den Ursprung eine Gerade, so sind die Gleichungen derselben

$$[4] \quad y = \frac{y'}{x'}\,x, \quad z = \frac{z'}{x'}\,x.$$

Diese Gerade ist aber irgend eine Erzeugungslinie des Kegels, daher erhält man durch Elimination von $x'$, $y'$, $z'$ aus [3] und [4] die Gleichung dieses Kegels.

Aus den Gleichungen [4] ergibt sich

$$y' = \frac{yx'}{x}, \quad z' = \frac{zx'}{x};$$

somit verwandeln sich die Gleichungen [3] in

$$(Px^2 + P'y^2 + P''z^2)\,x' = 2Qx^2, \quad xx' = (\alpha y + \beta z)\,x' + \gamma x,$$

wo nur noch $x'$ zu eliminiren ist; dann erhält man für den Kegel

$$[5] \quad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = \frac{2Qx}{\gamma}\,(x - \alpha y - \beta z).$$

Schneidet man nun diesen Kegel und die gegebene Fläche durch eine mit der Ebene $yz$ parallele Ebene, und setzt deßhalb $x = \lambda$ in [1] und [5], so ergibt sich

$$P'y^2 + P''z^2 = 2Q\lambda - P\lambda^2,$$

$$P'y^2 + P''z^2 = \frac{2Q\lambda}{\gamma}\,(\lambda - \alpha y - \beta z) - P\lambda^2.$$

Mit der Veränderung der Ebene, welche die Grundfläche des Kegels bildet, ändern sich auch die Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; in diesen Gleichungen bleiben aber die Glieder des zweiten Grades dieselben, und sie stellen daher auch fortwährend ähnliche und ähnlich liegende Kegel vor, welche Eigenschaft zu beweisen war. Es kann indessen auch der Fall vorkommen, daß diese Curven Hyperbeln von verschiedener Richtung sind.

Der eben bewiesene Lehrsatz ist der Erweiterung einer bekannten Eigenschaft der Kugel (Nro. 524, I), auf welche Ptolemäus die Construction der Weltkarten, wie sie noch heutzutage gebraucht werden, gegründet hat.

**699.** Lehrsatz. Wenn sich zwei Flächen zweiten Grads in einer ebenen Linie schneiden, so schneiden sie sich auch noch in einer andern ebenen Linie.

Man nehme, wie J. Binet, die Ebene der gemeinschaftlichen Linie zur Ebene xy, und als Gleichungen der beiden Flächen

$$[1] \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Bxy + B'xz + B''yz + Cx + C'y + C''z + F = 0,$$

$$[2] \quad ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + bxy + b'xz + b''yz + cx + c'y + c''z + f = 0.$$

Setzt man $z = 0$, so stellen die sich ergebenden Gleichungen dieselbe Linie vor, und deßhalb müssen die Coefficienten dieser Gleichungen in Proportion stehen. Es sei nun $\varrho$ das Verhältniß von A zu a, so ist

$$A = a\varrho, \quad A' = a'\varrho, \quad B = b\varrho, \quad C = c\varrho, \quad C' = c'\varrho, \quad F = f\varrho.$$

Nun multiplicire man die Gleichung [2] mit $\varrho$, und ziehe sie dann von der Gleichung [1] ab, dann müssen die Glieder, welche z nicht enthalten, verschwinden, und man erhält

$$(A'' - a''\varrho)z^2 + (B' - b'\varrho)xz + (B'' - b''\varrho)yz + (C'' - c''\varrho)z = 0.$$

Die Coordinaten aller Punkte, welche beiden Flächen gemeinschaftlich sind, müssen dieser Gleichung Genüge leisten: nun läßt sie sich aber in folgende zwei zerlegen,

$$z = 0, \text{ und } (A'' - a''\varrho)z + (B' - b'\varrho)x + (B'' - b''\varrho)y + C'' - c''\varrho = 0,$$

welche zwei Ebenen vorstellen; also besteht der Durchschnitt beider Ebenen aus zwei ebenen Linien. In gewissen Fällen kann die zweite Linie mit der ersten zusammenfallen; auch kann sie zu einer bloßen geraden Linie, oder zu einem einzigen Punkte, oder sogar imaginär werden.

**700.** Lehrsatz. Bei einer Fläche zweiten Grades liegen zwei beliebige Kreise, die verschiedenen Reihen angehören, immer auf derselben Kugelfläche.

Diese Eigenschaft ist eine Erweiterung derjenigen, welche Nro. 470 für die entgegengesetzten Schnitte des schiefen Kegels gefunden wurde; sie läßt sich folgendermaßen beweisen.

Es sei MNPQ die Hauptebene einer Fläche der zweiten Ordnung, auf welcher die beiden Reihen von Ebenen, welche die Fläche in Kreisen schneiden, senkrecht stehen, und MN, PQ seien die Durchmesser zweier solcher in beiden Reihen genommenen Kreise. Man denke sich von dem Mittelpunkt und mit dem Halbmesser des Kreises, der durch die drei Punkte M, N, P geht, eine Kugel beschrieben. Nun liegt offenbar der Kreis MN auf dieser Kugel und ist ein Durchschnitt der Kugel mit der gegebenen Fläche. Folglich ist die andere Durchschnittscurve eben und daher ein Kreis; denn auf der Kugel sind alle ebenen Curven Kreise. Da dieser Kreis auf der gegebenen Fläche liegen und durch den Punkt P gehen muß, so ist er in einer der beiden Reihen der kreisförmigen Schnitte enthalten; es kann aber nicht der mit dem Kreise MN parallele Kreis PR sein; denn in diesem Falle müßten die

Mittelpunkte dieser beiden Kreise, die zu derselben Kugel gehören, auf einem mit ihren Ebenen senkrechten Durchmesser liegen, und dann müßten die Sehnen MN und PR auf ihrem conjugirten Durchmesser senkrecht stehen. Dieß ist aber unmöglich, wenn die Fläche nicht eine Drehungsfläche ist, und in diesem Falle würden die Kreise PQ und PR zusammenfallen. Daraus folgt, daß der Kreis PQ die zweite Durchschnittscurve sein muß, was zu beweisen war.

**701.** Lehrsatz. Wenn zwei Flächen zweiten Grades eine gemeinschaftliche Hauptebene haben, so ist auch die Projection des Flächenschnitts auf dieser Ebene eine Linie der zweiten Ordnung.

Man nehme die gemeinschaftliche Hauptebene als Ebene xy, und die z senkrecht auf dieser Ebene. Die Gleichungen der beiden Flächen dürfen keine ungerade Potenz von z enthalten, und haben die Form

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Bxy + Cx + C'y + F = 0,$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + bxy + cx + c'y + f = 0.$$

Zieht man nun, um z zu eliminiren, eine von der andern ab, nachdem sie vorher beziehungsweise mit a'' und A'' multiplicirt wurden, so ergibt sich nach x und y eine Gleichung des zweiten Grades; folglich u. s. w.

# Zehntes Kapitel.

## Discussion numerischer Gleichungen des zweiten Grades mit drei Veränderlichen.

---

### Darstellung des Verfahrens.

**702.** Nachdem wir die unterscheidenden Eigenschaften, sowie die der besondern dabei vorkommenden Fälle von jeder Fläche des zweiten Grades kennen gelernt haben, soll nun gezeigt werden, auf welche Fläche oder auf welchen besondern Fall sich eine Gleichung des zweiten Grades, deren Coefficienten gegebene Zahlen sind, bezieht.

Nachdem die Gleichung auf die Form

$$[A] \qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+2Cx+2C'y+2C''z+F=0$$

gebracht ist, setze man die aus der ersten Seite nach x, y, z abgeleiteten Polynome gleich Null: so ergeben sich drei Gleichungen des ersten Grades, wodurch man die Coordinaten des Mittelpunktes in Werthen von x, y, z (Nro. 627) erhält.

Die Auflösung dieser Gleichungen führt aber auf vier allgemeine Fälle (Nro. 628):

1) Es ist nur ein Mittelpunkt vorhanden; 2) es gibt unendlich viele in einer geraden Linie liegenden Mittelpunkte; 3) es gibt unendlich viele in einer Ebene liegenden Mittelpunkte, oder 4) es ist kein Mittelpunkt vorhanden.

**703.** Erster Fall. Man versetze den Ursprung in den Mittelpunkt, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$[G] \quad Ay^2 + A'x^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + G = 0,$$

in welcher die Coefficienten dieselben sind wie in [A], außer bei G, dessen Werth (Nro. 627)

$$G = Cf + C'g + C''h + F \text{ ist.}$$

Man nehme an, G sei nicht Null, dividire die Gleichung [G] durch — G, und bilde die Gleichung, welche die Axen der Fläche ergibt (Nro. 642); zu diesem Zweck nehme man die Gleichung [3] in Nro. 637, setze darin $-\frac{A}{G}, -\frac{A'}{G}, \ldots$ für A, A' ...., und der Abkürzung wegen

$$L = -\frac{A+A'+A''}{G},$$

$$M = \frac{AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2}{G^2},$$

$$N = \frac{AB''^2+A'B'^2+A''B^2-AA'A''-2BB'B''}{G^3},$$

so heißt die betreffende Gleichung

$$[\lambda] \qquad \lambda^3 - L\lambda^2 + M\lambda - N = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind bekanntlich (Nro. 642) nie imaginär, und wenn man sie mit $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ bezeichnet, so sind die halben Axen der Fläche $\sqrt{\frac{1}{\lambda'}}, \sqrt{\frac{1}{\lambda''}}, \sqrt{\frac{1}{\lambda'''}}$.

Da diese Wurzeln reell sind, so ist die Regel von Descartes zur Erkennung ihrer Vorzeichen hinreichend. Hat die Gleichung [λ] drei Zeichenwechsel, so sind die Wurzeln $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ positiv, und die Fläche hat ihre drei reellen Axen; also ist sie ein Ellipsoid. Kommen nur zwei Zeichenwechsel vor, so hat die Fläche nur zwei reelle Axen, und ist ein Hyperboloid mit einem Mantel. Kommt nur ein Zeichenwechsel vor, so hat die Fläche nur eine reelle Axe, und ist ein Hyperboloid mit zwei Mänteln. Hat aber die Gleichung [λ] nur Zeichenfolgen und ihre Wurzeln sind negativ, so werden die drei Axen imaginär, das heißt, es gibt keinen Punkt, dessen Coordinaten der gegebenen Gleichung Genüge leisten könnten.

Um die Gleichung [λ] anzuwenden, müssen die Coordinaten rechtwinklig sein; es soll deßhalb auch noch das folgende, von dieser Voraussetzung unabhängige Verfahren angeführt werden.

Man ziehe durch den Mittelpunkt eine beliebige Gerade und sehe, ob sie in allen Lagen die Fläche, die dann ein Ellipsoid ist, trifft. Im entgegengesetzten Fall wäre sie ein Hyperboloid, und um zu erkennen, welches

von den beiden, lege man durch den Mittelpunkt eine Ebene und suche dann, ob diese Ebene bei Veränderung ihrer Lage die Fläche in Ellipsen schneiden kann, wodurch sich dann das Hyperboloid mit einem Mantel erkennen läßt. Derselbe Schluß läßt sich auch ziehen, wenn sich bei der Untersuchung ergibt, daß die Fläche von der Ebene in einer Geraden geschnitten werden kann. Oft genügen die Schnitte mit Coordinaten-Ebenen, oder mit den ihnen parallelen Ebenen, um alle nöthigen Andeutungen zu erhalten.

Bis jetzt wurde angenommen, G sei nicht Null; setzen wir nun $G = 0$, so reducirt sich die Gleichung [G] auf

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz = 0.$$

Dieser wird durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ Genüge geleistet; also ist der Mittelpunkt ein Theil der Fläche, und da immer noch die Voraussetzung eines einzigen Mittelpunktes stattfindet, so muß die Gleichung entweder einen Kegel oder einen einzigen Punkt vorstellen. Um zu wissen, welcher der beiden Fälle stattfindet, macht man mit einer der Coordinaten-Ebenen einen parallelen Schnitt, und untersucht, ob dieser reell oder imaginär ist.

**704.** Zweiter Fall. Bei der Auflösung der drei Gleichungen, welche den Mittelpunkt bestimmen, kann es der Fall sein, wenn man aus zwei der Gleichungen die Werthe zweier Unbekannte sucht und sie in die dritte Gleichung setzt, daß diese von selbst ohne weitere Bestimmung der letzten Unbekannten befriedigt ist. Daraus läßt sich dann schließen, daß die durch die drei Gleichungen gegebenen Ebenen sich in derselben geraden Linie schneiden, und jeder Punkt dieser Linie als Mittelpunkt genommen werden kann.

In diesem Falle muß die gegebene Gleichung einen elliptischen Cylinder, oder einen hyperbolischen Cylinder, oder zwei sich schneidende Ebenen, oder eine einzige Gerade, oder eine imaginäre Fläche vorstellen, und schneidet man die Fläche durch Coordinaten-Ebenen, so muß jede Unbestimmtheit verschwinden. Zuweilen genügt schon der Durchschnitt mit einer dieser Ebenen: gibt z. B. die Ebene xy eine Ellipse, so läßt sich behaupten, daß die Fläche ein elliptischer Cylinder ist; gibt sie aber zwei Parallellinien, so muß man die Ebene xz nehmen; findet man wieder zwei Parallelen, so bedient man sich der Ebene yz, wobei kein Zweifel mehr übrig bleiben kann. S. die Beispiele Nro. 708.

**705.** Dritter Fall. Dieser findet statt, wenn der Werth einer Unbekannten, der aus einer der drei den Mittelpunkt bestimmenden Gleichungen sich ergibt, die beiden andern Gleichungen identisch macht. Dann gibt es unendlich viele Mittelpunkte, deren geometrischer Ort eine Ebene ist, und die gegebene Gleichung muß entweder zwei parallele Ebenen, oder eine einzige Ebene, oder zwei imaginäre Ebenen vorstellen. Durch die Schnitte mit Coordinaten-Ebenen fällt vollends jede Unbestimmtheit weg.

**706.** Vierter Fall. Dieser Fall wird daran erkannt, daß man bei der Aufsuchung der Coordinaten des Mittelpunkts auf eine offenbare Unmöglichkeit, wie z. B. $2 = 3$, verfällt. Dann ist kein Mittelpunkt vorhanden, und die mit den Coordinaten-Ebenen parallelen Schnitte lösen vollends die Frage; denn es muß sich entweder ein elliptisches Paraboloid, oder ein hyperbolisches Paraboloid, oder ein paraboloischer Cylinder ergeben, und es läßt sich zeigen, daß diese Schnitte für jede dieser Flächen auch verschiedene Resultate geben.

In dem elliptischen Paraboloid müssen die Schnitte Parabeln oder Ellipsen sein (Nro. 673); nun laufen aber die Ebenen, welche Parabeln geben, mit derselben Geraden parallel, also ist unter den drei Reihen von Durchschnitten wenigstens eine, die aus Ellipsen besteht. Ist endlich die Fläche ein paraboloischer Cylinder, so können die Schnitte nur Parabeln oder parallele Linien sein.

## Beispiele.

**707.** Beispiele, wo nur ein Mittelpunkt vorkommt.

**Beispiel I.** Es sei die Gleichung gegeben

[1] $$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z = 0.$$

Zuerst bilde man daraus die abgeleiteten Gleichungen

$$x + y - 1 = 0, \quad 2y + x - 2 = 0, \quad z - 1 = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$; also findet ein einziger Mittelpunkt statt.

Wird die Gleichung [1] mit [A] verglichen, so findet sich

$$C = -1, \quad C' = -2, \quad C'' = -2, \quad F = 0;$$

daher verwandelt sich die Größe G in $G = -4$, und durch die Versetzung des Ursprungs in den Mittelpunkt ergibt sich für die Fläche

[2] $$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4 = 0.$$

Um zu sehen, was aus der Gleichung [λ] bei rechtwinkligen Coordinaten wird, setze man

$$A = 1, \; A' = 2, \; A'' = 2, \; B = 1, \; B' = 0, \; B'' = 0, \; G = -4;$$

dann ist

$$L = \tfrac{5}{4}, \quad M = \tfrac{7}{16}, \quad N = \tfrac{1}{32};$$

also heißt die Gleichung [λ]

$$\lambda^3 - \tfrac{5}{4}\lambda^2 + \tfrac{7}{16}\lambda - \tfrac{1}{32} = 0,$$

und da drei Zeichenwechsel vorkommen, so muß die Fläche ein Ellipsoid sein.

Dieß zeigt sich auch in Folgendem. Geht eine Gerade durch den Mittelpunkt, so heißt ihre Gleichung $x = az$, $y = bz$, und sucht man ihre Durchschnitte mit der Fläche, so ergibt sich

$$z = \pm \sqrt{\frac{4}{(a+b)^2+b^2+2}}.$$

Diese Werthe, sowie die von x und y sind für jeden Werth von a und b reell; folglich wird die Fläche von allen ihren Durchmessern getroffen, und ist daher ein Ellipsoid.

Zu diesem Schluß kommt man auch ohne weitere Voraussetzung in Betreff der Coordinatenrichtung mittelst paralleler Durchschnitte auf der Ebene yz.

Es sei in der Gleichung [2] $x = \alpha$, so ist

$$2y^2 + 2z^2 + 2\alpha y + \alpha^2 - 4 = 0,$$

oder

$$z^2 + (y + \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2.$$

Setzt man $\alpha < \sqrt{8}$ für irgend ein Vorzeichen von $\alpha$, so sind die Durchschnitte offenbar Ellipsen; setzt man aber $\alpha > \sqrt{8}$, so sind sie imaginär. Damit ist das Ellipsoid klar angedeutet.

**Beispiel II.** Es sei die Gleichung gegeben

[1] $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4yz + 2y - 3 = 0.$

Der Mittelpunkt ist gegeben durch die Gleichungen

$$x - y - z = 0,\quad y - x + 2z + 1 = 0,\quad 2z - x + 2y = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$, also ist ein einziger Mittelpunkt vorhanden. Ferner findet sich $G = -2$, und folglich ist die Gleichung der auf ihren Mittelpunkt bezogenen Fläche

[2] $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4yz - 2 = 0.$

Hier ist

$$L = 2,\quad M = -\tfrac{1}{4},\quad N = -\tfrac{1}{8};$$

somit hat man

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\lambda + \tfrac{1}{8} = 0,$$

und da diese Gleichung zwei Zeichenwechsel hat, so ist die Fläche ein Hyperboloid mit einem Mantel.

Zu diesem Schlusse gelangt man unmittelbar durch die Bemerkung, daß die wirkliche Ebene xy die Fläche in geraden Linien trifft. Denn setzt man in [2] $z = 0$, so ist

$$x^2 + y^2 - 2xy = 2,\quad \text{also } y = x \pm \sqrt{2}.$$

**Beispiel III.** Man habe die Gleichung

[1] $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy - 4xz + 4y + 4z - 9 = 0;$

so heißen die Mittelpunktsgleichungen

$$x+y-2z = 0, \quad -2y+x+2 = 0, \quad z-2x+2 = 0,$$

woraus sich $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$, und somit $G = -1$ ergibt. Also heißt die Gleichung der auf den Mittelpunkt bezogenen Fläche

[2] $$x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy - 4xz - 1 = 0.$$

Die Werthe für L, M, N sind nun

$$L = 0, \quad M = -8, \quad N = 5,$$

und die Gleichung [λ] gibt $\lambda^3 - 8\lambda - 5 = 0$, und da hier nur eine Variation vorkommt, so ist die Fläche ein Hyperboloid mit zwei Mänteln.

Wären die Coordinaten schief, so könnte man die Gleichung [λ] nicht mehr gebrauchen. Dann müßte man nach Verlegung des Ursprungs in den Mittelpunkt die Durchschnitte der Fläche mit den Coordinaten-Ebenen suchen; und da sich so drei Hyperbeln ergeben, so erkennt man zwar, daß die Fläche ein Hyperboloid ist, aber man sieht nicht, daß es zwei Mäntel hat. Dieß stellt sich heraus, wenn man untersucht, ob eine durch den Mittelpunkt gelegte Ebene die Fläche in einer Ellipse schneidet. Nun ist die Gleichung einer solchen Ebene $z = ax + by$, und eliminirt man z aus der Gleichung [2], so ergibt sich

$$(a^2 - 4a + 1)\,x^2 + (b^2 - 2)\,y^2 + 2(ab - 2b + 1)\,xy - 1 = 0.$$

Daraus erhält man, wenn

$$\varrho = 2a^2 + 2ab - 8a + 3b^2 - 4b + 3$$

gesetzt wird,

$$x = \frac{(2b-ab-1)\,y \pm \sqrt{\varrho y^2 + a^2 - 4a + 1}}{a^2 - 4a + 1}.$$

Mittelst dieser Werthe von x findet man leicht, wenn $a = 2$ und $b < \sqrt{\frac{5}{8}}$ gesetzt wird, daß der Durchschnitt imaginär ist. Somit geben nicht alle durch den Mittelpunkt gelegte Ebenen reelle Schnitte; daran läßt sich aber das Hyperboloid mit zwei Mänteln hinlänglich erkennen.

**Beispiel IV.** Es sei die Gleichung gegeben

[1] $$3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 3xz + yz + y + 2 = 0.$$

Für den Mittelpunkt ergibt sich

$$x = -\tfrac{1}{4}, \quad y = -\tfrac{3}{4}, \quad z = 0,$$

und versetzt man den Anfangspunkt in denselben, so verwandelt sich die Gleichung [1] in

[2] $$3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 3xz + yz + \tfrac{15}{8} = 0.$$

Die Gleichung [λ] gibt $\lambda^3 + \frac{40}{15}\lambda^2 + \frac{224}{180}\lambda + \frac{256}{2197} = 0$; und da nur Zeichenfolgen vorkommen, so sind die drei Wurzeln negativ; also ist die Fläche imaginär, oder mit andern Worten die Gleichung [1], ist unmöglich.

Es seien $x = az$, $y = bz$ die Gleichungen einer durch den Mittelpunkt gezogenen Geraden; verbindet man sie mit der Gleichung [2], so erhält man

$$(3a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 3a + b)\, z^2 + \tfrac{13}{8} = 0,$$

oder in anderer Form

$$[(b - a + \tfrac{1}{2})^2 + 2(a - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}]\, z^2 = -\tfrac{13}{8}.$$

Nun können die Werthe von z für keinen Werth von a und b reell werden, was ebenfalls beweist, daß die Gleichung [1] unmöglich ist.

**Beispiel V.** Es sei die Gleichung gegeben

[1] $$3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0.$$

Für den Mittelpunkt findet man $x = 0$, $y = 2$, $z = -2$, und nimmt man diesen Punkt zum Ursprung, so verwandelt sich die Gleichung [1] in folgende:

$$3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz = 0,$$

die entweder einen Kegel, oder einen einzigen Punkt geben kann. Jede Ungewißheit verschwindet aber, wenn der Schnitt mit einer Ebene, die nicht durch den Anfangspunkt geht, gemacht wird.

Es sei z. B. $x = 1$, so ist

$$2y^2 + 4yz - 2z + 3 = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber offenbar eine reelle Curve vor; folglich gibt die Gleichung [1] einen Kegel.

**Beispiel VI.** Ist die Gleichung

[1] $$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 6x + 6y + 6z + 9 = 0$$

gegeben, und man behandelt sie wie das vorige Beispiel, so findet man, daß sie einen einzigen Punkt vorstellt.

Dieß läßt sich an der Gleichung selbst nachweisen; denn man kann sie so schreiben:

$$3(x+1)^2 + 2(y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{3}{2}(z+1)^2 = 0,$$

wo ersichtlich ist, daß ihr nur genügt werden kann, wenn man zugleich

$$x + 1 = 0, \quad y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{3}{2} = 0, \quad z + 1 = 0$$

setzt, woraus sich

$$x = -1, \; y = -1, \; z = -1 \text{ ergibt.}$$

Bemerkung. Man darf nicht glauben, daß die mit der Gleichung [1] vorgenommene Veränderung, um ihr die vorige Form zu geben, ein Rechnungskunstgriff sei, den nur der Scharfsinn entdecken könne; das zu befolgende Verfahren ist durch die Lehrsätze der Algebra deutlich angezeigt und besteht in Folgendem:

Man nehme ein Polynom vom zweiten Grad nach x, y, z,

$$X = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + \text{u. s. w.}$$

Setzt man die Gleichung $X = 0$, so erhält man für x Werthe von der Form $x = X_1 \pm \sqrt{Y}$, wo $X_1$ eine Function des ersten Grades nach y und z, und Y eine Function des zweiten Grades ist. Nach dem bekannten Lehrsatz über die Verbindung der Gleichungen hat man

$$X = A\,(x - X_1 - \sqrt{Y})\,(x - X_1 + \sqrt{Y}) = A\,(x - X_1)^2 - AY.$$

Angenommen, es sei $Y = ay^2 + a'z^2 + 2byz + \text{u. s. w.}$, und man behandle dieses Polynom ebenso wie X; so erhält man, wenn die Gleichung $Y = 0$ gesetzt wird, $y = Y_1 \pm \sqrt{z}$, wo $Y_1$ eine Größe des ersten Grades nach z, und z eine Größe des zweiten Grades bezeichnet.

Dann ist

$$Y = a\,(y - Y_1 - \sqrt{Z})\,(y - Y_1 + \sqrt{Z}) = a\,(y - Y_1)^2 - aZ.$$

Nimmt man endlich $Z = \alpha z^2 + 2\beta z + \gamma$ an, und setzt $Z = 0$, so findet man $z = Z_1 \pm \sqrt{U}$, wo $Z_1$ und U constante Größen sind. Nun ist offenbar auch

$$Z = \alpha\,(z - Z_1 - \sqrt{U})\,(z - Z_1 + \sqrt{U}) = \alpha\,(z - Z_1)^2 - \alpha U.$$

Setzt man nun diesen Werth von Z in Y, und den von Y in X, so erhält man

$$X = A\,(x - X_1)^2 - Aa\,(y - Y_1)^2 + Aa\alpha\,(z - Z_1)^2 - Aa\alpha\,U,$$

welches die gesuchte Umformung des Polynoms X ist.

**708.** Beispiele, in welchen unendlich viele, in gerader Linie liegende Mittelpunkte vorkommen.

**Beispiel I.** Es sei die Gleichung gegeben

[1] $$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y + 2z = 0.$$

Ist ein Mittelpunkt vorhanden, so ist er gegeben durch die Gleichungen

$$x + y + z = 1, \quad y + x + z = 1, \quad 2z + x + y = -1.$$

Die erste und 2te sind identisch, und die zweite und dritte geben

[2] $$z = -2, \quad y = -x + 3;$$

folglich gibt es unendlich viele Mittelpunkte, die auf der durch die Gleichung [2] ausgedrückten Geraden liegen. Sucht man den mit der Ebene yz gemachten Durchschnitt, so erhält man

$$y^2 + 2z^2 + 2yz - 2y + 2z = 0,$$

woraus

$$y = -z + 1 \pm \sqrt{-z^2 - 4z + 1}.$$

Setzt man die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich Null, so findet sich $z = -2 \pm \sqrt{5}$; da nun diese Werthe reell und ungleich sind, und das unter dem Wurzelzeichen befindliche $z^2$ das Vorzeichen — hat, so ist der Durchschnitt eine Ellipse (Nro. 239); folglich stellt die Gleichung [1] einen elliptischen Cylinder vor.

**Beispiel II.** In der Gleichung

[1] $$x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy - 4yz + 2y + 2z = 0$$

sind die abgeleiteten Gleichungen

$$x + y = 0, \quad y - x + 2z - 1 = 0, \quad 2z + 2y - 1 = 0.$$

Die erste und dritte geben

[2] $$x = -y, \quad z = -y + \tfrac{1}{2},$$

und diese Werthe machen die zweite Gleichung identisch, was beweist, daß es unendlich viele Mittelpunkte gibt, welche die Gerade der Gleichung [2] zum geometrischen Ort haben. Setzt man in [1] $z = 0$, so ist

$$x^2 - y^2 + 2xy + 2y = 0, \quad \text{woraus } x = -y \pm \sqrt{2y^2 - 2y},$$

und nun läßt sich behaupten, daß die Gleichung [1] einen hyperbolischen Cylinder vorstellt.

**Beispiel III.** Es sei

[1] $$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x - y - z = 0.$$

Zur Bestimmung des Mittelpunktes hat man die drei Gleichungen

$$2x - 2y + 1 = 0, \quad 2y - 2x - 1 = 0, \quad -2z - 1 = 0.$$

Die erste Gleichung ist dieselbe, wie die zweite; also ist der geometrische Ort der Mittelpunkte wieder eine Gerade. Setzt man aber $x = 0$, so gibt die Gleichung [1] $y = z + 1$, und $y = -z$, d. h. man erhält zwei nicht parallele Gerade. Nun ist klar, daß die Gleichung [1] zu einem System zweier sich schneidender Ebenen gehört.

Löst man sie in Beziehung auf eine der Veränderlichen auf, so erhält man die Gleichungen beider Ebenen besonders, nämlich

$$x = y + z \quad \text{und} \quad x = y - z - 1.$$

**Beispiel IV.** In der Gleichung

[1] $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}z^2 - 3xz - yz - x + y + z + \frac{1}{2} = 0$

erkennt man wieder, daß unendlich viele Mittelpunkte vorhanden sind, die auf der Geraden liegen, welche die Gleichungen hat

[2] $x = \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}.$

Sucht man aber den Durchschnitt der Fläche mit der Ebene xy, so ergibt sich

$x^2 + y^2 - x + y + \frac{1}{2} = 0$, woraus $y = -\frac{1}{2} \pm (x - \frac{1}{2})\sqrt{-1}$;

und damit y reell werde, muß $x = \frac{1}{2}$ sein.

In diesem Falle reducirt sich die Fläche auf eine einzige Gerade, und zwar dieselbe, wie die der Gleichung [2]. Dieses Resultat läßt sich auch aus Gleichung [1] ableiten, wenn man ihr die Form

$$(x - \tfrac{3}{2}z - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2})^2 = 0 \text{ gibt.}$$

**Beispiel V.** Setzt man im vorigen Beispiel als letztes Glied $+1$ statt $+\frac{1}{2}$, so erhält man folgende Gleichung

$$x^2 + y^2 + \tfrac{5}{2}z^2 - 3xz - yz - x + y + z + 1 = 0,$$

welche einen imaginären Cylinder gibt, was man sogleich erkennt, wenn sie in folgende Form gebracht wird

$$(x - \tfrac{3}{2}z - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2} = 0.$$

**709.** Beispiele, in welchen der Ort der Mittelpunkte eine Ebene ist.

**Beispiel I.** Es sei die Gleichung

[1] $x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy + 6xz - 6yz - x + y - 3z = 0$

gegeben, so reduciren sich die drei abgeleiteten Gleichungen auf eine einzige,

$$x - y + 3z - \tfrac{1}{2} = 0;$$

folglich können alle Punkte der durch diese Gleichung bestimmten Ebene ohne Unterschied als Mittelpunkte genommen werden. Schneidet man die Fläche durch die Ebene xy, so ergibt sich

$x^2 + y^2 - 2xy - x + y = 0$, woraus $y = x$ und $y = x - 1$.

Da sich als Durchschnitt zwei parallele Gerade ergeben, so stellt die Gleichung [1] zwei parallele Ebenen vor, und wirklich erhält man, wenn sie nach x aufgelöst wird,

$$x = y - 3z \text{ und } x = y - 3z + 1.$$

**Beispiel II.** Behandelt man die Gleichung

[1] $x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz-2x+2y-4z+1=0$

wie die vorige, so erhält man eine einzige Ebene mit der Gleichung

$$x-y+2z-1=0.$$

Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, so erhält man wieder die gegebene.

**Beispiel III.** In der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz-2x+2y+2z+5=0$$

erkennt man leicht, daß sie zwei imaginäre Ebenen vorstellt, was sich übrigens auch heraus stellt, wenn man sie unter folgende Form bringt:

$$(x-y-z-1)^2+4=0.$$

## 710. Beispiele, wo kein Mittelpunkt stattfindet.

**Beispiel I.** Die gegebene Gleichung sei

[1] $x^2+3y^2+2z^2+2xy+4yz-3x-4y-3z=0.$

Wäre ein Mittelpunkt vorhanden, so würden die Gleichungen desselben heißen

$$2x+2y=3,\quad 3y+x+2z=2,\quad 4z+4y=3.$$

Aus der ersten und dritten erhält man

$$x=-y+\tfrac{3}{2},\quad z=-y+\tfrac{3}{4},$$

und setzt man diese Werthe in die zweite, so ergibt sich $3=2$, welche Unmöglichkeit zeigt, daß die Fläche keinen Mittelpunkt hat.

Für den Durchschnitt mittelst der Ebene xz ergibt sich die Gleichung

$$x^2+2z^2-3x-3z=0,$$

welche eine Ellipse vorstellt; also ist die Fläche ein elliptisches Paraboloid.

**Beispiel II.** Es sei

[1] $x^2+y^2-2z^2+2xy+2xz+2yz-4x-2y+2z=0,$

woraus man zuerst die abgeleiteten Gleichungen bildet:

$$x+y+z=2,\quad x+y+z=1,\quad x+y-2z=-1,$$

und da die beiden ersten nicht zugleich stattfinden können, so kann die Fläche keinen Mittelpunkt haben. Setzt man in [1] $z=0$, so ist

$$x^2+y^2+2xy-4x-2y=0,$$

und da dieß die Gleichung einer Parabel ist, so läßt sich auch kein Schluß daraus ziehen.

Setzt man aber $y = 0$, so ist

$$x^2 - 2z^2 + 2xz - 4x + 2z = 0,$$

welche Gleichung eine Hyperbel ist; somit ist die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid.

**Beispiel III.** Es sei noch gegeben die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 6xz + 6yz + 2x - 4z = 0,$$

wovon die drei abgeleiteten Gleichungen

$$x - y - 3z = -1, \quad y - x + 3z = 0, \quad 9z - 3x + 3y = 2$$

offenbar einander widersprechen; daher hat die Fläche keinen Mittelpunkt. Für ihre Durchschnitte mit den Coordinaten-Ebenen erhält man

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x = 0,$$
$$x^2 + 9z^2 - 6xz + 2x - 4z = 0,$$
$$y^2 + 9z^2 + 6yz - 4z = 0,$$

und da diese drei Gleichungen Parabeln vorstellen, so muß die Fläche ein parabolischer Cylinder sein.

# Eilftes Kapitel.

## Von der Erzeugung der Flächen.

---

### Allgemeine Regeln.

**711.** Betrachtet man die Flächen in ihrer Erzeugung, so kommt man auf Untersuchungen, welche die Anwendung der höhern Analysis erfordern, und deren Ausführung zu den schönsten Arbeiten von Monge gehört. Da es nicht die Aufgabe dieses Werkes ist, diese gelehrten und schwierigen Untersuchungen darzulegen, so beschränken wir uns darauf, die Gleichungen einiger sehr einfacher Flächen vorzunehmen, die durch Linien erzeugt werden, die sich bewegen und die ihre Form nach gegebenen Gesetzen verändern. Der hiebei einzuschlagende Gang ist nun folgender:

1) Man schreibe zuerst die beiden Gleichungen der Erzeugungslinie, ohne auf die Bedingungen ihrer Bewegung oder ihrer Formveränderung Rücksicht zu nehmen. In diesen Gleichungen müssen immer ein oder mehrere unbestimmte Coefficienten vorkommen, sonst würden sie eine feste Linie vorstellen, die keiner Veränderung fähig wäre und folglich auch keine Fläche erzeugen könnten. Diese Coefficienten nenne man Parameter.

2) Ferner drücke man die Bedingungen, denen die Erzeugungslinie während ihrer Bewegung unterworfen bleibt, durch Gleichungen aus, deren Anzahl immer geringer sein muß, als die der Parameter, weil sich sonst keiner derselben verändern und die Erzeugungslinie keine andere Stelle einnehmen könnte. Auch darf, wenn die Fläche von der Gleichung völlig bestimmt ist, die Zahl dieser Parameter nur um eins größer sein als die der Bedingungsgleichungen, und offenbar muß durch die Variation eines der Parameter, indem die Erzeugungslinie in verschiedene Lagen gebracht und oft auch ihre Form verändert wird, eine Fläche von der verlangten

Gleichung beschrieben werden. Wären mehr Parameter vorhanden, so könnte man einigen davon besondere Werthe geben, und nur gerade einen mehr, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind, beibehalten; dadurch würde sich dann eine Fläche ergeben. Durch die Veränderung der einigen Parametern ertheilten Werthe könnte man aber andere Flächen erhalten; die gegebene Aufgabe ließe sich daher mittelst unendlich vieler verschiedener Flächen auflösen, was der Voraussetzung widerspricht.

3) Zwischen den Bedingungsgleichungen und denen der Erzeugungslinie eliminire man alle unbestimmten Parameter, so ergibt sich die Gleichung der verlangten Fläche. Denn einmal beachte man, daß die Gesammtzahl dieser Gleichungen um eins größer ist, als die der Parameter, und somit die Elimination überhaupt möglich ist; dann bemerke man wohl, da die sich ergebende Gleichung keine Spur von den Parametern beibehält, daß ihr durch die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes, der zu einer beliebigen Lage der Erzeugungslinie gehört, genügt werden muß; das heißt, diese Gleichung bestimmt die Fläche, welche durch jene Erzeugungslinie beschrieben wird.

Bemerkung. Um die Regel in ihrer ganzen Allgemeinheit anzugeben, wurde zuerst verlangt, daß die Gleichungen der Erzeugungslinie ohne Rücksicht auf die Bedingungen ihrer Bewegung angeführt, und dann die Gleichungen aufgestellt würden, die sich aus diesen Bedingungen ergeben. In vielen Fällen lassen sich jedoch diese Bedingungen, entweder ganz oder theilweise, schon in die Gleichungen der Erzeugungslinie aufnehmen, und man hat dann im Verlauf der Rechnung keine Rücksicht mehr darauf zu nehmen. Soll z. B. eine Gerade durch einen gegebenen Punkt mit den Coordinaten a, b, c gehen, so nehme man für diese Gerade die Gleichungen

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c);$$

dann ist der betreffenden Bedingung schon jetzt entsprochen.

In einigen Fällen ist es dagegen bequemer, unbestimmte Hilfsgrößen anzuwenden; es ist aber dabei stets sorgfältige Rücksicht auf die Beziehungen zu nehmen, in welche sie mit den andern unbestimmten Größen getreten sind.

## Cylindrische Flächen.

**712.** Cylindrische Fläche oder kurzweg Cylinder heißt jede Fläche, welche durch eine Gerade in paralleler Bewegung mit sich selbst erzeugt wird.

**713.** Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar, daß die Berührung einer Ebene mit einem Cylinder in der ganzen Länge einer Erzeugungslinie

stattfindet. Denn der Cylinder kann als ein Prisma mit unendlich schmalen Seitenflächen betrachtet werden; denkt man sich nun die Ebene einer dieser Seitenflächen unendlich verlängert, so muß sie die Fläche nach dem in Nro: 659 Gesagten in allen Punkten der Erzeugungslinie berühren.

**714.** Aufgabe. Es sei eine mit der Erzeugungslinie parallelle Gerade und eine Richtungscurve gegeben, auf welcher die Erzeugungslinie beständig hingleiten muß; es soll die Gleichung des von ihr beschriebenen Cylinders gefunden werden.

Die Gleichungen der Richtungscurve seien

[1] $$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0,$$

und die der Erzeugungslinie

[2] $$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Die Coefficienten a und b sind constant, aber $\alpha$ und $\beta$ sind unbestimmt, und müssen in eine Beziehung gebracht werden, vermöge welcher die Erzeugungslinie die Curve in jeder Lage trifft. Zum Behufe dieses Schnitts müssen die nämlichen Werthe von x, y, z den Gleichungen [1] und [2] Genüge leisten, und man erhält daher durch die Elimination dieser drei Größen aus den vier Gleichungen die gesuchte Beziehung, welche bezeichnet werde durch

[3] $$F(\alpha, \beta) = 0.$$

Diese Gleichung muß immer stattfinden, wenn die Gleichungen [2] einer Erzeugungslinie angehören; um daher die Gleichung des Cylinders zu erhalten, darf man nur aus den drei Gleichungen [2] und [3] $\alpha$ und $\beta$ eliminiren. Aus den Gleichungen [2] erhält man

$$\alpha = x - az, \quad \beta = y - bz,$$

und setzt man diese Werthe in [3], so ergibt sich für den Cylinder

[4] $$F(x - az, \; y - bz) = 0.$$

**715.** Nehmen wir als Beispiel den Fall, wo die Richtungscurve ein in der Ebene xy liegender Kreis ist, und es seien

$$z = 0, \; (x - f)^2 + (y - g)^2 = r^2$$

die Gleichungen dieses Kreises. Damit die Erzeugungslinie immer in denselben treffe, findet die Bedingung statt

$$(\alpha - f)^2 + (\beta - g)^2 = r^2,$$

und somit ergibt sich für den Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche die Gleichung

$$(x - az - f)^2 + (y - bz - g)^2 = r^2.$$

**716.** Bemerkungen. Ein Cylinder mag nun auf irgend eine Weise bestimmt werden, so kann man immer annehmen, daß er durch eine Gerade erzeugt werde, die sich längs einer auf diesem Cylinder gezogenen Curve parallel mit sich selbst fortbewegt, woraus folgt, daß alle Cylinder in die Gleichung [4] zusammengefaßt werden können. Es ist jedoch wohl zu merken, daß bei verschiedenen Cylindern auch die Werthe von a und b, sowie die Form der durch F angedeuteten Function verschieden sein können.

Man kann übrigens leicht a posteriori erkennen, daß diese Gleichung [4], oder auch die folgende,

$$[5] \quad F(ax + by + cz + d,\ a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

welche allgemeiner ist, nur cylindrische Flächen vorstellen kann. Denn um der letzteren Genüge zu leisten, muß zugleich

$$[6] \quad ax + by + cz + d = \alpha,\quad a'x + b'y + c'z + d' = \beta$$

sein, wo $\alpha$ und $\beta$ beliebige, blos von der Gleichung $F(\alpha, \beta) = 0$ abhängige Größen sind. Nun werden aber durch die Gleichung [6] offenbar für jeden Werth von $\alpha$ und $\beta$ parallele Linien bestimmt; also kann man annehmen, die Fläche werde durch eine Gerade in paralleler Bewegung mit sich selbst erzeugt; und sie ist daher eine cylindrische Fläche.

**717.** Aufgabe. Die Richtung der Erzeugungslinie sei gegeben, man soll die Gleichung des Cylinders finden, der um eine gegebene Fläche beschrieben wird.

Diese Aufgabe wäre mit der vorigen gleich, wenn die Berührungscurve bekannt wäre. Eine Gleichung dieser Curve ist indessen die der gegebenen Fläche; diese sei

$$[7] \quad f(x, y, z) = 0.$$

Eine andere Gleichung derselben Curve ist durch die Bedingung gegeben, daß der Cylinder um die gegebene Fläche beschrieben wird, nach welcher Bedingung die Berührungsebene an dieser Fläche auch den Cylinder in jedem Punkte der Berührungscurve berühren muß. Daraus folgt, daß diese Ebene die durch den Berührungspunkt gezogene Erzeugungslinie des Cylinders ganz in sich enthalten muß; denn da diese Gerade als ihre eigene Tangente anzusehen ist, so ist sie offenbar in der Berührungsebene an den Cylinder enthalten. Angenommen, $f(x, y, z)$ sei ein algebraisches Polynom, und es seien $X, Y, Z$ seine drei abgeleiteten Polynome, $x, y, z$ die Coordinaten des Berührungspunktes, und $x', y', z'$ die laufenden Coordinaten der durch diesen Punkt gehenden Berührungsebene und Erzeugungslinie, so erhält man

$$X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = 0 \text{ für die Ebene,}$$

$$x'-x = a(z'-z),\ y'-y = b(z'-z) \text{ für die Gerade,}$$

wo a und b zwei gegebene Größen sind. Damit nun die Gerade in der Ebene liege, müssen diese Werthe von $x'-x$ und $y'-y$ die Gleichung

der Ebene für jeden Werth von z identisch machen; und daraus ergibt sich die Gleichung

[8] $$aX + bY + Z = 0,$$

durch welche die Berührungscurve vollends bestimmt wird, und die Aufgabe ist nun auf die vorige zurückgeführt.

**718.** Betrachten wir den besondern Fall, wo die gegebene Fläche eine Kugel ist, mit der Gleichung

[9] $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

so ist

$$X = 2x, \quad Y = 2y, \quad Z = 2z;$$

und die Gleichung [8] verwandelt sich in

[10] $$ax + by + z = 0.$$

Diese Gleichung, welche eine durch den Ursprung gehende Ebene vorstellt, zeigt, daß die Berührungscurve ein größter Kreis der Kugel ist; auch sieht man leicht, daß diese Ebene auf den Erzeugungslinien des Cylinders senkrecht steht (Nro. 576).

Die Gleichungen [9] und [10] bestimmen die Berührungscurve, und man darf hier nur noch die Rechnungen der vorigen Nummer wiederholen, um für den um die Kugel beschriebenen Cylinder die Gleichung zu finden

$$(b^2 + 1)\,x^2 + (a^2 + 1)\,y^2 + (a^2 + b^2)\,z^2 - 2abxy - 2axz - 2byz = (a^2 + b^2 + 1)\,r^2.$$

## Conische Flächen.

**719.** Ein Kegel oder eine conische Fläche ist eine solche Fläche, die durch eine Gerade erzeugt wird, welche beständig durch denselben Punkt (Mittelpunkt oder Spitze) geht, und sich sonst in einer beliebigen Richtung fortbewegt.

**720.** Ein Kegel läßt sich daher als eine pyramidale Fläche von unendlich vielen Seitenflächen betrachten, und daraus folgt, daß die Berührung einer Ebene mit einem Kegel, wie beim Cylinder, in der ganzen Länge einer Erzeugungslinie stattfinden muß.

**721.** Aufgabe. Die Spitze eines Kegels und eine Curve, auf welcher die Erzeugungslinie beständig hingleiten soll, seien gegeben, man soll die Gleichung des Kegels finden.

Es seien a, b, c die Coordinaten der Spitze, und die Gleichungen der Richtungslinie

[1] $$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0.$$

Da die Erzeugungslinie durch die Spitze geht, so haben ihre Gleichungen die Form

[2] $$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c),$$

und da sie immer auf der Richtungslinie hingleiten muß, so findet zwischen $\alpha$ und $\beta$ eine Relation statt, die man durch Elimination von x, y, z aus [1] und [2] findet.

Die daraus sich ergebende Bedingung werde ausgedrückt durch die Gleichung

[3] $$F(\alpha, \beta) = 0.$$

Nun darf man nur noch $\alpha$ und $\beta$ aus den Gleichungen [2] und [3] eliminiren, so erhält man die Gleichung des Kegels

[4] $$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

**722.** Nehmen wir als Beispiel den schiefen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche. Der Vereinfachung halber wähle man zur Ebene dieser Grundfläche die Ebene xy, und seinen Mittelpunkt als Ursprung; so sind die Gleichungen der Grundfläche

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Damit die Erzeugungslinie in diesen Umfang treffe, findet die Bedingung statt

$$(a - \alpha c)^2 + (b - \beta c)^2 = r^2,$$

und durch die Elimination von $\alpha$ und $\beta$ aus dieser Gleichung mittelst der Gleichung [2] erhält man die Gleichung des Kegels, nämlich

$$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = r^2(z - c)^2.$$

**723.** Bemerkungen. Jede in der Gleichung [4] enthaltene Fläche ist ein Kegel; denn setzt man

[5] $$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c),$$

so ist $F(\alpha, \beta) = 0$, und es müssen daher die Coordinaten x, y, z der Fläche den beiden Gleichungen [5] Genüge leisten, wenn $\alpha$ und $\beta$ von der Bedingung $F(\alpha, \beta) = 0$ abhängig gemacht werden. Die Gleichungen [5] stellen aber eine Gerade vor, welche beständig durch einen festen Punkt mit den Coordinaten a, b, c geht; also ist die betreffende Fläche ein Kegel.

Die Gleichung [4] zeichnet sich dadurch aus, daß x, y, z in derselben nur in den Verhältnissen $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$ vorkommt, woraus hervorgeht, daß die Gleichung des Kegels in Beziehung auf die drei Größen

$$x-a,\quad y-b,\quad z-c$$

homogen sein muß. Läge die Spitze im Ursprung, so wäre

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0,$$

und die Gleichung wäre in Beziehung auf die Coordinaten x, y, z homogen.

**724.** Aufgabe. Man soll die Gleichung eines Kegels mit gegebener Spitze finden, der um eine gegebene Fläche beschrieben ist.

Die Gleichung der gegebenen Fläche sei

[6] $$f(x, y, z)=0,$$

so ist dieß schon eine Gleichung der Berührungscurve.

Es seien wieder X, Y, Z die drei abgeleiteten Polynome von f(x, y, z); x', y', z' die laufenden Coordinaten der Berührungsebene, und x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Berührungscurve. In diesem Punkte heißt die Gleichung der Berührungsebene

$$X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)=0.$$

Da aber diese Ebene auch den Kegel berühren muß, so geht sie durch die gegebene Spitze; sind daher a, b, c die Coordinaten dieser Spitze, so ist

[7] $$X(a-x)+Y(b-y)+Z(c-z)=0.$$

Diese Gleichung gehört auch der Berührungscurve an, und bestimmt sie vollends. So kommt man wieder zu den gegebenen Größen in Nro. 721 zurück.

**725.** Angenommen, die Gleichung [6] sei vom mten Grade, und es sei, wenn $Ax^py^qz^r$ ein beliebiges Glied dieses Grades ist,

$$f(x, y, z)=Ax^py^qz^r \text{ u. s. w.};$$

so sind die abgeleiteten Polynome X, Y, Z

$$X=pAx^{p-1}y^qz^r+\ldots,\quad Y=qAx^py^{q-1}z^r+\ldots,\quad Z=rAx^py^qz^{r-1}+\ldots$$

Die Gleichung [7] läßt sich auch unter folgende Form bringen

$$aX+bY+cZ=Xx+Yy+Zz.$$

Setzt man für X, Y, Z ihre Werthe, so ist offenbar der erste Theil der Gleichung von einem niederern Grade als dem mten, und von der zweiten weiß man (Nro. 660), daß sie sich immer auf einen um 1 geringern Grad als m reducirt. Nach ihrer Reduction werde sie mit V bezeichnet; dann erhält man für die Gleichung [7]

[8] $$aX + bY + cZ = V,$$

und daraus geht hervor, daß die Berührungslinie auf einer Fläche von geringerer Ordnung als der mten liegt. Ist daher die gegebene Fläche von der zweiten Ordnung, so ist die Berührungslinie eine ebene, welches Resultat schon aus Nro. 663 bekannt ist.

**726.** Um diesen Fall specieller anzuwenden, suche man den Kegel, dessen Spitze im Anfangspunkte liegt, und der um die Kugel beschrieben ist, welche

[9] $$(x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2 = r^2$$

zur Gleichung hat.

Dann ist

$a=0$, $b=0$, $c=0$, $X=2(x-f)$, $Y=2(y-g)$, $Z=2(z-h)$,

und die Gleichung [7] heißt

$$(x-f)\,x + (y-g)\,y + (z-h)\,z = 0,$$

oder, wenn sie mittelst der Gleichung [9] reducirt und

$$f^2 + g^2 + h^2 = d^2$$

gesetzt wird,

[10] $$fx + gy + hz = d^2 - r^2.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man leicht, daß die Berührungslinie ein kleiner Kreis ist, dessen Ebene auf der Geraden, die den Ursprung mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindet, senkrecht steht.

Da der Ursprung in der Spitze des Kegels liegt, so hat man als Gleichungen der Erzeugungslinie blos

[11] $$x = \alpha z, \quad y = \beta z,$$

und damit diese den kleinen Kreis treffe, erhält man die Bedingung

$$(\alpha^2+\beta^2+1)(d^2-r^2) - (f\alpha+g\beta+h)^2 = 0.$$

Setzt man für $\alpha$ und $\beta$ ihre, aus den Gleichungen der Erzeugungslinie erhaltenen Werthe $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$, so erhält man als Gleichung des um die Kugel beschriebenen Kegels

$$(x^2+y^2+z^2)(d^2-r^2) - (fx+gy+hz)^2 = 0.$$

## Entwickelbare Flächen überhaupt.

**727.** Entwickelbare Flächen nennt man solche, die von einer Geraden so erzeugt werden, daß bei ihrer Bewegung jede Lage derselben mit der nächstfolgenden in eine Ebene fällt. Der Cylinder und Kegel gehören zu diesen Flächen.

**728.** Eine bemerkenswerthe Eigenschaft dieser Flächen, die schon ihr Name ausdrückt, ist die, daß sich immer ein beliebiger Theil derselben ohne Riß oder Falten in einer Ebene ausbreiten läßt. Denn da nach der Erklärung dieser Flächentheil aus Elementen von Ebenen besteht, von denen jedes durch die Erzeugungslinie von dem nächstfolgenden Element getrennt ist, so kann man sich vorstellen, jedes dieser Elemente drehe sich nach einander um die Erzeugungslinie, durch welche es von dem nächstfolgenden Element getrennt ist, wodurch das erste Element in die Ebene des zweiten, und die Ebene dieser beiden Elemente in die Ebene des dritten und so fort, zu liegen kommt.

**729.** Eine weitere, ebenfalls beachtungswerthe Eigenschaft der entwickelbaren Flächen, die unmittelbar aus der Definition hervorgeht, ist die, daß die Berührungsebene in der ganzen Länge einer Erzeugungslinie mit ihr zusammentrifft. Der Grund hiefür ist derselbe, wie bei den Cylindern und Kegeln: eine gegebene Erzeugungslinie liegt nämlich mit der nächstfolgenden immer in einer Ebene, und diese nach allen Richtungen ins Unendliche verlängerte Ebene wird an der Fläche in jedem Punkte der gegebenen Erzeugungslinie zur Berührungsebene.

**730.** Die Definition der entwickelbaren Flächen läßt sich in folgender Aufgabe ausdrücken, auf welche sich die algebraische Rechnung leichter anwenden läßt, als bei der Definition selbst.

Verlängert man beliebig die Seiten eines Polygons ABCD .... (Fig. 53), von welchem immer je drei auf einander folgende Seiten nicht in einer Ebene liegen, so erhält man eine Fläche oder gewissermaßen einen Polyeder, das von den Seitenflächen PAQ, QBR, ... begrenzt ist, und die nichts anderes sind als Winkeltheile von Ebenen. Man kann sich selbst alle Kanten auf der andern Seite des Polygons verlängert denken, und erhält so einen zweiten Mantel derselben vielseitigen Fläche, der von dem ersten durch das Polygon ABCD ... getrennt ist, wie die Mäntel eines Kegels durch die Spitze.

Nun denke man sich das Polygon in eine gegebene Curve einbeschrieben, und die Zahl seiner Seiten immer mehr vergrößert: so wird dadurch eine Reihe von Polyedern bestimmt, in welchen jede Kante mit der nächstfolgenden

in derselben Ebene liegt; folglich ist die Grenze dieser Polyeder eine krumme Fläche von derselben Eigenschaft, d. h. eine entwickelbare Fläche.

Dabei ist noch zu bemerken, daß das Polygon bei diesem Uebergang zur Grenze mit der gegebenen Curve zusammenfällt, und die Kanten des Polyeders zu Tangenten an dieser Curve werden. Also läßt sich überhaupt eine entwickelbare Fläche durch eine Gerade beschreiben, die an einer Curve, welche Wendecurve (bei **Monge** arête de rebroussement) genannt wird, beständig Tangente ist.

Der Cylinder und Kegel bilden eine Ausnahme von dieser Erzeugung, da die Erzeugungslinien bei dem einen unter sich parallel sind, und bei dem andern alle durch denselben Punkt gehen.

**731. Aufgabe.** Die Gleichung einer entwickelbaren Fläche zu finden, deren Wendecurve gegeben ist.

Angenommen, die Gleichungen der Projectionen dieser Curve seien

[1] $$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x),$$

wo $\varphi$ und $\psi$ Functionen bezeichnen. Nun ist leicht einzusehen, daß die Projectionen der an eine Curve gezogenen Tangente auch an den Projectionen dieser Curve zur Tangente werden; bezeichnet man also die Coordinaten eines beliebigen Punktes der gegebenen Curve mit $\alpha, \beta, \gamma$, so erhält man für die an diesen Punkt gezogene Tangente die Gleichung

[2] $$y - \beta = \varphi'(\alpha)(x - \alpha), \quad z - \gamma = \psi'(\alpha)(x - \alpha):$$

wo $\varphi'$ und $\psi'$ zwei von den Functionen $\varphi$ und $\psi$ abgeleitete Functionen bezeichnen; außerdem finden zwischen $\alpha, \beta, \gamma$ die Relationen statt

[3] $$\beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \psi(\alpha).$$

Durch die Variation der unbestimmten Größen $\alpha, \beta, \gamma$ wird nun die Bewegung der Erzeugungslinie bewirkt, und durch die Elimination derselben aus den Gleichungen [2] und [3] erhält man die Gleichung der entwickelbaren Fläche.

Sind anstatt der Projectionen der Wendecurve zwei Flächen gegeben, in welchen diese Curve enthalten ist, so ist die Aufgabe nicht schwieriger; aber es ist dann besser, wenn man die Tangente mittelst des Durchschnitts der an die beiden Flächen gelegten Berührungsebenen bestimmt.

**732. Aufgabe.** Die Gleichungen einer Curve seien gegeben, man soll untersuchen, ob diese Curve eine ebene oder von doppelter Krümmung ist.

Bestimmen wir wie in der vorigen Aufgabe den Ort der Tangenten an dieser Curve; ist sie eben, so ist dieser Ort eine Ebene.

Man habe z. B. die Gleichungen

[4] $$y = ax^2 + bx + c, \quad z = a'x^2 + b'x + c'.$$

Nun ist

$$\varphi'(\alpha) = 2a\alpha + b, \quad \psi'(\alpha) = 2a'\alpha + b';$$

also erhält man für die Gleichungen [2] und [3]

$$y - \beta = (2a\alpha + b)(x - \alpha), \quad z - \gamma = (2a'\alpha + b')(x - \alpha),$$
$$\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c, \qquad \gamma = a'\alpha^2 + b'\alpha + c';$$

und aus diesen muß $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eliminirt werden, um den geometrischen Ort der Tangenten für die Curve der Gleichungen [4] zu erhalten.

Addirt man, so wird $\beta$ und $\gamma$ sogleich eliminirt, und man erhält

$$y = (2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c, \quad z = (2a'\alpha + b')x - a'\alpha^2 + c'.$$

Nun wird $\alpha$ eliminirt, indem man diese letztern von einander abzieht, nachdem sie zuvor beziehungsweise mit $a'$ und $a$ multiplicirt wurden; dann ergibt sich

$$a'y - az = (ba' - ab')x + ca' - ac',$$

und da diese Gleichung eine Ebene vorstellt, so folgt daraus, daß auch die gegebene Curve eine ebene ist.

## Drehungsflächen.

**733.** Drehungsflächen sind solche Flächen, die durch die Drehung einer Linie um eine feste Axe erzeugt werden können.

Die Ebenen, welche durch die Axe gehen, heißen Meridian-Ebenen, und die Durchschnitte dieser Ebenen mit der Fläche Meridiane. Diese Meridiane sind offenbar alle einander gleich, und die aus beliebigen Punkten der Erzeugungslinie auf die Axe gefällten Senkrechten beschreiben Kreise, deren Ebenen auf der Axe senkrecht stehen und deren Mittelpunkte auf dieser Axe liegen: solche Kreise heißen Parallelkreise.

**734.** Bei den Drehungsflächen steht die Berührungsebene senkrecht auf der Meridianebene, die durch den Berührungspunkt geht. Denn die Tangente, welche an den durch den Berührungspunkt (Nro. 658) gehenden Parallelkreis gezogen wird, liegt in der Berührungsebene; die Ebene dieses Parallelkreises steht aber senkrecht auf der durch diesen Punkt gehenden Meridianebene, und die Tangente steht senkrecht auf dem Halbmesser, der den Durchschnitt der beiden Ebenen bildet; also steht diese Tangente und somit auch die Berührungsebene, senkrecht auf der Meridian-Ebene.

**735. Aufgabe.** Es sei eine beliebige Curve gegeben, man soll die Gleichung der Fläche finden, welche

durch die Drehung derselben um die Axe der z beschrieben wird.

Man nehme die Gleichungen eines Kreises, dessen Ebene auf der Axe der z senkrecht steht, und dessen Mittelpunkt auf dieser Axe liegt; dieselben enthalten zwei unbestimmte Werthe, welche durch die Gleichung, vermöge welcher der Kreis die Erzeugungslinie trifft, zu bestimmen sind. Aus dieser und der Gleichung des Kreises eliminire man die beiden Unbestimmten, so ist die sich ergebende Gleichung die Gleichung der Fläche.

Die Gleichungen der Erzeugungslinie seien

$$[1] \qquad f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0.$$

Der Vereinfachung wegen nehme man rechtwinklige Axen an, so läßt sich der Kreis mittelst folgender Gleichungen ausdrücken:

$$[2] \qquad z = \alpha, \quad x^2 + y^2 = \beta,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ zwei unbestimmte Größen sind. Damit aber der Kreis die Erzeugungslinie treffe, muß den Gleichungen [1] und [2] durch dieselben Werthe von x, y, z genügt werden, woraus sich zwischen $\alpha$ und $\beta$ eine Beziehung ergibt, die wir durch

$$[3] \qquad F(\alpha, \beta) = 0$$

ausdrücken wollen. Aus dieser Gleichung muß $\alpha$ und $\beta$ mittelst der Gleichung [2] eliminirt werden; dann erhält man als Gleichung der gesuchten Fläche

$$[4] \qquad F(z, x^2 + y^2) = 0.$$

Läßt sich die Gleichung [3] nach $\alpha$ auflösen, und man erhält daraus $\alpha = \varphi(\beta)$, so kann man die Gleichung [4] auch unter folgende Form bringen:

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Bis jetzt war die Erzeugungslinie ganz beliebig. Nehmen wir nun an, sie liege in der Ebene xz, und ihre Gleichungen seien

$$[5] \qquad y = 0, \quad f(z, x) = 0.$$

Nimmt man die Axe der z als Umdrehungsaxe, so sind, wie oben bemerkt, die Gleichungen des Kreises

$$z = \alpha, \quad x^2 + y^2 = \beta.$$

Damit er die Erzeugungslinie treffe, findet die Bedingung statt

$$f(\alpha, \sqrt{\beta}) = 0,$$

wo f dasselbe Vorzeichen hat, wie die Erzeugungslinie; eliminirt man hierauf $\alpha$ und $\beta$, so ergibt sich für die Fläche

$$f(z, \sqrt{x^2+y^2}) = 0.$$

Hier hat f wieder dasselbe Vorzeichen; also darf man nur in der Gleichung $f(z, x)$ der Erzeugungslinie $\sqrt{x^2+y^2}$ anstatt x setzen. Dieses Resultat stellt sich sogleich heraus, wenn man einerseits beachtet, daß ein Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, auf einem Parallelkreise liegt, dessen Halbmesser gleich $\sqrt{x^2+y^2}$ ist, und anderseits, daß zwischen z und $\sqrt{x^2+y^2}$ dieselbe Beziehung stattfinden muß, wie zwischen den beiden Coordinaten der in der Ebene xz liegenden Erzeugungslinie.

Welches nun auch die Erzeugungslinie sei, so läßt sich die Auflösung der Aufgabe auch in folgender Weise darstellen. Man nehme wieder als Gleichungen der Erzeugungslinie

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0;$$

und es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Drehungsfläche, und x', y', z' die eines Punktes auf der Erzeugungslinie mit derselben Coordinate z. Der erste Punkt stellt eine der Lagen vor, welche der zweite bei der Drehung dieser Erzeugungslinie einnimmt; folglich liegen beide in gleicher Entfernung von der Axe, und es ist daher

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

In den Gleichungen der Erzeugungslinie ist aber

$$f(x', y', z) = 0, \quad f_1(x', y', z) = 0;$$

um daher die Fläche zu kennen, darf man nur aus diesen beiden und der vorigen Gleichung x' und y' eliminiren.

Es sei z. B. die Erzeugungslinie eine Gerade mit den Gleichungen

$$x = Mz + N, \quad y = M'z + N';$$

eliminirt man x' und y' aus den drei Gleichungen

$$x^2+y^2 = x'^2+y'^2, \quad x' = Mz + N, \quad y' = M'z+N',$$

so ergibt sich für die Fläche

$$(Mz + N)^2 + (M'z + N')^2 = x^2 + y^2.$$

Diese Gleichung läßt sich vereinfachen, wenn man die Linie, welche den kürzesten Abstand zwischen der Erzeugungslinie und der Drehungsaxe, die bereits als Axe der z genommen wurde, zur Axe der x nimmt; dann trifft die Erzeugungslinie die Axe der x und ist mit der Ebene yz parallel. Folglich lassen sich ihre Gleichungen darstellen durch

$$x = a, \quad y = bz:$$

das heißt, es ist

$$M = 0, \quad N = a, \quad M' = b, \quad N' = 0,$$

und die Gleichung der Fläche verwandelt sich in

$$x^2 + y^2 = b^2z^2 + a^2.$$

Man hat hierin ohne Zweifel bereits das einmantelige Drehungs-Hyperboloid erkannt. Die doppelte Erzeugung dieser Fläche leuchtet von selbst ein; denn die obige Gleichung bleibt dieselbe, wenn man auch b in — b verwandelt.

**736. Aufgabe.** Die Gleichung einer Drehungsfläche bei beliebiger Axenlage zu finden, wenn die Axe und die Erzeugungslinie gegeben sind.

Es seien

$$[\alpha] \qquad f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der Erzeugungslinie. Man bezeichne die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Drehungsaxe mit a, b, c und bringe die Gleichungen dieser Axe unter die Form

$$[\beta] \qquad x-a = A(z-c), \quad y-b = B(z-c).$$

Die Gleichung einer auf der Axe senkrechten Ebene, und die eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf eben dieser Axe in dem Punkte liegt, der a, b, c zu Coordinaten hat, sind

$$[\gamma] \quad Ax + By + z = \alpha, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \beta.$$

Diese Gleichungen lassen sich als die eines beliebigen Parallelkreises der Fläche betrachten, wenn man nur die Gleichung zwischen $\alpha$ und $\beta$ aufstellt, die sich bei der Elimination von x, y, z aus $[\alpha]$ und $[\gamma]$ ergibt. Diese Gleichung heiße wieder

$$[\delta] \qquad F(\alpha, \beta) = 0;$$

eliminirt man nun aus dieser und den Gleichungen des Parallelkreises $\alpha$ und $\beta$, so erhält man als allgemeine Gleichung der Drehungsflächen

$$F[Ax + By + z, \ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] = 0.$$

**737. Aufgabe.** Eine gegebene Fläche sei mit einer Drehungsaxe unveränderlich verbunden und drehe sich dann um diese Axe; man soll die Gleichung der Fläche finden, welche die bewegliche Fläche in allen ihren Lagen berührt und umhüllt.

Auf der gegebenen Fläche befindet sich offenbar eine Linie, durch welche die Drehungsfläche beschrieben wird, und die Berührungsebene an der gegebenen Fläche muß in jedem Punkte dieser Linie auch die gesuchte Drehungsfläche berühren; also steht diese Ebene senkrecht auf der Meridianebene, die durch den betreffenden Punkt geht (Nro. 734). Folglich erhält man, wenn die Gleichung, welche diese Bedingung ausdrückt, zugleich mit der der gegebenen Fläche genommen wird, zwei Gleichungen nach x, y, z, welche die Erzeugungslinie ergeben, und die Aufgabe ist dadurch auf die vorhergehenden zurückgeführt.

## Windschiefe Flächen (Surfaces gauches).

**738.** Unter windschiefen Flächen versteht man solche, welche durch eine gerade Linie erzeugt werden und nicht entwickelbar sind.

Sowohl windschiefe als entwickelbare Flächen, die mittelst einer Geraden beschrieben werden, führen alle den gemeinschaftlichen Namen Regelflächen (surfaces réglées).

Bei allen diesen Flächen muß die Berührungsebene an irgend einem Punkte die durch diesen Punkt gehende Erzeugungslinie enthalten; deßwegen berührt aber diese Ebene die Fläche nicht in jedem Punkte der Erzeugungslinie, sondern diese Eigenschaft findet nur bei den entwickelbaren Flächen statt.

**739.** Unter den windschiefen Flächen sind hauptsächlich zu merken:

1) Das Hyperboloid mit einem Mantel, welches durch eine Gerade erzeugt wird, die an drei nicht mit derselben Ebene parallelen Geraden hingleitet.

2) Das hyperbolische Paraboloid oder die windschiefe Ebene, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die über zwei Gerade hingleitet und dabei immer mit einer Ebene parallel bleibt.

3) Der windschiefe Cylinder, der durch eine Gerade erzeugt wird, die mit einer Ebene parallel bleibt und sich auf zwei beliebige Curven stützt.

4) Das Conoid, bei welchem die erzeugende Gerade mit einer Ebene parallel bleibt, und über eine Gerade und eine Curve hingleitet.

Von den beiden ersten ist zu bemerken, daß sie die einzigen windschiefen Flächen sind, die zu den Flächen des zweiten Grades, deren Eigenschaften früher entwickelt wurden, gehören.

**740.** Um die Rechnung auf die Definition der Regelflächen anzuwenden, nehme man zur Darstellung der Erzeugungslinie in einer beliebigen Lage die Gleichungen

$$[1] \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta;$$

dann beachte man, daß, wenn diese Gerade eine bestimmte Fläche beschreiben soll, von den Größen a, $\alpha$, b, $\beta$, drei als Functionen der vierten auszudrücken sind. Also lassen sich für irgend eine Regelfläche die Gleichungen der Erzeugungslinie in folgende Form bringen

$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha, \quad y = z\psi(\alpha) + \chi(\alpha),$$

wo die Buchstaben $\varphi$, $\psi$, $\chi$ Functionen, und $\alpha$ eine unbestimmte Größe bezeichnet, durch deren Variation die Erzeugungslinie sich fortbewegt.

Anstatt a, b, $\beta$ als Functionen von $\alpha$ anzunehmen, kann man auch diese vier Größen von drei Bedingungsgleichungen abhängig machen, und dann, um die Fläche zu erhalten, aus diesen Gleichungen und den Gleichungen [1] a, $\alpha$, b, $\beta$ eliminiren.

Diese Bedingungsgleichungen ergeben sich gewöhnlich aus der besondern Erzeugungsart des betreffenden Falls: daher müssen sie entweder ausdrücken, daß die Erzeugungslinie über drei gegebene Linien hingleitet, oder über zwei Linien und mit einer Ebene parallel bleibt, oder blos auf einer Linie, und dabei beständig mit einer Ebene parallel lauft, und an einer gegebenen Fläche Tangente ist, oder sich auch auf verschiedene andere Arten fortbewegt. Der zu befolgende Gang bei der analytischen Entwicklung ist nun hinlänglich bekannt, und es bedarf hiezu keiner weitern Ausführung.

Soll die Regelfläche entwickelbar sein, so muß die Beziehung der Größen a, $\alpha$, b, $\beta$ so gewählt werden, daß jede Lage der Erzeugungslinie mit der nächstfolgenden in eine Ebene kommt; um aber diese Bedingungen analytisch auszudrücken, müßte man zur Differentialrechnung seine Zuflucht nehmen, was nicht im Plane dieses Werkes liegt.

**741.** Die wichtigsten Eigenschaften der windschiefen Flächen, die in der Anwendung am häufigsten vorkommen, lassen sich leichter auf geometrischem, als auf analytischem Wege darstellen. Zwar könnte der Leser über diesen Punkt auf die darstellende Geometrie verwiesen werden; es dürfte jedoch bequemer sein, das Nöthige auch hier zu finden.

Zuerst soll bewiesen werden, daß eine Fläche überhaupt beschrieben werden kann, wenn man eine Gerade auf drei gegebenen Richtungs- oder Leitlinien sich hinbewegen läßt.

Man nehme zu diesem Zweck einen beliebigen Punkt auf der ersten Leitlinie als Spitze eines Kegels, der durch die Bewegung einer Geraden auf der zweiten Richtungslinie erzeugt wird. Dieser Kegel schneidet die dritte Richtungslinie in einem Punkte, und da die durch diesen Punkt und die Spitze des Kegels gezogene Gerade ganz in den Kegel fällt, so muß sie die zweite Richtungslinie treffen, also trifft diese Gerade zugleich alle drei Linien. Durch die Wiederholung dieser Construction, indem man nach einander alle Punkte der ersten Richtungslinie als Spitzen solcher Kegel nimmt, muß offenbar die Gerade, welche alle drei Richtungslinien trifft und so ihre Lage beständig ändert, eine Fläche bestimmen. Dabei ist noch klar, daß die nämliche Fläche erzeugt werden kann, wenn man drei beliebige auf dieser Fläche gezogene Linien als Richtungslinien nimmt.

**742.** Welche Curven nun auch als Richtungslinien einer windschiefen Fläche genommen werden, so kann man sie als Polygone von unendlich vielen Seiten, und somit auch die Fläche selbst als zusammengesetzt aus unendlich vielen windschiefen Seitenflächen betrachten, von denen jede ein unendlich langer aber unendlich schmaler Theil eines Hyperboloids oder Paraboloids ist. Das heißt mit andern Worten: wenn man auf

dieser Fläche zwei Erzeugungslinien G und G' (Fig. 54), die beliebig nahe liegen, und die Richtungslinie in den Punkten a, b, c, a', b', c' treffen, annimmt, ferner die Curvenelemente aa', bb', cc' verlängert, wodurch die drei Tangenten ar, bs, ct entstehen, und die Erzeugungslinie G auf diesen drei Tangenten hingleiten läßt; so erhält man eine neue Fläche, die mit der ersten einen zwischen den Erzeugungslinien G und G' liegenden Theil gemeinschaftlich hat. Daraus folgt, daß die Berührungsebene an einer der beiden Flächen in jedem Punkt der Geraden G auch die andere Fläche berührt.

Um diesen Satz noch einleuchtender zu machen, nehme man zuerst an, die Erzeugungslinien G und G' liegen nicht unendlich nahe; nun ziehe man die Secanten (Fig. 55) aa'r, bb's, cc't, und nehme sie als Richtungslinien einer windschiefen Fläche der zweiten Ordnung (die ein Hyperboloid oder Paraboloid sein kann).

Es wurde bereits bewiesen (Nro. 681, 689), daß es auf dieser Fläche ein zweites System von Erzeugungslinien gibt, die alle ersten treffen; eine derselben, die G und G' in m und n schneidet, sei mp. Denkt man sich nun G' der G immer näher gerückt, so ändern die Linien ar, bs, ct, und mit ihnen die Fläche, deren Richtungslinien sie sind, ihre Lage. Zugleich ändert sich auch die Gerade mp, ohne daß sie jedoch, so klein auch die Entfernung von G zu G' sein mag, außerhalb der Fläche zu liegen kommt; also liegt sie auch noch an derselben in dem Augenblick, wo diese Erzeugungslinien zusammentreffen. Dann werden aber ar, bs, ct zu Tangenten an den Richtungslinien der gegebenen Fläche, und mp wird zur Tangente an derselben Fläche; oder was dasselbe ist, mp wird zur Tangente an einer gewissen Curve, die auf dieser Fläche durch den Punkt m gezogen wird, und von welcher man annehmen kann, der Punkt n bewege sich längs derselben hin. Fallen daher die Erzeugungslinien G und G' zusammen, so wird die Ebene amp in m zur Berührungsebene an der gegebenen Fläche, wobei noch zu merken ist, daß die Ebene an der neuen Fläche stets Berührungsebene bleibt, da sie immer zwei auf dieser Fläche liegende Gerade am und mp enthält.

Da sich diese Folgerungen auf alle Punkte der Erzeugungslinie G anwenden lassen, so geht wie oben daraus hervor: wenn man durch die Punkte, wo die drei Richtungscurven einer windschiefen Fläche von einer ihrer Erzeugungslinien getroffen werden, Tangenten an diese Curven zieht, und diese Tangenten als Richtungslinien einer windschiefen Fläche der zweiten Ordnung nimmt; so berührt diese neue Fläche die erste in der ganzen Länge ihrer gemeinschaftlichen Erzeugungslinie, d. h. die beiden Flächen haben in jedem Punkte dieser Erzeugungslinie eine gemeinschaftliche Berührungsebene.

Aus diesem Lehrsatze geht noch die wichtige Folgerung hervor, daß zwei windschiefe Flächen, die längs derselben Erzeugungslinie drei gemeinschaftliche Berührungsebenen haben, in

allen Punkten dieser Erzeugungslinie einander gegenseitig berühren. Denn legt man durch die Berührungspunkte drei beliebige Ebenen, so schneiden sie die Berührungsebenen in Geraden, welche an den beiden Flächen zugleich Tangenten sind: nun hat aber die windschiefe Fläche der zweiten Ordnung, welche diese drei Tangenten zu Richtungslinien hat, in jedem Punkte der gemeinschaftlichen Erzeugungslinie dieselbe Berührungsebene mit den gegebenen Flächen; also berühren sich auch diese beiden letztern Flächen in der ganzen Länge dieser Erzeugungslinie.

Zur Bildung von Gewölben gebraucht man zuweilen eine Verbindung von mehreren windschiefen Flächen. In diesen Fällen muß die Einrichtung getroffen werden, daß zwei Flächen immer in einer Erzeugungslinie zusammentreffen, längs welcher drei gemeinschaftliche Berührungsebenen stattfinden: denn sie berühren sich dann in der ganzen Länge dieser Erzeugungslinie, und man kann annehmen, sie bilden nur eine einzige. Dieß heißt man die Flächen zusammenstoßen (raccorder).

**743.** Das eben Gesagte bezieht sich auf die windschiefen Flächen überhaupt; betrachten wir nun die windschiefen Cylinder insbesondere, welche durch eine Gerade beschrieben werden, die mit einer Ebene parallel bleibt und über zwei Curven hingleitet. Zieht man in zwei Punkten derselben Erzeugungslinie Tangenten an diese Curven, und läßt über denselben eine Gerade parallel mit einer gegebenen Ebene hingleiten, so wird dadurch ein hyperbolisches Paraboloid erzeugt; und wiederholt man die vorigen Folgerungen, so gelangt man leicht zu dem Schlusse, daß dieses Paraboloid den windschiefen Cylinder in allen Punkten der gemeinschaftlichen Erzeugungslinie berührt. Dann läßt sich auch leicht ersehen, daß, wenn zwei windschiefe Cylinder dieselbe Richtungsebene haben, zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen auf einer Erzeugungslinie hinreichend sind, damit beide Flächen vollkommen zusammenstoßen.

**744.** Betrachten wir noch einmal eine beliebige windschiefe Fläche und nehmen an, die Berührungsebene soll in einem ihrer Punkte geometrisch construirt werden: nun kann dieselbe offenbar durch eine Fläche der zweiten Ordnung, die auf der durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugungslinie drei gemeinschaftliche Berührungsebenen mit ihr hat, ersetzt werden. Durch diesen Punkt läßt sich aber bekanntlich eine zweite Gerade an die zweite Fläche ziehen, und die Berührungsebene, die in diesem Punkt an diese Fläche gelegt wird, enthält die beiden Geraden; also ist diese Berührungsebene bestimmt, und folglich auch die Berührungsebene an der gegebenen Fläche, da diese die nämliche sein muß.

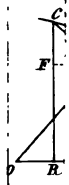
**745.** Da sich durch jeden Punkt einer gegebenen Fläche unendlich viele Tangenten ziehen lassen, so kann man offenbar, wenn man auf einer ihrer Erzeugungslinien drei beliebige Punkte genommen hat, auf unendlich

verschiedene Arten ein System von drei Tangenten wählen, die beziehungsweise durch diese Punkte gehen, und dann ist auch klar, daß es unendlich viele Flächen der zweiten Ordnung gibt, die eine windschiefe Fläche nach einer Erzeugungslinie berühren und in der Construction der vorigen Nummer angewandt werden können. Im Allgemeinen sind die Flächen der zweiten Ordnung Hyperboloide; man kann aber eben so gut die Tangenten, welche an die drei in der gegebenen Fläche gemachten parallelen Durchschnitte gezogen werden, als Richtungslinien annehmen, und dann bestimmen sie ein Paraboloid.

Man ersieht sogar, daß es unendlich viele sich berührende Paraboloide, wie das eben besprochene gibt; denn die drei parallelen Durchschnitte lassen sich auf unendlich verschiedene Arten abändern. Macht man diese Durchschnitte senkrecht auf die Erzeugungslinie, nach welcher die gegebene Fläche berührt werden soll, so fällt jede Unbestimmtheit weg.

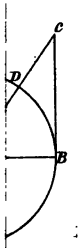
**746.** Schneiden wir wirklich, wie eben gesagt wurde, die Fläche durch drei auf der Erzeugungslinie G (Fig. 56) senkrechte Ebenen, und es seien ar, bs, ct die drei Tangenten, welche dann ein hyperbolisches Paraboloid, das die gegebene Fläche berührt, bestimmen. Nun enthält dieses Paraboloid bekanntlich zwei Systeme von Geraden, von denen die einen, wie G, die Tangenten ar, bs, ct treffen, und die andern, wie ar, jede der ersten treffen. Ferner weiß man, daß die Geraden jedes Systems mit der nämlichen Ebene parallel laufen. Nach der Construction stehen aber die Linien ar, bs, ct senkrecht auf der Geraden G; legt man daher eine Reihe von Ebenen senkrecht auf diese Gerade, so schneiden sie die gegebene Fläche in Curven, welche Gerade des Paraboloids zu Tangenten haben. Somit kann man das Paraboloid als den geometrischen Ort der Tangenten betrachten, die durch die verschiedenen Punkte der Erzeugungslinie G an alle in der gegebenen Fläche senkrecht auf die Erzeugungslinie gemachten Durchschnitte gezogen werden.

Denken wir uns nun, dieses Paraboloid mache eine Viertelsdrehung um die Gerade G, so wird offenbar jede der Tangenten an der gegebenen Fläche zur Normale. Daraus ergibt sich der folgende wichtige Lehrsatz, der bei den Untersuchungen der darstellenden Geometrie vielfache Anwendung findet: *Eine durch die Normalen, welche durch verschiedene Punkte derselben Erzeugungslinie an eine beliebige windschiefe Fläche gezogen werden, gebildete Fläche ist immer ein hyperbolisches Paraboloid.*

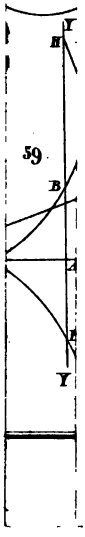



11.

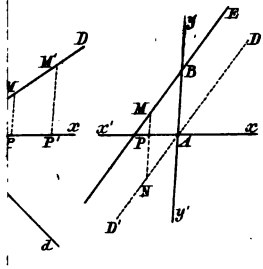
19.



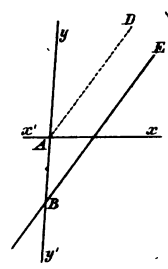

51.



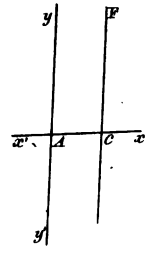
67.



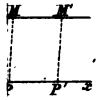
68.



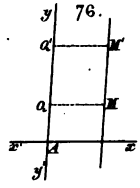
71.



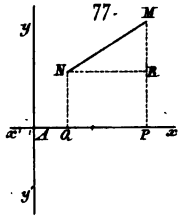
73.



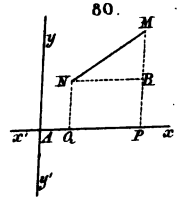
76.



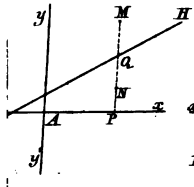
77.



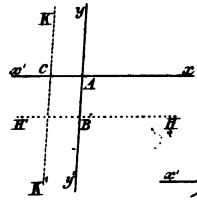
80.



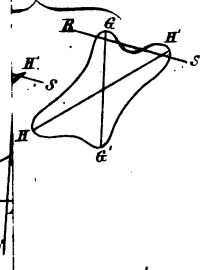
84.



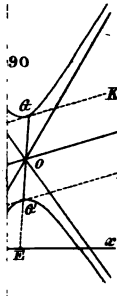
85.



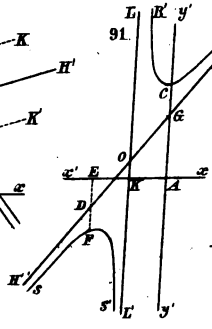
87.



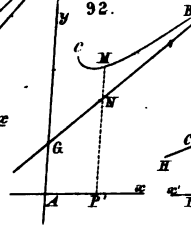
90.



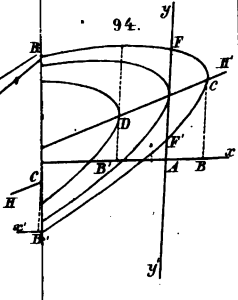
91.



92.

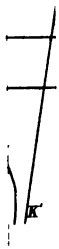


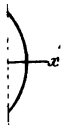
94.

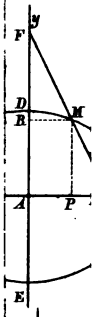


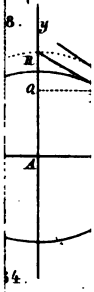
97.

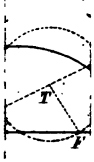
103.



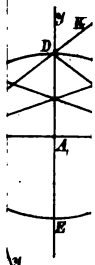




y
F
D
R
M
A
P
E

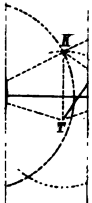

8.
y
R
Q
A


64.
T
F

140.

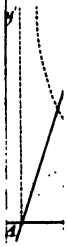


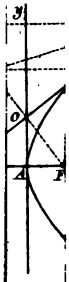
158.



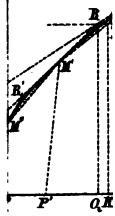
164.

170.

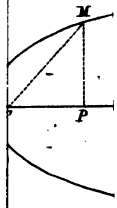


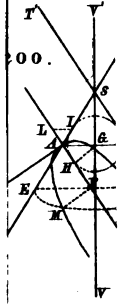



188.



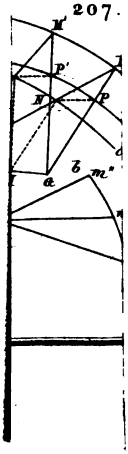

194.



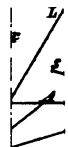

200.

207.

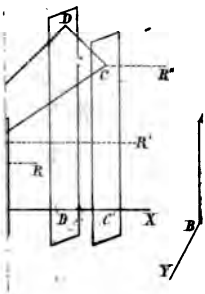


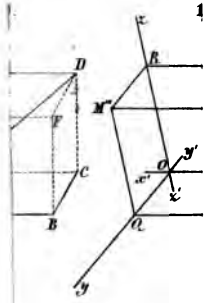
M
P

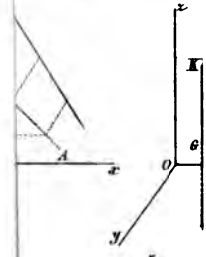
M'

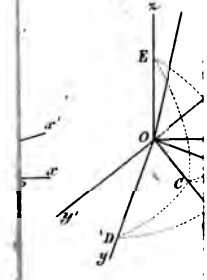

L
F
L'

B


D
C
R''
R'
R
D'
C'
X
B
Y


z
D
B
F
R''
C
O
y'
x'
B'
Q
y


z
K
A
G
x
O
y


z
E
x'
O
x
C
y'
D'
y

3
x
H
K
L
y
R
G
P
y
P
a